

Giuseppe Biorci

TEORIA delle RETI ELETTRICHE

2

verifica della realtà e della positività, reti a due elementi, reti RC, sintesi delle reti RLC, N-bipoli passivi lineari, doppi bipoli, matrice di scattering normalizzata a Z, condizioni di adattamento su base immagine, celle elementari, adattamento magnetico dei bipoli, parametri iterativi del doppio bipolo, adattamento con trasformatore, doppio bipolo simmetrico, fattore di inserzione, cella a T e a Π simmetriche, filtri classici, circuiti elettrici

Anno Accademico 1966-67

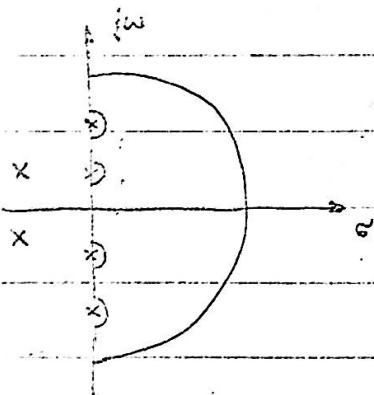
Verifica della realtà e positività

Notte proprietà delle funzioni reali positive sono facili da verificare, ma sono soltanto proprietà necessarie. Come si fa allora a verificare se una funzione data è reale e positiva? Le definizioni esiste, ma è molto complicata, ed è difficilissimo verificarla. Si possono verificare le condizioni necessarie, per provare a realizzarla; se invece fuori un risultato o un altro componente negativo, allora la funzione non è realizzabile.

Si può però vedere che se la funzione è reale e positiva K e solo se A) la funzione non ha poli nel semipiano destro ($\sigma > 0$); B) i poli ^{nell'asse immaginario} sono semplici con residuo reale e positivo. C) la parte reale di $Z(j\omega)$ è non negativa:

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] \geq 0$$

Le condizioni sono necessarie: A) B) C) sono senz'altro soddisfatte da una qualunque funzione reale e positiva. Le condizioni sono sufficienti (si intende che $Z(s)$ è reale per s reale, ovviamente): il teorema del massimo modulo afferma che se $Z(s)$ è analitica in un dominio, $|Z(s)|$ assume il suo valore massimo nel contorno e tale valore è finito. Nel semipiano destro non ci sono poli, quindi $Z(s)$ è in analitica. Consideriamo un contorno che escluda i poli nell'asse im-



quario con circolari, e consideriamo un semicerchio di raggio R , e poi facciamo tendere R all'infinito. Consideriamo le funzioni:

$$f(s) = e^{-Z(s)}$$

anche $f(s)$ è analitica nella stessa regione di $Z(s)$, per il teorema del massimo modulo il valore massimo di $|f(s)|$ cade nel contorno, e quindi (per $R \rightarrow \infty$), il massimo modulo di $f(s)$ cade nell'asse immaginario. Rimane però:

$$Z(s) = \operatorname{Re}[Z(s)] + j \operatorname{Im}[Z(s)]$$

$$f(s) = e^{-\operatorname{Re}[Z(s)]} \cdot e^{-j \operatorname{Im}[Z(s)]}$$

$$|f(s)| = e^{-\operatorname{Re}[Z(s)]}$$

Quindi nell'asse immaginario ci cade il valore minimo di $\text{Re}[z(s)]$, ma se imponiamo le condizioni c) (nel caso che il minimo cade proprio nell'asse immaginario) tale minimo è positivo, quindi in ogni altro punto del piano dato la funzione è reale e positiva. Se il minimo cade in un punto dei cicli che circondano il polo, le condizioni B) impie che tale minimo sia positivo, come si è visto in una dimostrazione precedente, e tutto va a posto nuovamente.

Notare che l'applicazione di questo teorema è già più semplice, perché si riduce alla verifica del computamento di una funzione sul solo asse immaginario. Tuttavia c'è sempre da trovare delle radici di un polinomio di ordine qualsiasi, il che più generale è estremamente complicato.

Scriviamo $z(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$; se B) dicano che $D(s)$ è un polinomio di Hurwitz generalizzato. Poniamo allora scrivere:

$$D(s) = D_p(s) + D_d(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{D_p(s)}{D_d(s)}$$

mettendo a numeratore di Φ la parte di grado maggiore. Cominciamo a considerare il caso più cui non ci siano radici comuni a D_p ed a D_d i cui $\text{p}||0$. Diciamo che la $z(s)$ non abbia poli nell'asse immaginario. In tal caso è $\Phi(s)$ pure funzione reale e positiva. Il numeratore di Φ è ~~almeno~~ per l'alto di 1 grado superiore al denominatore, seguendo la divisione:

$$\Phi(s) = H_2 s + \frac{D_{2p}(s)}{D_d(s)}$$

H_2 è il livello delle Φ ed è reale e positivo. Le $D_{2p}(s)/D_d(s)$ è reale e positiva. Se A) e B) sono verificate per la Φ , esse sono verificate anche per $D_{2p}(s)/D_d(s)$; se infine $\text{Re}[\Phi(j\omega)] \geq 0$, è anche:

$$\text{Re}[\Phi(j\omega)] = \text{Re}[H_2 j\omega] + \text{Re}\left[\frac{D_{2p}}{D_d}\right] = \text{Re}\left[\frac{D_{2p}(j\omega)}{D_d(j\omega)}\right] \geq 0$$

Notare che se una funzione $\bar{z}$ reale è positiva lo è anche la sua inversa.
Scriviamo:

$$\bar{\Psi}(s) = H_1(s) + \frac{1}{\bar{\Psi}_1(s)}$$

$\bar{\Psi}_1(s)$ è dello stesso tipo di $\bar{\Psi}(s)$, e pertanto si può ripetere le stesse considerazioni:

$$\bar{\Psi}(s) = H_2 s + \frac{1}{H_2 s + \frac{1}{\bar{\Psi}_2(s)}} = H_2 s + \frac{1}{H_2 s + \frac{1}{H_3 s + \frac{1}{\bar{\Psi}_3(s)}}}$$

e così di seguito.

Si dica che si è decomposto $\bar{\Psi}(s)$ in frazione continua (di Stieltjes). Il grado delle $\bar{\Psi}_k(s)$ va calando di volta in volta e alla fine si arriverà ad avere $H_n s$, come risultato della divisione di un polinomio di grado uno e di uno di grado zero (Le H_i sono tutte reali e positive). L'espansione di $\bar{\Psi}(s)$ non si arresta mai prematuramente, cioè arriva sempre fino all'ultimo termine. Si potrebbe dimostrare che se $\bar{\Psi}$ fosse splendibile in frazione continua, tale espansione non si arresterebbe prematuramente e le H_i fossero tutte positive, allora $\bar{\Psi}$ sarebbe reale e positiva, e $D(s)$ sarebbe polinomio di Hurwitz generalizzato.

Quindi la A) è verificata in modo semplice con divisioni di polinomi.

Se però $D(s)$ ha poli nell'asse immaginario, possiamo decomporre $\bar{\Psi}(s)$ in frazione continua; succede però che dopo il primo passo (H_1 è il rapporto tra i coeff. di grado massimo del numeratore e denominatore di $\bar{\Psi}$ ridotti ai minimi termini) si va avanti, si va avanti, però la decomposizione si arresta ad un certo punto, quando una divisione non è più possibile perché si ha il resto zero. Quindi anche in questo caso $\bar{\Psi}$ ammette un'espansione in frazione continua, e si può non arrestare prematuramente, ma abbiamo identificato le parti comuni a $D_p(s)$ e $D_d(s)$, che è il numeratore dell'ultima frazione

trovate prima dell'assetto numeratore - Diciamo $T_p(s)$ tale polinomio -

La $T_p'(s)$ è un polinomio dispari, e si potrebbe far vedere che anche tale derivato è un polinomio di Hurwitz generalizzato. Siamo nelle ottime condizioni di prima: possiamo formare una $\varphi(s) = \frac{T_p}{T_p'}$, ed espanderla come prima. L'espansione non si arresta prematuramente, finché non si possa trovare una radice comune a $T_p(s)$ ed a $T_p'(s)$, il che non può essere. Verificato anche questo con un unico test: verificare brutalmente la condizione B): porre $T_p(s) = 0$, trovare le radici e calcolare i residui rimasti, verificando che siano reali e positivi.

In questo modo abbiamo verificato sia la condizione A) che la condizione B).

Scriviamo ora $z(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ e troviamo:

$$N(s) = N_p(s) + N_d(s)$$

$$D(s) = D_p(s) + D_d(s)$$

Sappiamo che è:

$$\operatorname{Re}[N(j\omega)] = N_p(j\omega)$$

$$\operatorname{Im}[N(j\omega)] = N_d(j\omega) \cdot \frac{1}{j}$$

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = D_p(j\omega)$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = D_d(j\omega) \cdot \frac{1}{j}$$

e pertanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[z(j\omega)] &= \operatorname{Re} \left[\frac{N_p(j\omega) + N_d(j\omega)}{D_p(j\omega) + D_d(j\omega)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{N_p(j\omega)D_p - N_dD_d + N_pD_d + N_dD_p}{[D_p(j\omega) + D_d(j\omega)][D_p(j\omega) - D_d(j\omega)]} \right] \\ &= \frac{N_pD_p - N_dD_d}{D_p^2 + D_d^2} \geq 0 \end{aligned}$$

finché i termini $N_dD_p - N_pD_d$ sono certamente immaginari, e N_pD_p e N_dD_d sono certamente reali. Adesso altre:

$$N_p(j\omega)D_p(j\omega) - N_d(j\omega)D_d(j\omega) \geq 0 \quad (\forall \omega)$$

ci siamo ridotti ad un polinomio N_pD_p che è un polinomio reale (ω^2); N_d è $j\omega$ per un polinomio pari, lo stesso D_d , e quindi tutto quanto è un polinomio in ω^2 a coefficienti reali. Poniamo $\omega^2 = x$ ($0 \leq x < \infty$), e vogliamo che il polinomio sia non negativo per ogni x . Per far ciò non c'è altro da fare che calcolare

le radici, e possiamo scrivere il polinomio nella forma:

$$A(x) = A_t (x-x_1)^{r_1} (x-x_2)^{r_2} \dots (x-x_p)^{r_p} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

In particolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = A_t x^t \geq 0$$

$$A_t \geq 0$$

quando t il grado massimo ed A_t il coeff. di x^t . Se x_i è reale (radice) negativa il termine $(x-x_i)^{r_i}$ è positivo. Se x_i è complesso i due termini di x_i e x_i^* si raggruppano e troviamo $[(x-a)^2 + b^2]^{r_i} \geq 0$, avendo $x_i = a + jb$; anche le radici complesse pertanto non danno fastidio. Le radici reali e positive sono del tipo $(x-x_i)^{r_i}$, allora se r_i è pari tutto va bene, se r_i dispari allora $(x-x_i)^{r_i}$ è negativa. Pertanto le radici reali e positive del polinomio devono avere grado di molteplicità pari, se no va tutto a pallino. Questo significa anche che basta trovare le radici reali di $A(x)$; ma basterebbe anche trovare ^{solo} gli ordini di molteplicità di tali radici.

Reti a due elementi

Le uniche combinazioni possibili sono LC, RC ed RL. Cominciamo con le reti LC. Per le reti LC deve sempre essere $\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = 0$, cioè deve essere:

$$N_p D_d - \bar{N}_d D_p = 0$$

il che può essere, a parte i casi banali, se:

$$N_p = D_d = 0$$

ovvero:

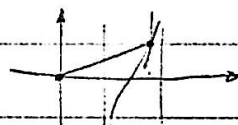
$$\bar{N}_d = D_p = 0$$

Se nell'uno che nell'altro caso numeratore e denominatore di Z diventano un polinomio pari ed uno dispari; non sono mai di grado uguale e differiscono quindi sempre ~~almeno~~ di 1 grado.

[Dato che la rete è pure dissipativa non ci possono essere modi immagari, pertanto gli

e zero, siano tutti nell'asse immaginario].

La suscettanza ammette sempre l'origine come polo o zero naturale, perché uno dei due polinomi è dispari. Questo si vede in quanto più continua la rete è peggiore; è formata da poli collegamenti. Si vede inoltre che poli e zeri giacciono tutti nell'asse immaginario perché è formata da un polinomio pari e uno dispari. Per le due forme la suscettanza ha le proprietà delle funzioni $\mathcal{Z}(s)$ che abbiamo visto prima; in particolare $\mathcal{Z}(j\omega) = jX(\omega)$ essendo $X(\omega)$ funzione crescente di ω : poli e zeri si alternano nell'asse immaginario. Si trova che è sempre:



$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} > \frac{X}{\omega}$$

Il residuo nei poli è reale e positivo, e poli e zeri sono semplici.

Consideriamo che l'impedenza sia una impedenza. Sono possibili solo 4 casi:

$\mathcal{Z}(j\omega)$	N_d D_p 1 $u = d+1$	N_d D_p 2 $u = d-1$	N_d D_p 3 $u = d+1$	N_p D_d 4 $u = d-1$
	$s=0$ è zero 0	$s=0$ è zero 0	$s=0$ è zero 0 X	$s=0$ è zero X
	$s=\infty$ è X	$s=\infty$ è 0	$s=\infty$ è X	$s=\infty$ è zero 0

~~TEOREMA~~ Sia nell'origine che all'infinito la rete è di puri collegamenti; pertanto la rete è equivalente ad un corto sia per $\omega=0$ sia per $\omega=\infty$, non ammette nessun ciclo capacitivo, ed ammette un primo induttivo, ed uno capacitivo almeno, e posto è il caso [2]. Se è un circuito aperto sia per $\omega=0$ e per $\omega=\infty$, allora c'è un ciclo di condensatori ed uno di induttori almeno; siamo nel caso [3]. E così via. Notare che in queste considerazioni se si parla di ciclo si parla di un ciclo che comprende i

da cui si può verificare che $dx/dw > x/w$

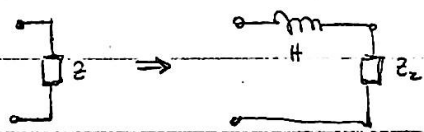
Le sintesi delle reti fatte in genere da dati grafici o numerici. Si parte ^{quindi} dalla ipotesi che la funzione $Z(s)$ sia assegnata, cose che in pratica non è mai vera. Sull'ipotesi che si abbia una funzione di rete di un bipolo, è immediato concludere se essa è realizzabile con LC o meno. Sull'ipotesi che si tratti di una $Z(s)$.

Cominciamo col fare il cosiddetto "preambolo di Foster": data una funzione di rete cerchiamo di renderla più semplice. È immediato, in generale, riconoscere se $Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$, può dunque controllare che $Z_2(s)$ è ancora reale e positiva, e $Z_2(s)$ è più semplice di $Z(s)$. In tal caso $Z(s)$ è rappresentabile con la serie di due impedenze Z_1 e Z_2 . Stesso discorso per $Y(s)$ (parallelo di Y_1 ed Y_2).

Si può estrarre dalle funzioni di rete tutte le frequenze naturali sull'asse immaginario. [Questo fa capire che per una rete realizzabile con LC il preambolo di Foster esaurisce la sintesi].

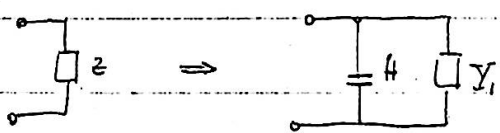
Sull'ipotesi che il grado del numeratore e del denominatore siano diversi; otteniamo quello di grado maggiore di zero:

$$Z(s) = Hs + \frac{N_1(s)}{D(s)}$$



N_1/D è reale e positiva, purché i poli di Z_2 sono gli stessi poli di Z , quindi tutte le proprietà relative ai poli di Z_2 sono soddisfatte; inoltre la parte reale di Z coincide sull'asse $j\omega$ con la parte reale di Z_2 ; e pertanto Z_2 è reale e positiva. Se invece di una Z ci fosse stata una Y :

$$Y(s) = Hs + Y_1(s)$$

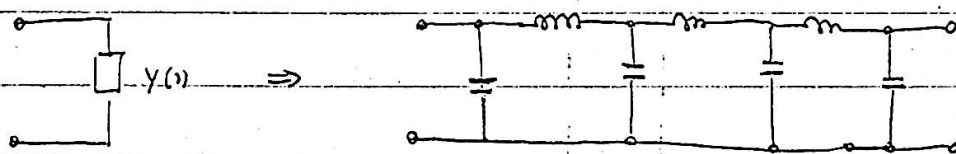
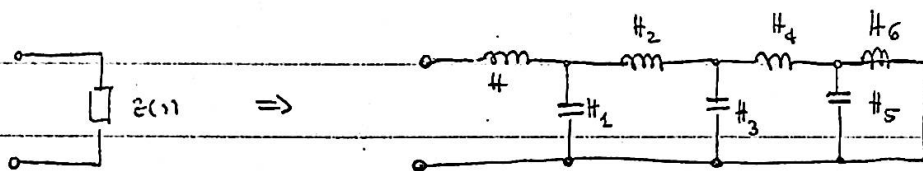


Sei due casi abbiamo tratto un polo all'infinito di Z e di Y . Se la rete è reattiva l'una o l'altra estrazione è proibita. Per una rete reattiva si può

posso ovviamente continuare:

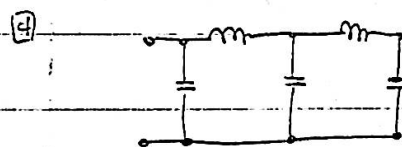
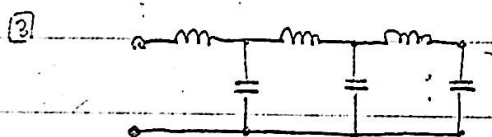
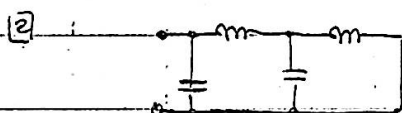
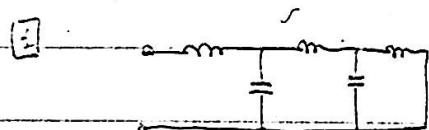
$$Z(s) = H_1 + \frac{1}{\frac{D_1(s)}{N_1(s)}} = H_1 + \frac{1}{H_2 + \frac{D_2(s)}{N_2(s)}}$$

e così via:



etc., per gli altri casi possibili.

Il complementamento per $\omega = \infty$ è immediata. Il complementamento per $s = 0$ si ricava dalle terminazioni: l'ultimo resto è zero quando se è una impedenza termina con un corto, se è una ammettanza termina con un circuito aperto.

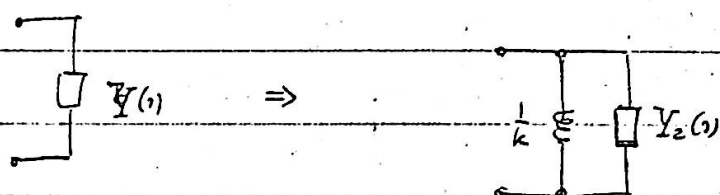
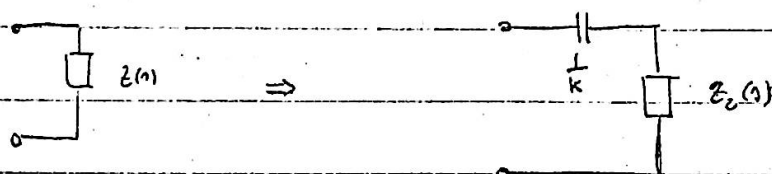


reclamo se riusciamo ad estrarre i poli nell'origine. Supponiamo che ammette un polo nell'origine; allora sempre:

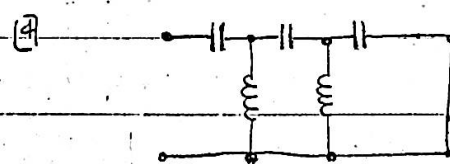
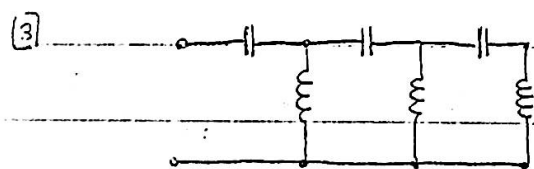
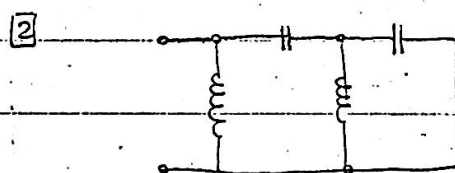
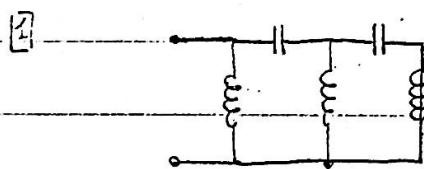
$$Z(s) = \frac{k}{s} + Z_2(s)$$

k è reale e positivo poiché è un residuo nel polo dell'asse immaginario. $Z_2(s)$ è

per z' altro reale e positiva per gli stadi discorsi di prima. Quindi:



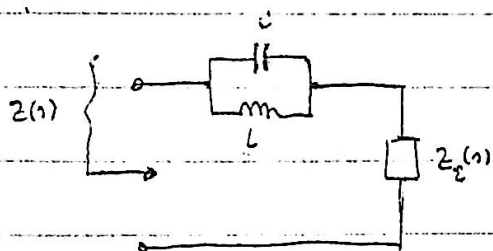
In generale pertanto è sempre possibile numerare gli all'infinito e nell'origine. In particolare per una rete LC è possibile continuare nello stesso modo ed esaminare le reti:



Tutte queste reti sono canoniche: hanno un numero di elementi pari ai coefficienti indipendenti che caratterizzano la funzione di rete. Una rete realizza non canonica ha dei modi nascosti.

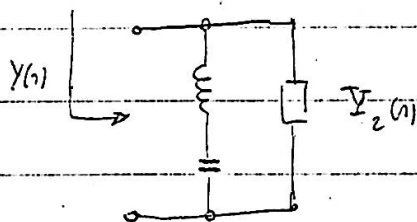
Facciamo ora in generale come in precedenza una coppia di poli immaginari:

$$Z(s) = \frac{2k_0 s}{s^2 + \omega_0^2} + Z_2(s)$$

ad $\bar{z}$:

$$L = \frac{1}{2k_0 \omega_0^2} \quad C = \frac{1}{2k_0} \quad (1)$$

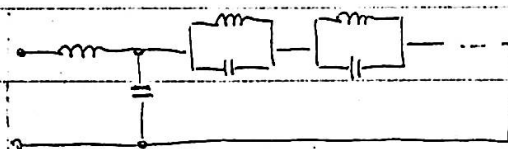
poiché $z_2(s)$ è reale e positiva come al solito. Analogamente per una ammettenza:



(2)

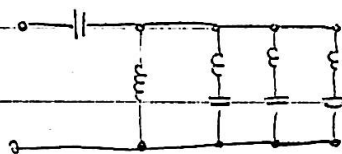
Per una rete reattiva si può andare avanti sempre così:

$$Z(s) = Hs + \frac{k}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_i^2}$$



(3)

per un' ammettenza:



(4)

Quindi le reti reattive sono sempre realizzabili, in forma canonica.

Il problema di Foster si fa sempre in ogni caso, anche se la rete da realizzare non è reattiva.

Reti RC

Consideriamo un bipolo fatto solo di resistori e di condensatori di impedenza:

$$Z_{RC}(s) \quad (5)$$

che è una funzione omogenea del primo ordine delle impedenze dei componenti; cioè risulta:

$$Z_{RC}(pZ_R | pZ_C) = p Z_{RC}(Z_R | Z_C) \quad (6)$$

(infatti le operazioni di serie, parallelo etc. non alterano l'omogeneità della impedenza totale).

Poniamo:

$$s = p^2$$

i componenti della rete dipoi sono:

$$Z_R = R$$

$$Z_C = \frac{1}{sC}$$

da cui:

$$pZ_R = pR$$

$$pZ_C = \frac{1}{pC} \quad (1)$$

Cioè se nelle ~~espressioni~~ $Z_{RC}(s)$ sostituisco ogni R ed ogni C con le (1), otteniamo

$$pZ_{RC}(p^2) \quad (2)$$

perché Z è una funzione omogenea dei componenti. Attribuisco a p il significato di frequenza complessa, si vede che scambiando valori reali e puri i condensatori e sostituendo ogni R con una induttanza numericamente uguale, si cerca l'impedenza ai morsetti in testa l'impedenza di una rete LC geometricamente identica; si trova cioè: (*)

$$pZ_{RC}(p^2) = Z_{LC}(p) \quad (3)$$

Dato che di $Z_{LC}(p)$ si conoscono le espressioni canoniche che tutto è più semplice; nillo = viano ad esempio che sia:

$$Z_{LC}(p) = H \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) \dots}{p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2) \dots} \quad (4)$$

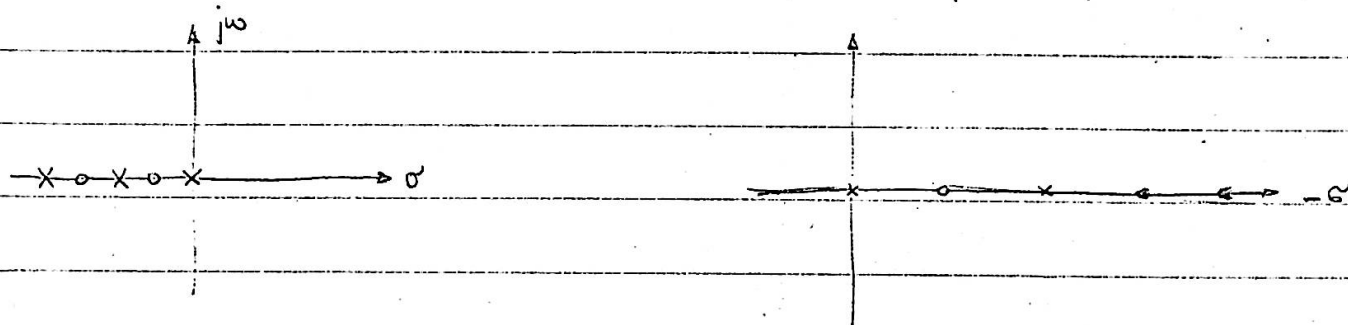
e quindi:

$$Z_{RC}(p^2) = H \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) \dots}{p^2(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2) \dots} \quad (5)$$

e quindi:

$$Z_{RC}(s) = \frac{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)\dots}{1(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)\dots} \quad (12)$$

ovvero $\omega_i^2 = \sigma_i > 0$. Ed abbiamo trovato la forma canonica di $Z_{RC}(s)$: tutti gli zeri e i poli sono sull'asse reale a sinistra dell'origine. Notare che 1 è denominatore delle (12) più esecio o più. Dato che si alternano le ω_i , si alternano anche le σ_i . La parte reale sull'asse reale ha l'andamento, ad esempio se c'è il polo nell'origine:



I) $Z = \frac{p a u}{u d i s p a i} \quad u > d$

$\begin{cases} 1=0 & \text{plo} \\ 1=\infty & H \end{cases}$

II) $Z = \frac{d}{p} \quad u > d$

$\begin{cases} 1=0 & H \cdot k \\ 1=\infty & H \cdot k \end{cases}$

III) $Z = \frac{p}{u d} \quad u < d$

$\begin{cases} 1=0 & \text{plo} \\ 1=\infty & 0 \end{cases}$

IV) $Z = \frac{d}{p} \quad u < d$

$\begin{cases} 1=0 & H \cdot k \\ 1=\infty & 0 \end{cases}$

I): c'è un ciclo di condensatori ed un percorso di R e C tra un morsetto e l'altro, con nessun percorso di C soltanto. II) ciclo di condensatori e percorso di condensatori. III) percorso misto soltanto e non c'è un percorso di poli condensatori. IV) percorso misto soltanto e percorso solo capacitivo. Le divisioni non è mai possibile, perché il grado del numeratore è sempre minore o uguale a quello del denominatore. L'impedenza sarà:

$$Z_{RC}(s) = H + \frac{k}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s + \sigma_i} \quad (12)$$

Il termine k/s c'è nel caso I) e II). Alle (12) ci si arriva scrivendo la $Z_{RC}(s)$:

$$Z_{LC}(s) = H_0 + \frac{k_0}{s} + \sum_n \frac{2k_n s}{s^2 + \omega_n^2}$$

da cui:

$$Z_{RC}(s) = H_0 + \frac{k_0}{s} + \sum_n \frac{2k_n}{s + \sigma_n}$$

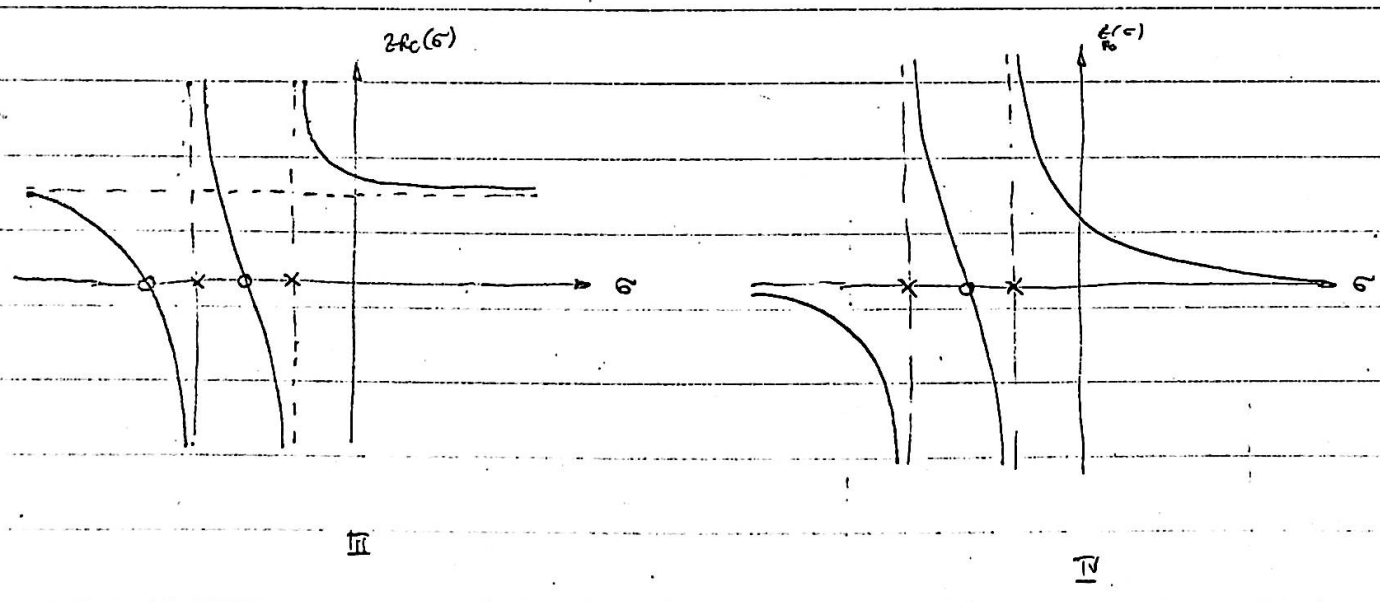
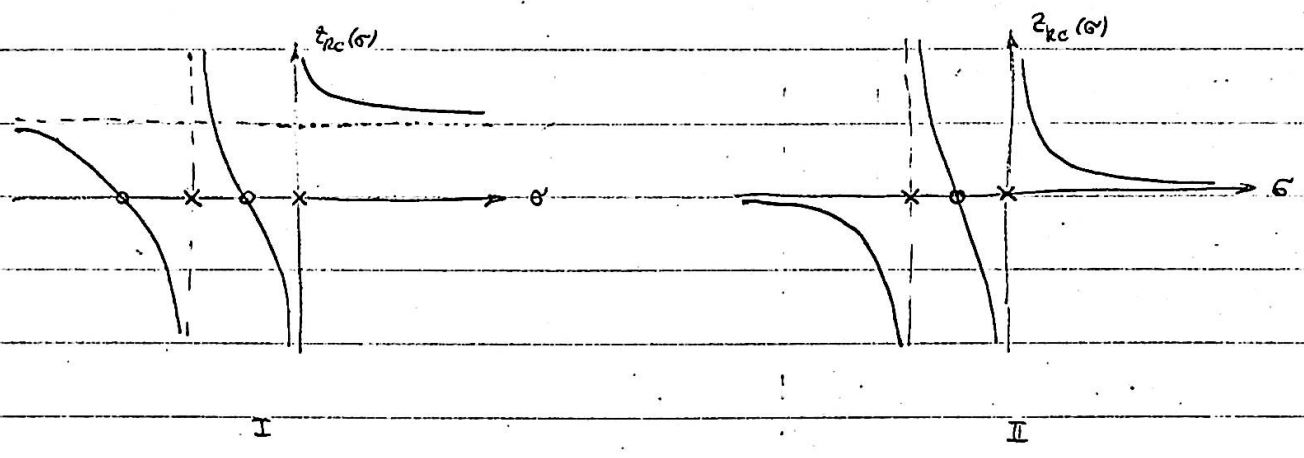
Dove H_0 e k_0 possono essere o no. Quindi: (*)

$$Z_{RC}(s) = H_0 + \frac{k_0}{s} + \sum_n \frac{2k_n}{s + \sigma_n}$$

e quindi:

$$\frac{dZ_{RC}(s)}{ds} = - \left[\frac{k_0}{s^2} + \sum_n \frac{2k_n}{(s + \sigma_n)^2} \right] < 0$$

quindi sempre $Z_{RC}(s)$ è decrescente.



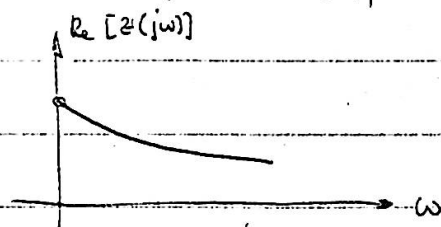
Le risposte del bipolo a frequenze zero è sempre più grande di quella all'infinito: se ho

una rete fatta di resistori ed interruttori, chiudendo un interruttore l'impedenza non può che diminuire (è vista da due morsetti). Per una rete resistiva che ha resistenza R dai terminali, risulta:

$$\frac{\partial R}{\partial R_i} > 0$$

avendo R_i le resistenze di un lato. Notare che per $\sigma \rightarrow \pm \infty$, z deve assumere lo stesso valore. Il fatto che z_{ac} abbia tutte singolarità reali significa che il bipolo non è capace di oscillare su frequenza propria; i modi oscillanti sono possibili solo quando in una rete RLC sia possibile una conversione di energia magnetica in energia elettrica e viceversa.

Sull'asse immaginario la parte reale dell'impedenza $\bar{z}$ continuamente decrescente.



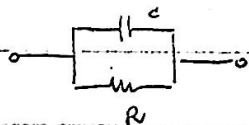
In fatti:

$$z_{ac}(j\omega) = H_0 - j \frac{k_0}{\omega} + \sum \frac{2k_2}{\sigma_2^2 + \omega_0^2} \quad ; \quad \text{Re}[z(j\omega)] = H_0 + \sum \frac{2k_2 \sigma_2}{\sigma_2^2 + \omega_0^2}$$

da cui:

$$\frac{d}{d\omega} [\text{Re}[z(j\omega)]] < 0$$

Sintesi delle reti RC. Si vede subito che:



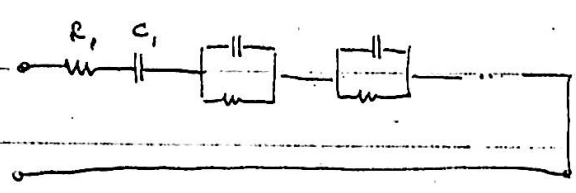
$$z(s) = \frac{R}{1 + RCs} = \frac{1/C}{1 + \frac{1}{RC}s}$$

facendo passando:

$$\frac{1}{C} = 2k_2$$

$$\frac{1}{RC} = \sigma_2$$

si sintetizza la rete immediatamente. In generale:



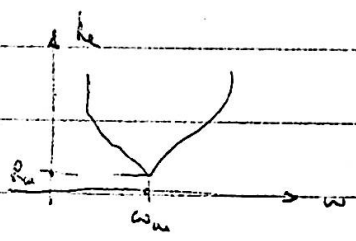
Dove R_1 e C_1 possono essere o no. Si può vedere che esistono anche le reti a scala etc.

Le reti RL si trattano fa dualità con punti:

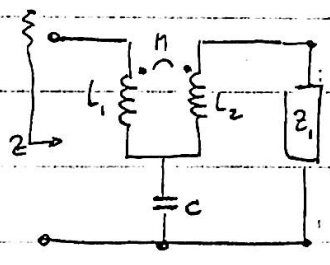
$$R \rightarrow G \qquad C \rightarrow L$$

Sintesi delle reti RLC

Dato più in generale una rete RLC da realizzare si comincia con il teorema di Foster, e quello che rimane si chiama rete a minima resistenza o a minima suscettanza. A posto posto si può ancora strappare una R in serie; infatti il valore minimo della parte reale di $Z(j\omega)$ cade sull'asse immaginario finché non ci siano più poli su tale asse; si trova una funzione reale e positiva, ma ho introdotto una $\sqrt{R_0 Z}$ ^{di $\text{Re}[Z]$} sull'asse immaginario che prima non c'era. La definitiva si arriva alle reti ridotte al minimo, che non ha zeri né poli sull'asse immaginario, ha un punto in cui la resistenza è nulla e la conduttanza è pure nulla. Brune ha dimostrato che se si fa una cella del tipo:



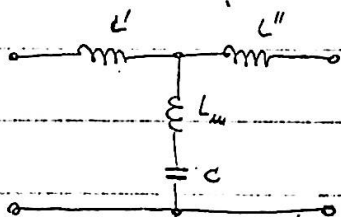
funzione reale e positiva, ma ho introdotto una $\sqrt{R_0 Z}$ ^{di $\text{Re}[Z]$} sull'asse immaginario che prima non c'era. La definitiva si arriva alle reti ridotte al minimo, che non ha zeri né poli sull'asse immaginario, ha un punto in cui la resistenza è nulla e la conduttanza è pure nulla. Brune ha dimostrato che se si fa una cella del tipo:



$$K = \sqrt{L_1 L_2}$$

Si dà dunque a L_1, L_2 e C opportuni valori Z_1 è reale e positiva ed è più semplice di Z e perciò

La somma dei gradi è inferiore di 2 unità - Le intere è risolta -
 Il circuito equivalente della cella è il seguente:



$Z(j\omega_1)$ è immaginaria $\propto \omega_1$ è il punto dove le resistenze si annullano - Principio:

$$Z(j\omega_1) = jX = j\omega_1 L' \quad L' = \frac{X}{\omega_1}$$

(nota che L' può essere negativa) - Il ramo verticale oscilla ad ω_1 e pertanto ai terminali vedo l'impedenza $j\omega_1 L'$ - L'' rappresenta il filo all'infinito -

Botz Duffin hanno dimostrato che la mutua si può far sparire -

5- poli passivi lineari

Una funzione di trasferimento è il rapporto tra la trasformata di una grandezza di uscita divisa quella di una grandezza di ingresso. Si deve però mettere fronte ad una porta un generatore V_s e l'altra deve essere terminata in modo passivo. Talora tutte le considerazioni volte a pag. 35 su quale grandezza venga considerata eccitante o di ingresso, se la tensione o la corrente. Sempre e solo il denominatore rappresenta le risposte libere della rete. Nota che la descrizione totale di un n-bipo è data dalle [z] che compare nelle:

$$[V] = [z][I]$$

ma nella tecnica non è quasi necessaria la descrizione totale dell'n-bipo; tant'è vero che nella pratica un apparato elettronico è una rete chiusa con porte terminate in impedenze finite, per cui non ha interesse la [z], ma solo una funzione di trasferimento tra quelle porte terminazioni finite. Tale funzione è sempre relativa a terminazioni tipiche.

In genere una funzione di trasferimento si indica con $G(s)$; tuttavia si genera

- (1) - Tener presente però che una tale descrizione del sistema, in quanto parziale, può dare luogo a dispiaceri, come vedremo a proposito delle conversioni dei doppi bipoli (pag. 88).
 Tener presente inoltre che non si può dare una funzione di trasferimento in generale, ma solo in rapporto a terminazioni prefissate.

si prende in considerazione una $G(j\omega)$. D'altra parte è semplice passare da una rappresentazione all'altra. Si può scrivere:

$$G(j\omega) = |G| e^{-j\beta(\omega)}$$

$$|G| = e^{-\alpha(\omega)}$$

la costante:

$$g(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$$

si dice costante di trasduzione, α attenuazione e β fase. Si può prendere α in neper :

$$\alpha = -\ln |G| \quad \text{neper} \quad (N)$$

o in decibel :

$$\alpha = -20 \lg |G| \quad \text{db}$$

Si usano molte unità perché si ha una catena di doppi bipoli, l'attenuazione totale si ricava semplicemente; dato che risulta ovviamente (matematicamente in questo punto):

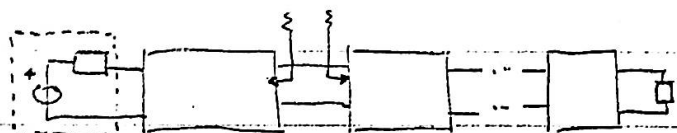
$$G(\omega) = G_1(\omega) G_2(\omega) G_3(\omega) \dots G_n(\omega)$$

e pertanto:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \quad \text{db} \quad (\text{o } N)$$

Inoltre, per gli apparati fisici ~~grossi~~ o vicini, i sensi hanno una sensibilità logaritmica, e pertanto l'uso delle unità logaritmiche è significativo al massimo [l'occhio, o l'orecchio, sono sensibili al logaritmo dello stimolo, e non allo stimolo]. Si dice che due frequenze sono distanti un'ottava quando l'una è il doppio dell'altra; si dice che sono distanti una decade se l'una è dieci volte l'altra.

I dispositivi elettronici in genere sono quadripoli messi l'uno in cascata all'altro e destinati alla elaborazione successiva di un segnale fornito da un



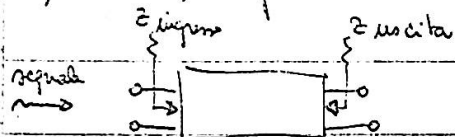
generatore reale all'ingresso.

Potremo definire due impe-

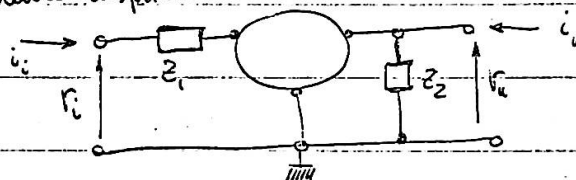
denze in ogni sezione: una

de una parte ed una dall'altra, e pertanto una impedenza di ingresso ed una di uscita. Nota che si deve sopprimere il segnale per fare la misura, cioè si deve cortocircuitare il generatore in ingresso (ideale) (*) [In pratica, anche per circuiti

attivi si trova sempre una impedenza d'ingresso, e non una tensione a vuoto equivalente].
In pratica si fa sempre in modo che ogni quadripolo abbia una impedenza di ingresso indipendente da ciò che è ritratto a valle, ed una impedenza di uscita assolutamente indipendente da ciò che è ritratto a monte. Si può realizzare questo, ad



esempio, con il seguente dispositivo:

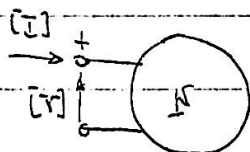


prendendo Z_1 molto elevata e Z_2 banissima ⁽¹⁾.

~~Problema~~ Si parla ^{sempre} di diminuzione di matrici $[Z]$, senza domandarci perché o se non sistemi; infatti in molti casi $[Z]$ non esiste, come nel caso del trasformatore ideale in cui non è possibile scrivere equazioni del tipo:

$$\begin{cases} I_1 = Z_{11} V_1 + Z_{12} V_2 \\ I_2 = Z_{21} V_1 + Z_{22} V_2 \end{cases}$$

Si può rappresentare un u-bipolo formalmente così (BELEWITCH):



Una rappresentazione che esiste quasi sempre (per il caso di linearità) è la seguente:

$$[A][V] = [B][I]$$

Infatti, il dispositivo è totalmente individuato da $[V]$ ed $[I]$, ovvero anche da:

$$[W] = [V, I] = [C][I]$$

dove $[V]$ ed $[I]$ non sono totalmente indipendenti, poiché il dispositivo impone vincoli lineari tra $[V]$ ed $[I]$, esprimibili così (se l'u-bipolo è passivo):

$$[K][W] = [0]$$

$[K]$ ha 2a colonna e la prima a sinistra:

$$[A, -B][W] = [0]$$

(1) - Infatti, dall'uscita si vede una impedenza:

$$Z_u = \frac{Z_2 Z_L}{Z_2 + Z_L} \approx \frac{Z_2 Z_L}{Z_L} \approx Z_2 \quad (\text{molto piccola})$$

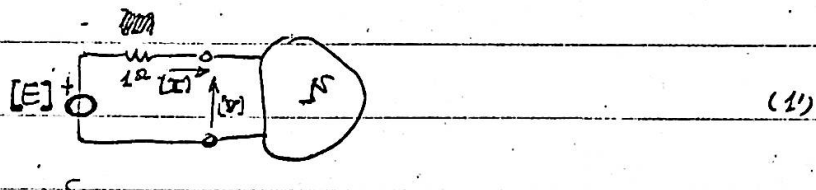
e dall'ingresso: ⁽²⁾

$$Z_i = Z_2 + Z_L' \approx Z_2 \quad (\text{molto grande})$$

da cui: ⁽¹⁾

$$[A][V] = [B][I] \quad (1)$$

occorre e basta che il n -bipolo sia lineare (anche vale la (1)). Ci limiteremo al caso in cui $[A]$ e $[B]$ sono matrici quadrate a n righe e n colonne ciascuna. Collegiamo l' n -bipolo a circuiti tipici con resistori unitari:



è molto verosimile che le costanti esistano (cioè che non rimetta che le costanti sono infinite o non definite) finché ci sono i resistori da 1 Ω e le tensioni $[E]$ finite. E sarà allora: ⁽²⁾

$$\begin{cases} [I] = [Y_a][E] & (2) \\ [V] = [E] - [I] & (3) \end{cases}$$

da cui:

$$[V] = [E] - [Y_a][E] \quad (4)$$

$$[V] = ([1] - [Y_a])[E] \quad (5)$$

dalla (2) e (5):

$$([1] - [Y_a])[I] = ([1] - [Y_a])[Y_a][E] \quad (6)$$

~~$$([1] - [Y_a])[I] = [Y_a]([1] - [Y_a])[E] \quad ([1] - [Y_a])[Y_a] = [Y_a]([1] - [Y_a])$$~~

$$([1] - [Y_a])[I] = [Y_a][V] \quad (7)$$

che confrontate con la (1) da ^(**)

$$[A] = [Y_a] \quad [B] = [1] - [Y_a] \quad (8)$$

da cui anche:

$$[A] + [B] = [1] \quad (9)$$

In generale

~~$$[V] = [Z][I]$$~~ si può scrivere: $[V] = [Z][I] \quad (10)$

solo se $[A]$ è non singolare, purché risulta:

$$[Z] = [A]^{-1}[B] \quad (11)$$

Dato che $[A]$ è funzione di s , si dice che è non singolare se ha determinante

(1) + Esempio ad esempio un doppio bipolo:

$$[A, -B][V, I] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_{11} & -b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{11}V_1 + a_{12}V_2 = b_{11}I_1 + b_{12}I_2 \\ a_{21}V_1 + a_{22}V_2 = b_{21}I_1 + b_{22}I_2 \end{cases} \Rightarrow [X][V] = [B][I]$$

(2) - La (3) segue dal fatto che i bipoli a monte dell' n -bipolo hanno la struttura indicata; la (2) segue dal fatto che i bipoli in questione sono chiusi ciascuno in modo passivo lineare, e soprattutto dal postulato che le costanti esistano.

mente non nullo salvo che in un numero discreto e finito di punti che fanno come
 l'uso. Analogamente per le:

$$[Y] = [B]^{-1} [A] \quad (1)$$

e $[B]$ deve essere non singolare perché esiste $[Y]$. Si vede che può esistere $[Z]$ ma non $[Y]$, e viceversa.
 Nel caso di un trasformatore ideale:

$$\begin{cases} V_1 - \mu V_2 = 0 \\ I_1 + \frac{1}{\mu} I_2 = 0 \end{cases} \quad [A][W] = \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Substituiamo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[A] + [B] = \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & -\frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ma $[A]$ e $[B]$ sono matrici singolari, cioè non esiste una rappresentazione in $[Z]$ o $[Y]$.
 Tornando ora alla situazione tipica di rete chiusa in resistenza di 1 Ω in serie ad un generatore,
 si definisce una matrice di diffusione o di scattering, che esiste quando esistono
 $[A]$ e $[B]$, cioè quasi sempre (eccetto in casi patologici), introducendo due
 ketoni di tensione incidente e riflessa:

$$[V_i] \quad [V_r] \quad (5)$$

nel seguente modo:

$$2[V_i] = [V] + [I] = [E] \quad 2[V_r] = [V] - [I] \quad (6)$$

Si vede che $[V_i]$ e $[V_r]$ sono legati a $[V]$ ed $[I]$ linearmente da una
 trasformazione non singolare, e pertanto è altrettanto lecito descrivere la rete per
 mezzo di essi. La relazione $[A][V] = [B][I]$ darà luogo ad una relazione del
 tipo:

$$[V_r] = [S][V_i] \quad (7)$$

dove la matrice $[S]$ si dice di diffusione normalizzata ad 1 (resistori di 1 Ω).

$[S]$ esiste sempre se c'è $[A]$ e $[B]$. Infatti:

$$2[V_i] = [V] + [I] \quad 2[V_r] = [V] - [I] \quad (8)$$

$$\begin{cases} [V_i] + [V_r] = [V] \\ [V_i] - [V_r] = [I] \end{cases} \quad [A][V_i] + [A][V_r] = [B][V_i] + [B][V_r] \quad (9)$$

da cui:

$$[B] - [A] [V^1] = [B] + [A] [V^2] \quad (1)$$

da cui:

$$[S] = [B] + [A]^{-1} [B] - [A] \quad (2)$$

ovvero, dato che:

$$[B] + [A] = [I] \quad (3)$$

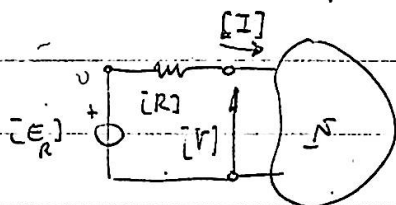
è:

$$[S] = [B] - [A] \quad (4)$$

che esiste sempre tutte le volte che esistono $[A]$ e $[B]$. E' anche:

$$[S] = [I] - 2 [Y_a] \quad (5)$$

Si definisce una matrice $[S_R]$ dello n -ipolo caricato su resistori $R^{(*)}$



da cui:

$$2[V_R] = [V_R] + [R][I_R] = [E_R] \quad (6)$$

$$2[V_R] = [V_R] - [R][I_R] \quad (7)$$

procedendo nello stesso modo:

$$[V_R^2] = [S_R][V_R^1] \quad (8)$$

(matrice di scattering relativa al riferimento $[R]$). $[R]$ è una matrice diagonale $n \times n$, dove sulle diagonali ci sono le resistenze messe in serie a ciascuna porta.

Per la descrizione di N basta dare $[S]$, oppure le coppie $[R]$ ed $[S_R]$. Si definisce ancora una matrice $[S_u]$ come segue $(**)$. Sia $[T]$ una matrice diagonale

$n \times n$, con sulle diagonali i rapporti di trasformazione di ogni trasformatore ideale alle porte. Troviamo dare

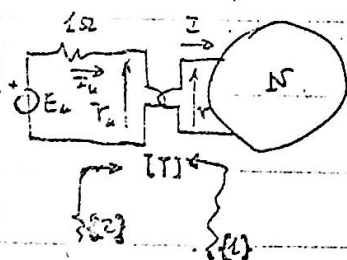
a $[T]$ dei valori tali da vedere $[E_R]$ ed $[R]$

dalla sinistra $[1]$. $[S_u]$ è la matrice di scattering

di N visto dalla regione $[2]$. Rimette:

$$[V_u] = [T][V] \quad [T][I_u] = [I] \quad (9)$$

È il verso nella seconda comparsa perché le correnti sono non tutte entranti nel trasformatore.



~~Resistenza equivalente~~

$$[E_u] = [T][E_R] \quad (1)$$

da cui $[E_u]$ (f.e.m. normalizzate) Resistenza equivalente; basterà che sia:

$$[V] = -[R][I] \quad \text{per } [E_u] \text{ cortocircuitato:} \quad (2)$$

$$[V] = [T]^{-1}[V_u] = -[R][I] = -[R][T][I_u] \quad (3)$$

ma in tal caso: $[V_u] = -[R][I_u]$, pertanto:

$$[T]^{-1} = [R][T] \quad (4)$$

$$\text{da cui:} \quad [R] = [T]^{-1}[T]^{-1} \quad (5)$$

$$\text{Quindi: } R_{ii} = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_{ii}}\right)^2}, \text{ da cui:}$$

$$T_{ii} = \frac{1}{\sqrt{R_{ii}}} \quad (6)$$

da cui è determinata la $[T]$. Pertanto:

$$E_{ui} = \frac{1}{\sqrt{R_{ii}}} E_{Ri} \quad (7)$$

e analogamente in tensione:

$$V_{ui} = \frac{\sqrt{I_i}}{\sqrt{R_{ii}}} \quad I_{ui} = \sqrt{R_{ii}} I_{Ri} \quad (8)$$

Pertanto la matrice di scattering segue:

$$\left. \begin{aligned} 2[V_{u1}^i] &= [V_u] + [I_u] = [E_u] \\ 2[V_{u2}^i] &= [V_u] = [I_u] \end{aligned} \right\} \Rightarrow [V_u^i] = [S_u][V_u^i] \quad (9)$$

Se ho un n -bipo e lo voglio chiudere nelle terminazioni $[R]$ posso utilizzare lo schema coi trasformatori, ovvero posso descrivere l' n -bipo preceduto dai trasformatori con la matrice di scattering $[S_u]$, nel mio complesso. (Occorre anche assegnare $[R]$) - $[S_u]$ si dice matrice di diffusione rispetto alle terminazioni $[R]$. Non è più generale semplice avere la matrice $[S]$ relative ad un riferimento ad una $[S]$ relative ad un altro riferimento.

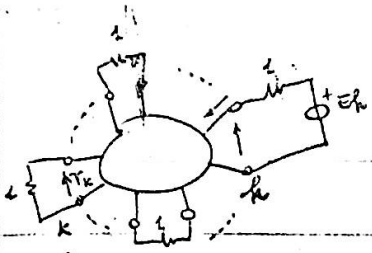
Vediamo il significato fisico di un termine generico di $[S]$; risulta:

$$[V^i] = [S][V^i] \quad V_k^i = \sum_j S_{kj} V_j^i \quad ; \text{ poichè } V_j^i = 0 \quad j \neq k \Rightarrow S_{kh} = \frac{V_k^i}{V_h^i} \quad (k \neq h)$$

Se è $V_j^i = 0 = \frac{E_j}{2}$ $j \neq h$, c'è un generatore solo sulla porta h , ed è $V_h^i = \frac{E_h}{2}$; Per tutte le altre porte non c'è generatore, in particolare per la porta k :

$$2V_k^i = V_k - I_k = 2V_k \quad (V_k = E_k - I_k = -I_k)$$

In definitiva:



$$(k \neq h) \quad S_{kh} = \frac{V_{ok}^2}{V_h^2} \quad (1) \quad (k \neq h) \quad S_{kh} = 2 \frac{V_k}{E_h} \quad (2)$$

In fatti, ~~possiamo~~ pote sulle tutte le $V_i^i = 0$ per $i \neq h$, e le tensioni incidenti V_i^i sono le p.c.m.: $E_i/2$; cioè ho terminato l' n -bipolo in resistori unitari, e solo sulle h -esime pote ho messo pure $E_h = 2V_h^i$; V_k^2 è la tensione sulle porta k , perché sulle porta k -esime non c'è il generatore E_k . pertanto S_{kh} ha un significato fisico ben preciso⁽¹⁾. Pertanto per una rete di bipoli [S] è simmetrica (come [z] ed [y], quando esistono) per il teorema di reciprocità^(*) S_{kh} non ha pli nell'asse passivario (per reti RLC), e quindi [S] stessa non ha pli nell'asse passivario. Infatti ~~un~~ un n -bipolo terminato in resistori non può avere oscillazioni che non si smorzano nel tempo.

Vediamo che cosa impie la passività del dispositivo. Abbiamo visto che per un bipolo passivo è:

$$W = \int_{-\infty}^t r(z) i(z) dz \geq 0 \quad \forall t \quad (3)$$

prendiamo una tensione del tipo: $v = V e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\sigma_0 > 0$ (4)

e sarà (dato che $\sigma_0 > 0$): $i = I e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \psi)$ (5)

ed è pertanto:

$$W = VI \int_{-\infty}^t e^{2\sigma_0 z} \cos(\omega_0 z + \varphi) \cos(\omega_0 z + \psi) dz \quad (6)$$

Scriviamo la potenza ~~come segue:~~ come segue:

$$\dot{v} = V e^{j\varphi} \quad \dot{i} = I e^{j\psi} \quad \rho_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \quad (7)$$

$$v = \text{Re} [\dot{v} e^{\rho_0 t}] \quad i = \text{Re} [\dot{i} e^{\rho_0 t}] \quad (8)$$

$$v = \frac{\dot{v} e^{\rho_0 t} + \dot{v}^* (e^{\rho_0 t})^*}{2} \quad i = \frac{\dot{i} e^{\rho_0 t} + \dot{i}^* (e^{\rho_0 t})^*}{2} \quad (9)$$

(1) - È precisamente il doppio dell'attenuazione, nel collegamento tipico in cui è definita [S], per $k \neq h$.

e quindi:

t

$$W = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^t \dot{V} \dot{I} (e^{2\sigma_0 t})^2 + [\dot{V} \dot{I}^* + \dot{V}^* \dot{I}] (e^{1\sigma_0 t}) (e^{2\sigma_0 t})^* + \dot{V}^* \dot{I}^* (e^{1\sigma_0 t})^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\dot{V} \dot{I}^* + \dot{V}^* \dot{I}}{2} e^{2\sigma_0 t} + \frac{\dot{V} \dot{I} e^{2\sigma_0 t} + \dot{V}^* \dot{I}^* (e^{2\sigma_0 t})^*}{2} \right\} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \left\{ e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re}[\dot{V}^* \dot{I}] + \operatorname{Re}[\dot{V} \dot{I} e^{2\sigma_0 t}] \right\} dt \geq 0 \quad (1)$$

quindi deve essere:

$$\operatorname{Re}[\dot{V}^* \dot{I}] \geq 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{Re}[\dot{V}^* \dot{V}] \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}[\dot{V}] \geq 0 \quad (3)$$

cioè nell'asse immaginario la potenza attiva non può essere negativa. Se consideriamo un μ-bipolo con ingressi a tutte le porte vien fuori che deve essere:

$$\operatorname{Re}[\tilde{V}^* \tilde{I}] \geq 0 \quad (4)$$

Dalle (3) segue che $\dot{V}$ deve essere reale e positiva. Dalla (4):

$$\operatorname{Re}[\tilde{V}^* [\dot{V}] \tilde{V}] \geq 0 \quad (5)$$

segue che $[\dot{V}]$ deve essere reale e positiva. Se ci mettiamo le matrici di diffusione:

$$\operatorname{Re}[\tilde{V}^* ([1_n] - [\tilde{S}]^* [\tilde{S}]) \tilde{V}] \geq 0 \quad (6)$$

Infatti Supponiamo che ad ogni porta del μ-bipolo vi sia una tensione del tipo (4) di pg. precedente; e ad ogni porta passi del tipo (5) della stessa pagina:

$$v_i(t) = |V_i| e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \quad ; \quad i_c(t) = |I_i| e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \psi_i) \quad (7)$$

La potenza in gioco ad ogni porta è pertanto (vedere la (1)):

$$p_i(t) = \frac{1}{2} e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re}[\dot{V}_i^* \dot{I}_i] + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{V}_i \dot{I}_i e^{2\sigma_0 t}] \quad (8)$$

e la potenza totale è la somma delle $p_i(t)$:

$$p(t) = \sum_i p_i(t) \quad (10)$$

(1) - Segue dalla (1) l'espressione della potenza istantanea in un bipolo nelle citate a righe precedenti:

$$p(t) = \frac{1}{2} e^{2\sigma_0 t} |V_0| |I_0| \left\{ \cos(2\omega_0 t + \varphi + \psi) + \cos(\psi - \varphi) \right\} \quad (11)$$

Notare che è necessario che sia una corrente crescente, perché in caso contrario non si potrebbe parlare di regime.

Si può quindi scrivere, come subito si verifica:

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}^*] [I] \} + \frac{1}{2} e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}] [I] e^{j2\omega_0 t} \} \quad (1)$$

Prendendo $[\widetilde{V}]$ ed $[I]$ le matrici colonna (o vettori) delle tensioni e delle correnti alle porte. In (1) si deve ora integrare da $-\infty$ all'istante generico t :

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}^*] [I] \} \int_{-\infty}^t e^{2\sigma_0 \tau} d\tau + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^t [\widetilde{V}] [I] e^{2\sigma_0 \tau} e^{j2\omega_0 \tau} d\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}^*] [I] \} \frac{e^{2\sigma_0 t}}{2\sigma_0} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ [\widetilde{V}] [I] \frac{e^{2\sigma_0 t}}{2\sigma_0} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\sigma_0} e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}^*] [I] \} + \frac{1}{4} e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re} \left\{ [\widetilde{V}] [I] \frac{e^{j2\omega_0 t}}{\sigma_0} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\sigma_0} e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}^*] [I] \} + \frac{1}{4} e^{2\sigma_0 t} \frac{|[\widetilde{V}] [I]|}{|\sigma_0|} \cos(2\omega_0 t + \vartheta) \geq 0 \quad \forall t \quad (2) \end{aligned}$$

essendo:

$$\vartheta = \arg \{ [\widetilde{V}] [I] \} - \arg \{ \sigma_0 \} \quad (3)$$

Consideriamo ora il caso in cui sia $\omega_0 = 0$ ($\sigma_0 > 0$):

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{4\sigma_0} e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}^*] [I] \} + \frac{1}{4} e^{2\sigma_0 t} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}] [I] \} \frac{1}{\sigma_0} = \\ &= \frac{e^{2\sigma_0 t}}{4\sigma_0} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}^*] + [\widetilde{V}] \} [I] = \frac{e^{2\sigma_0 t}}{4\sigma_0} \operatorname{Re} \{ 2 \operatorname{Re} [\widetilde{V}] \} [I] = \\ &= \frac{e^{2\sigma_0 t}}{4\sigma_0} \cdot 2 (\operatorname{Re} [\widetilde{V}]) (\operatorname{Re} [I]) \geq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Ora, risulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ [\widetilde{V}^*] [I] \} &= (\operatorname{Re} [\widetilde{V}^*]) (\operatorname{Re} [I]) - (\operatorname{Im} [\widetilde{V}^*]) (\operatorname{Im} [I]) = \\ &= (\operatorname{Re} [\widetilde{V}]) (\operatorname{Re} [I]) + (\operatorname{Im} [\widetilde{V}]) (\operatorname{Im} [I]) \quad (5) \end{aligned}$$

in quanto è:

$$\operatorname{Re} [\widetilde{V}^*] = \operatorname{Re} [\widetilde{V}] \quad \operatorname{Im} [\widetilde{V}^*] = -\operatorname{Im} [\widetilde{V}] \quad (6)$$

Si vede quindi che il primo termine delle (5) di pg. precedente $\bar{e} \geq 0$ per la (4) della stessa pagina; analogamente si potrebbe dimostrare che anche il secondo termine $\bar{e}$ non negativo (il che è ovvio, in quanto $\bar{e}$ sempre arbitraria la nostra scelta della parte reale di una certa grandezza, invece che della sua parte immaginaria); pertanto una condizione necessaria alla fisica realizzabilità dello μ -bipolo è la seguente:

$$\operatorname{Re}\{\widetilde{V}^* [I]\} \geq 0 \quad (1)$$

Dalla (2) di pg. precedente si vede che anche nel caso ora $\omega_0 \neq 0$ ($\sigma_0 > 0$), la (1) è condizione necessaria alla fisica realizzabilità dell' μ -bipolo, in quanto se con non fosse ci sarebbero certamente degli istanti in cui $v(t) < 0$, dato l'aumento oscillante del secondo termine che vi compare.

La (1) si deve tradurre in una condizione necessaria da imporre alla matrice di scattering. Infatti è:

$$[V] = [Z] + [S] [V^i] \quad [I] = [Z] - [S] [V^i] \quad (2)$$

pertanto:

$$[\widetilde{V}] = [\widetilde{V}^i] [\widetilde{Z}] + [\widetilde{S}] [\widetilde{V}^i] = [\widetilde{V}^i] [\widetilde{Z}] + [\widetilde{S}] [\widetilde{V}^i] \quad (3)$$

$$\text{e quindi: } [\widetilde{V}^*] = [\widetilde{V}^{i*}] [\widetilde{Z}^* + [\widetilde{S}^*]] \quad (4)$$

Alora:

$$\begin{aligned} [\widetilde{V}^*] [I] &= [\widetilde{V}^{i*}] [\widetilde{Z}] + [\widetilde{S}^*] [\widetilde{V}^i] [\widetilde{Z}] - [\widetilde{S}^*] [\widetilde{V}^i] [\widetilde{S}] [\widetilde{V}^i] = \\ &= [\widetilde{V}^{i*}] [\widetilde{Z}] - [\widetilde{S}^*] [\widetilde{S}] [\widetilde{V}^i] + [\widetilde{V}^{i*}] [\widetilde{S}^*] [\widetilde{V}^i] \end{aligned} \quad (5)$$

Ora risulta:

$$\begin{aligned} [\widetilde{V}^{i*}] [\widetilde{S}^*] [\widetilde{V}^i] &= [\widetilde{V}^{i*}] [\widetilde{S}^*] [\widetilde{V}^i] = [\widetilde{V}^{i*}] [\widetilde{S}^*] [\widetilde{V}^i] = \\ &= - [\widetilde{V}^{i*}] [\widetilde{S}^*] [\widetilde{V}^i] \end{aligned} \quad (6)$$

essendo la quantità scritta puramente scalare.

Pertanto tale numero può essere solo un immaginario puro, e la sua parte reale è nulla; quindi la (1) di pg. precedente, tenuto conto delle (5) e (6) diventa:

$$\operatorname{Re} \{ [\tilde{v}^*] [C] - [C^*] [S] [\tilde{v}] \} \geq 0 \quad (1)$$

chiamo matrice di dissipazione la quantità:

$$[D] = [C] - [S^*] [S] \quad (2)$$

la (1) si scrive:

$$\operatorname{Re} \{ [\tilde{v}^*] [D] [\tilde{v}] \} \geq 0 \quad \forall [\tilde{v}] \quad (3)$$

Ora, data una matrice $[A]$, si può sempre scrivere:

$$[A] = \frac{1}{2} [\tilde{A}^* + \tilde{A}] + \frac{j}{2} [\tilde{A} - \tilde{A}^*] = [A_H] + [A_{SH}] \quad (4)$$

dove $[A_H]$ è la parte hermitiana di $[A]$, ed $[A_{SH}]$ è la parte semihermitiana di $[A]$. $[A] - [A]$ è una matrice hermitiana pura e solo se $[A_{SH}] = [0]$, cioè se è:

$$[A] = [\tilde{A}^*] \quad (5)$$

Data la matrice colonna $[x]$, si dice che $[A]$ è semidefinita positiva se risulta:

$$\operatorname{Re} \{ [\tilde{x}^*] [A] [x] \} \geq 0 \quad \forall [x] \quad (6)$$

è invece definita positiva se è:

$$\operatorname{Re} \{ [\tilde{x}^*] [A] [x] \} > 0 \quad \forall [x] \quad (7)$$

Pertanto la condizione (3) di fisica realizzabilità per un n-bipo lineare si esprime dicendo che la ^{parte hermitiana della} matrice di dissipazione è semidefinita positiva. Rimette inoltre:

$$[\tilde{D}^*] = [C] - [\tilde{S}]^* [\tilde{S}]^* = [C] - [\tilde{S}^*] [S] = [D] \quad (8)$$

Quindi $[D]$ è hermitiana, e pertanto coincide con la sua parte hermitiana.

Analogamente, se esiste una (9) tale che:

$$[I] = [Y] [V] \quad (9)$$

La (1) di pg. 80 assume la forma:

$$\operatorname{Re} \{ [\tilde{v}^*] [Y] [v] \} \geq 0 \quad (10)$$

$$= \text{Re} \left\{ \widetilde{C^*}^T (Y_*) (C^*) \right\} \geq 0 \quad (1)$$

~~Comandante do 1º Batalhão de Polícia Militar~~ qualquer p. 22

Si può dimostrare che una matrice ^{simmetrica} A è ^{in una certa regione} $\pm$ semidefinita $\pm$ definita se e solo se i suoi ^{principali} n ^{abbiano parte reale} $\pm$ ^{in tale regione} $\pm$ ^{non} negativi, intendendosi per ^{principali} n ^{principali} quelli formati con elementi ^{simmetrici} rispetto alla diagonale principale; ad esempio:

per minore principale di $(Y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$ (2)

Se l'u-biplo è reciproco (il che accade se è una rete di bipoli lineari passivi), la Y_{ij} è simmetrica, pertanto è:

$$[Y] = [\tilde{Y}] \quad (3)$$

1/2 cu.

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{2} [\bar{Y}^* + \bar{Y}] = \frac{1}{2} [\bar{Y}^* + \bar{Y}] = \frac{2}{2} \bar{Y} \quad (4)$$

$$[Y_H] = \mathbb{R}_L[Y] \quad (\forall \epsilon_0 > 0 \Leftrightarrow G > 0) \quad (5)$$

L (5) significa che i minori principali di (4) devono avere parte reale $\neq$ non negativa nel semipiano destro del piano complesso. In particolare $y_{11}, y_{22}, y_{33}, \dots$ devono essere funzioni reali positive (non è detto che lo siano le y_{ij} con $i \neq j$): sono autoimmiettenze! Per un bipo tutte le matrici di cui sopra si riducono ad un elemento solo. Ed è ancora valida la (3) ovviamente; pertanto deve essere:

$$Y_4 = R_2 \{Y\} \geq 0 \quad (\forall g > 0 \Leftrightarrow G > 0) \quad (6)$$

che è la condizione di Brune:

(1) - Ovviamente a noi interessa che ciò accada per $\varepsilon_0 > 0$, cioè nel semipiano destro del piano complesso -

e per le (13): $[Y_H] = 0$ calcolate nell'asse immaginario. Se la rete è reciproca (il che accade sempre se la rete è bi-poli):

$$\sum_k V_k' I_k'' = \sum_k V_k'' I_k'$$

risulta:

$$[\tilde{S}] = [S]$$

perché (S) è ^{in tal caso simmetrica} ~~antisimmetrica~~, come subito si verifica ricordando la (2) di pag. 77 -

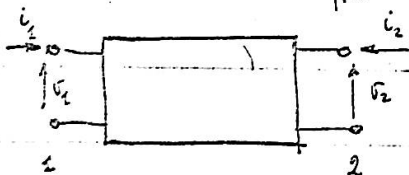
Dato che i poli di una matrice $[Y]$ o $[Z]$ rappresentano le frequenze libere delle reti, allora ancora molte proprietà che si erano trovate per i poli delle autosimmette = $[Z]$ (ad esempio i poli all'infinito etc), valgono per i poli di $[Y]$ e $[Z]$.

Si possono anche matrici ibride; ripartendo le porte in due gruppi e costruendo due matrici colonna ~~spesso~~ con le tensioni delle porte del primo gruppo la prima, e con le correnti delle porte del secondo gruppo la seconda, ~~ma~~ si fanno due altri vettori con le rimanenti grandezze; la matrice $[H]$ che lega tali vettori si dice ibrida.

Se dividiamo a metà le porte, la matrice di trasferimento (o catene) ^{è quella} che lega tensioni e correnti alle prime porte con tensioni e correnti alle seconde porte.

Doppi bipoli

Si danno varie rappresentazioni:



$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1^2 = S_{11} V_1^i + S_{12} V_2^i \\ V_2^2 = S_{21} V_1^i + S_{22} V_2^i \end{cases}$$

etc. Il passaggio da una forma di rappresentazione ad un'altra si deve saper fare, e non è più problema se le matrici (Z) etc. sono non singolari.

Altre rappresentazioni (ibride):

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases} \quad (1)$$

e infine le rappresentazioni catene:

$$\begin{cases} V_1 = A V_2 - B I_2 \\ I_1 = C V_2 - D I_2 \end{cases} \quad (2)$$

In genere è comodo passare da una rappresentazione all'altra interpretando fisicamente ogni termine che compare nella matrice. Ad esempio, h_{12} è V_1/V_2 quando $I_1 = 0$; e pertanto $h_{12} = A - \frac{BC}{D}$ come si vede subito riprendendo le medesime condizioni nella (2). Analogamente si devono saper riprendere le condizioni di reciprocità, fa il che basta ricordare che in tal caso $z_{12} = z_{21}$, da cui, seguendo lo stesso procedimento indicato sopra, si trovano le condizioni di reciprocità anche per le altre rappresentazioni. Se ~~anche~~ i dolci bipoli non sono inerti, come si mostrava prima, basta aggiungere dei termini noti nelle equazioni già scritte. Se ci sono dei generatori filotati, i termini noti non ci sono, purché tali bipoli sono inerti, anche se non passivi.

Per passare dalla matrice (1) ad una qualunque altra rappresentazione non si può far altro che esprimere $[V_2]$ e $[I_2]$ in funzione di $[V]$ ed $[I]$, e si opera con considerazioni fisiche come al solito. Rimette:

$$2 [V_2] = [V] + [I]$$

$$2 [I_2] = [V] - [I]$$

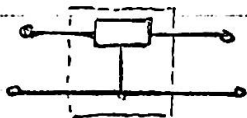
per cui:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (V_1 + I_1) = \frac{1}{2} S_{11} (V_1 - I_1) + \frac{1}{2} S_{12} (V_2 - I_2) \\ \frac{1}{2} (V_2 + I_2) = \frac{1}{2} S_{21} (V_1 - I_1) + \frac{1}{2} S_{22} (V_2 - I_2) \end{cases}$$

da cui:

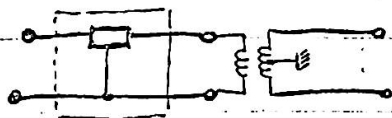
$$\begin{cases} V_1 (1 - S_{11}) - S_{12} V_2 = - [(1 + S_{11}) I_1 + S_{12} I_2] \\ - S_{21} V_1 + (1 - S_{22}) V_2 = - [S_{21} I_1 + (1 + S_{22}) I_2] \end{cases}$$

vicina non è più bilanciata, quindi bisogna schemarli etc. Per questo motivo sono circuiti che si evitano. Circuito tipicamente sbilanciato è il seguente bipolo:



(1)

Se facciamo il dispositivo:



(2)

il doppio bipolo è bilanciato, e l'uscita è bilanciata.

In generale, se un doppio bipolo è lineare, risulta ($\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$):

$$Z_{11} = Z_{1V} \quad Y_{11} = Y_{1C} = \frac{1}{Z_{1C}} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} \quad (3)$$

$$Z_{22} = Z_{2V} \quad Y_{22} = Y_{2C} = \frac{1}{Z_{2C}} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \quad (4)$$

e quindi, in generale, per un doppio bipolo anche non reciproco, purché dotato di una [Z]:

$$\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}} = \frac{Z_{2V}}{Z_{1V}} \quad \boxed{\frac{Z_{1V}}{Z_{1C}} = \frac{Z_{2V}}{Z_{2C}}} \quad (5)$$

cioè il rapporto delle impedenze in corto ed impedenze a vuoto è costante.

Per un doppio bipolo (una grande rete etc.) c'è il problema di determinare i parametri con esperienze bipolari; ^{contali esperienze} possiamo misurare Z_{1V} , Z_{1C} , Z_{2V} e Z_{2C} , di cui una è sovabbondante ^{per la (5)}. Risultato allora:

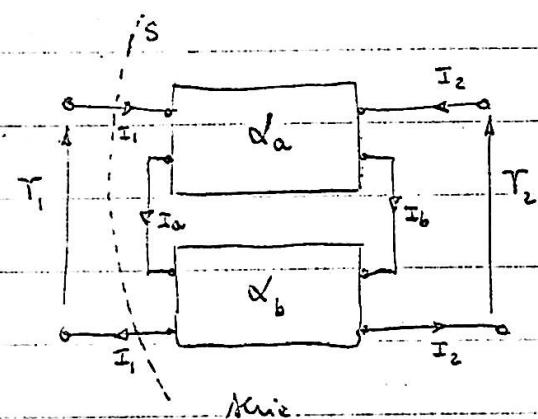
$$Z_{11} = Z_{1C} \quad Z_{22} = \frac{4Z}{Z_{1C}} \quad Z_{12}Z_{21} = Z_{2V}(Z_{1V} - Z_{1C})$$

Se il doppio bipolo è reciproco è fatto: $Z_{12} = \pm \sqrt{Z_{2V}(Z_{1V} - Z_{1C})}$; il segno + o - non è possibile determinarlo ^{con esperienze bipolari} se non si sa la connessione interna. Se il doppio

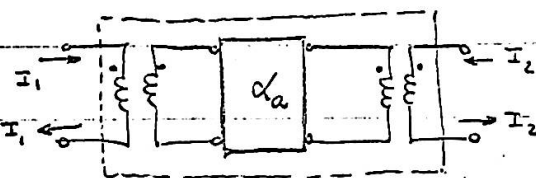
bipolo non è reciproco non c'è niente da fare; e questo è ovvio, perché con esperienze bipolari possiamo determinare solo 3 parametri indipendenti.

Le connessioni dei doppi bipoli più, in generale far cambiare i parametri dei doppi bipoli connessi. Ad esempio per due doppi bipoli connessi in serie le connessioni

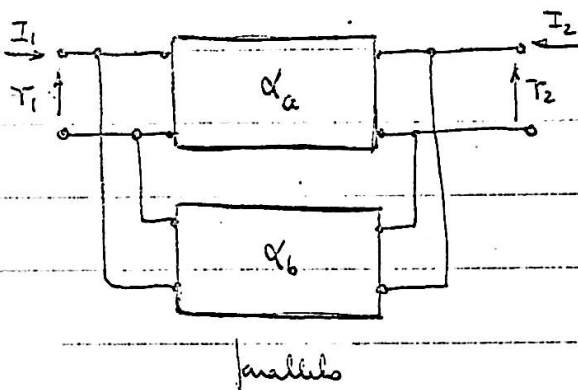
che entra da una porta dell'uno non è detto che sia uguale fra due modelli. Quindi i parametri di quel doppio bipolo non possono finire a niente; se però si conosce la matrice completa del quadrupolo, allora non rimettere tutto a posto. Se i doppi bipoli sono accoppiati con trasformatori la conversione è sempre possibile:



possibile:

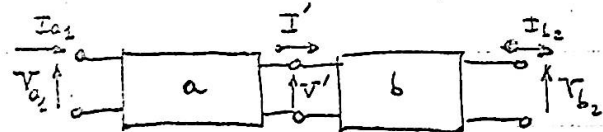


(1)



Se consideriamo infatti la conversione più facile, siamo vicini, considerando la superficie S , che le correnti entranti alle porte 1 sono uguali a quelle uscenti; ma non c'è alcunché che ci possa assicurare che I_2 è uguale ad I_{1a} , a meno che i due quadrupoli siano del tipo (1). Quindi, per trovare i parametri del quadrupolo serie, bisogna utilizzare i parametri dei quadrupoli componenti solo se abbiamo le misure che sia $I_2 = I_{1a}$ e $I_2 = I_{1b}$. Analogamente in altre conversioni.

Le conversioni fra cui alcune grandezze di ingresso (tensioni o correnti) e di uscita dei due o più doppi bipoli convergono vengono a coincidere; in tali casi è conveniente esprimere i doppi bipoli mediante matrici colonne che contengano le grandezze messe in comune. Ad esempio, per due doppi bipoli messi in cascata (in tal caso è sempre lecito usare le espressioni polari dei doppi bipoli) è:



$$\begin{bmatrix} V_{a1} \\ I_{a1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a2} \\ I_{a2} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{b1} \\ I_{b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b2} \\ I_{b2} \end{bmatrix}$$

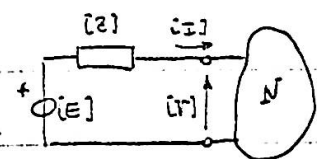
dato che è: $\begin{bmatrix} V_{b1} \\ I_{b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a2} \\ I_{a2} \end{bmatrix}$ risulta:

$$\begin{bmatrix} V_{a1} \\ I_{a1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b2} \\ I_{b2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Nota bene i segni delle correnti, che non sono i polari.

Matrice di scattering normalizzata a Z_0 . Consideriamo la situazione tipica sotto indicata. Consideriamo la matrice $[S_u]$; le grandezze che interviengono le scriveremo tutte minuscole, per non scriver sempre l'indice u . (Tener presente che a frequenze finite $\sqrt{Z}$ ha senso, mentre non avrebbe senso in generale, essendo una funzione irrazionale).

le]. Rimetta analogamente a quel che rimetteva a pag. 75:



$$\begin{aligned} [S_u] &= [S] \cdot [V_u] [V] \cdot [I_u] \equiv [I] \\ [V_u] &= [V^i]; [V_u^e] = [V^e]; \text{ etc. } \end{aligned}$$

$$V_k = \frac{V_k}{\sqrt{Z_k}} \quad I_k = \sqrt{Z_k} I_k \quad \rho_k = \frac{E_k}{\sqrt{Z_k}} \quad (1)$$

$$V_k^i = \frac{V_k^i}{\sqrt{Z_k}} \quad V_k^e = \frac{V_k^e}{\sqrt{Z_k}} \quad (2)$$

$$2[V^i] = [V] + [V] = [V] \quad 2[V^e] = [V] - [V] \quad [V^e] = [I][V^i] \quad (3)$$

costruiamo matrice in relazione $[Z]$ con $[I]$; definiamo una $[Z]$ tale che:

$$[V] = [Z][I] \quad (4)$$

ma $[I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_1}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/\sqrt{Z_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{Z_3} & \dots \end{bmatrix}$; allora possiamo scrivere:

$$[V] = [Z][I] \quad [I] = [I][I] \quad (5)$$

da cui:

$$[V] = [Z][I] = [Z][I][I] = [I]^{-1}[V] \quad [V] = [I][Z][I][I] \quad (6)$$

e quindi:

$$[Z] = [I][Z][I] \quad (7)$$

o anche:

$$[Z] = [I]^{-1}[Z][I]^{-1} \quad (8)$$

quindi note le terminazioni e $[Z]$ determinato da $[V] = [Z][I]$, è nota $[Z]$ che determina

$$[V] = [Z][I]. \text{ Ora risulta:}$$

$$2[V^i] = ([Z] + [I])[I] \quad 2[V^e] = ([Z] - [I])[I] \quad (9)$$

da cui:

$$[V^e] = ([Z] - [I])([Z] + [I])^{-1}[V^i] \quad (10)$$

e quindi:

$$[I] = ([Z] - [I])([Z] + [I])^{-1} \quad (11)$$

E fattorare la relazione inversa:

$$[V] = [V^i] + [V^e] = ([I] + [I])[V^i] \quad (12)$$

$$[I] = ([I] - [I])[V^i] \quad (13)$$

(1) - Per un doppio bilico, come subito si verifica:

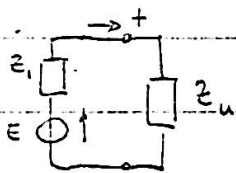
$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_1} & \frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \\ \frac{Z_{21}}{\sqrt{Z_1 Z_2}} & \frac{Z_{22}}{Z_2} \end{bmatrix} \quad [Z] = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_1} & \frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \\ \frac{Z_{21}}{\sqrt{Z_1 Z_2}} & \frac{Z_{22}}{Z_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

da cui:

$$[Z] = [C1] + [C1][C17 - C1]^{-1} \quad (1)$$

Condizioni di adattamento su base immagine

Cominciamo con il considerare l'adattamento di un ~~u-bipo~~ u-bipo su base immagine; tale adattamento si ha quando le terminazioni sono pure tali che, alimentando una porta alla volta, la tensione riflessa a quella porta è nulla^(*); ~~per un bipo Z_u , ad esempio risulta ($I_{11} = 0$):~~



$$Z_{11} = 1$$

$$Z_u = Z_1$$

(2)

Per un u-bipo in generale ne segue che gli elementi della diagonale principale di $[C1]$ devono essere tutti nulli, come subito si verifica^(*); $[C1]$ ovviamente è relativa a quella terminazione. Torna anche evidente che in genere l'adattamento su base immagine è valido ad una certa frequenza, ma non a tutte le frequenze^{come vedremo}; ~~l'adattamento su base immagine non deforma le forme d'onda di E~~

Ovviamente si dà una misura del non adattamento; esso risulta uguale a:

$$I_{11} = \frac{Z_{11} - 1}{Z_{11} + 1}$$

per un bipo:

$$I_{11} = \frac{Z_u - Z_1}{Z_u + Z_1}$$

(coefficiente di riflessione)

La potenza riflessa in condizioni generiche è, per un bipo:

$$P_A = \frac{E^2 |Z_u|}{|Z_u + Z_1|^2}$$

*) Torna evidente che è unica la terminazione della p-porta che rende (I_{11}) nulla ad ogni porta quando si alimenta da quella porta; mentre sarebbe sempre possibile, per una terminazione qualsiasi, trovare la terminazione di una porta per cui (I_{11}) è nulla a quella porta, ma se alimentato dalle altre porte non trova (I_{11}) nullo.

in condizioni di adattamento:

$$P_{A_i} = \frac{E^2}{4|Z_L|} \quad (Z_u = Z_L) \quad (1)$$

infatti:

$$\frac{P_A}{P_{A_i}} = \frac{4|Z_L||Z_u|}{|Z_L + Z_u|^2} = 1 - \Gamma_{LZ}^2 \quad (2)$$

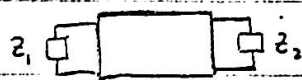
come subito si verifica. Si definisce fattore di trasmissione:

$$\sqrt{1 - \Gamma_{LZ}^2} = \frac{2\sqrt{|Z_L||Z_u|}}{|Z_L + Z_u|} \quad (3)$$

Consideriamo un doppio bipolo; deve essere adattato su base immagine:

$$\Gamma_{11} = 0 \quad \Gamma_{22} = 0 \quad (4)$$

Il doppio bipolo è reciproco inoltre:



$$[1] = \begin{bmatrix} 0 & 1_{12} \\ 1_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ovvero $\Gamma_{12} = e^{-\vartheta}$ (ϑ = spunto di trasduzione immagine). Rimette allora:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\vartheta} \\ e^{-\vartheta} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{-\vartheta} \\ e^{-\vartheta} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1 - e^{-2\vartheta}} = \frac{1}{1 - e^{-2\vartheta}} \begin{bmatrix} 1 + e^{-2\vartheta} & 2e^{-\vartheta} \\ 2e^{-\vartheta} & 1 + e^{-2\vartheta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

e quindi:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \coth \vartheta & \frac{1}{\sinh \vartheta} \\ \frac{1}{\sinh \vartheta} & \coth \vartheta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Re ϑ si dice attenuazione immagine, e Im ϑ rotazione immagine.

Rimette (doppio bipolo reciproco), dalla (11) di eq. 89:

$$[S] = \begin{bmatrix} Z_{11} - 1 & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{22} + 1 & -Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_{11} + 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}^2} \quad (\Delta Z = (Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}^2) \quad (8)$$

Perché il doppio bipolo sia adattato su base immagine deve essere, tanto per cominciare:

$$S_{11} = 0 \Rightarrow (Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}^2 = 0 \quad (9)$$

(1) - Dalla (7) segue:

$$Z_{11} = Z_1 \coth \vartheta = Z_{1V} \quad (10)$$

vedremo che $\bar{c}$ (17) di eq. 92):

$$Z_1 = \sqrt{Z_{1V} Z_{1C}} \quad (11)$$

da cui:

$$\boxed{\lg \vartheta = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{1V}}} = \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{2V}}}} \quad (12)$$

e ancora $S_{22} = 0 \Rightarrow (Z_{22} - 1)(Z_{11} + 1) - Z_c^2 = 0$ (1)

dalle quali, prendendo la differenza, segue:

~~quindi~~ (2)

~~quindi~~ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_{11}}{Z_{22}}$ (3)

sommando i due membri a membri (tenendo presente che $\Delta Z = \frac{\Delta Z}{Z_1 Z_2}$):

$Z_{11} Z_{22} - Z_c^2 - 1 = 0$ (4)

ossia $\Delta Z = 1$

e pertanto: $\frac{\Delta Z}{Z_1 Z_2} = 1$ $Z_1 Z_2 = \Delta Z$ (5)

Dalle (3) e (5) segue: (1)

$Z_1 = \sqrt{\frac{Z_{11} \Delta Z}{Z_{22}}}$ $Z_2 = \sqrt{\frac{Z_{22} \Delta Z}{Z_{11}}}$ (6)

o anche:

$Z_1 = \sqrt{Z_{1V} Z_{1C}}$ $Z_2 = \sqrt{Z_{2V} Z_{2C}}$ (7)

Calcoliamo S_{12} , segue mediante la (11) di pg. 89:

$e^{-\theta} = S_{12} = \frac{-(Z_{11} - 1)(Z_{12}) + Z_{12}(Z_{11} + 1)}{(Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_c^2} = \frac{2 Z_{12}}{\Delta Z + (Z_{11} + Z_{22}) + 1}$ (8)

e ancora, tenendo presenti le (6):

$S_{12} = e^{-\theta} = \frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_{11} Z_{22}} + \sqrt{\Delta Z}} = \frac{\frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_{11} Z_{22}}}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_{11} Z_{22}}}\right)^2}}$ (9)

da cui si può ricavare θ (vedere (12) di pg. 91 per una deduzione più rapida).

Notare che compaiono radici di impedenze; questo significa che ~~non~~ non è possibile in generale mettere alla pila una impedenza che non è una funzione razionale;

da ciò segue che in generale l'adattamento in base immagine di un doppio bipolo

(1) - se il doppio bipolo è simmetrico è $Z_{11} = Z_{22}$, e quindi $Z_1 = Z_2 = \sqrt{\Delta Z}$.

è possibile solo per una frequenza. Se il doppio bipolo fosse tutto resistivo allora sarebbe sempre possibile l'adattamento per base immaginaria. In genere le impedenze reali si approssimano con funzioni reali positive, e allora si può estendere il campo di frequenza in cui è possibile l'adattamento approssimato.

Risultato:

$$S_{21} = 2 \frac{V_2}{E} = e^{-\theta} = e^{-\alpha - j\beta} = e^{-\alpha} e^{-j\beta} \quad (1)$$

Per tanto $S_{11} = S_{22}$ è il doppio del guadagno di tensione del doppio bipolo. Pertanto è:

$$\theta = -\ln \left(2 \frac{V_2}{E} \right) = \alpha + j\beta \quad (2)$$

into $\frac{V_2}{E} = \left| \frac{V_2}{E} \right| e^{j\varphi}$ (3)

è: $\beta = -\varphi$ $\alpha = -\ln 2 \left| \frac{V_2}{E} \right|$ (4)

Risultato:

$$2[V^1] = [V]^T + [i] = [e]$$

$$2[V^2] = [V] - [i] \quad (1)$$

$$[V] = [V^1] + [V^2]$$

$$[i] = [V^1] - [V^2] \quad (2)$$

$$V_2 = V_2^2$$

$$V_2 = V_1^1$$

$$S_{21} = \frac{V_2^2}{V_1^1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \quad (3)$$

Denormalizziamo (3) (in condizioni di adattamento):

$$2[V^1] = [V] + [2][i] = [e]$$

$$2[V^2] = [V] - [2][i] \quad (4)$$

$$[V^2] = [e] - [2][i]$$

$$S_{21} = \frac{V_2^2}{V_1^1} = 2 \frac{V_2}{E} = \frac{V_2}{V_1} \quad (5)$$

Per tanto $S_{21} = e^{-\theta}$ è il guadagno di tensione in condizioni di adattamento più = magine. Posto $\theta = \alpha' + j\beta'$ e $\frac{V_2}{V_1} = \left| \frac{V_2}{V_1} \right| e^{j\varphi}$, risulta:

$$\alpha' = \ln \left| \frac{V_1}{V_2} \right| \quad \beta' = -\varphi \quad (6)$$

Se il sistema è reciproco $Z_1 = Z_2$, e quindi è:

$$S_{11} = S_{22} \quad (7)$$

La potenza all'entrata che entra nel doppio bipolo è $\frac{E^2}{4Z_1}$ e quella che ne esce è $\frac{V_2^2}{Z_2}$ o anche V_2^2/Z_2 , e anche in questo caso, se il doppio bipolo è reciproco, il rapporto tra le due potenze all'entrata è pari al quadrato di $2V_2/E$, e cioè in condizioni di adattamento:

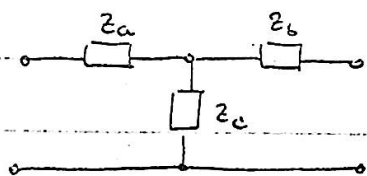
$$\frac{P_{Au}}{P_{Ai}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = |S_{21}|^2 \quad (1)$$

$$\alpha = \ln \left| \frac{1}{S_{21}} \right| \quad \alpha = \ln \frac{1}{|S_{21}|^2} = \ln \frac{P_{Ai}}{P_{Au}} \quad (2)$$

e si considera pure $\alpha_p = 2\alpha$, attenuazione di potenza.

Celle elementari

Celle a stella o a T:



$$Z_{11} = Z_a + Z_c \quad Z_{12} = Z_c \quad Z_{22} = Z_b + Z_c \quad (3)$$

relazioni facilmente invertibili, il che significa che, dato un doppio bipolo reciproco è possibile trovare il suo equivalente a T; la

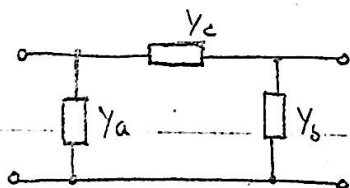
inversione delle (3), per metodo razionale, non è detto che dia luogo a Z_a

Z_b , Z_c fisicamente realizzabili, finché $\sqrt{\frac{Z_{11} - Z_{12}}{Z_{22} - Z_{12}}}$ ^{in tal caso dovrebbe} ~~essere~~ ^{essere} reale e positiva $Z_{12} = Z_c$

$Z_{11} - Z_{12} = Z_a$, e $Z_{22} - Z_{12} = Z_b$, e non c'è nessun teorema che imponga che ad esempio

$Z_{11} - Z_{12}$ sia reale e positiva; a frequenza fissa il problema ovviamente non si pone.

Celle a Π :

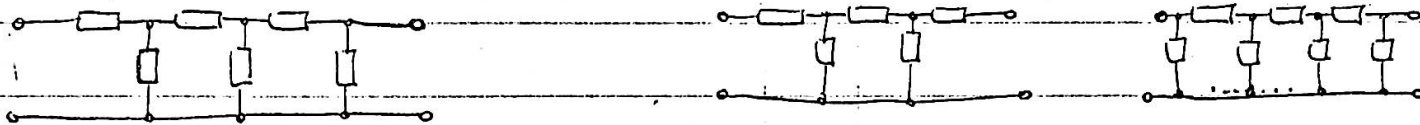


$$Y_{11} = Y_a + Y_c \quad Y_{12} = Y_c \quad Y_{22} = Y_b + Y_c$$

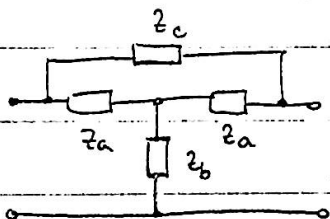
$$Y_a = Y_{11} - Y_{12} \quad Y_b = Y_{22} - Y_{12} \quad Y_c = Y_{12}$$

Tale lo stesso discorso di prima.

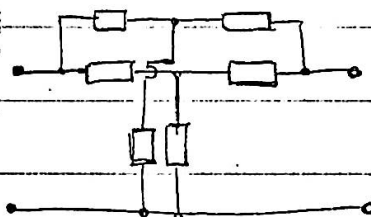
Doppi bipoli a scala:



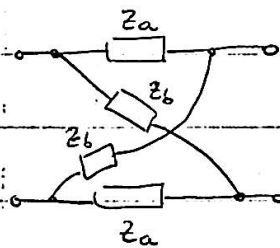
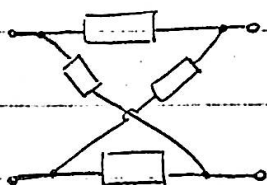
Cella a T composta:



Cella a doppio T (usato per filtri selettivi):



Doppio bipolo a traliccio (c'è un bipolo sovrabbondante e non simmetrico; se simmetrico allora va tutto bene):



Trattiamo il caso simmetrico:

$$Z_{11} = \frac{Z_a + Z_b}{2} = Z_{22}$$

$$Z_{12} = \frac{Z_b - Z_a}{2} = Z_{21}$$

o anche (per un'unica terminazione resistiva R_0):

$$Z_{11} = \frac{Z_a + Z_b}{2R_0} = Z_{22}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_b - Z_a}{2}$$

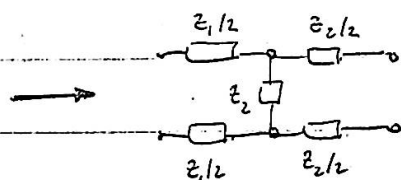
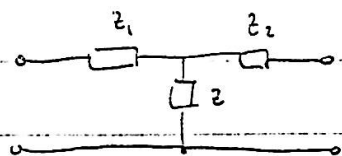
La matrice di diffusione diventa pertanto:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{Z_a + Z_b - 2R_0}{Z_a + Z_b + 2R_0} & \frac{Z_b - Z_a}{2 \frac{Z_a + Z_b}{2R_0} + 2\sqrt{\Delta^2}} \\ \frac{Z_b - Z_a}{2 \frac{Z_a + Z_b}{2R_0} + 2\sqrt{\Delta^2}} & \frac{Z_a + Z_b - 2R_0}{Z_a + Z_b + 2R_0} \end{bmatrix}$$

in definitiva:

$$S_{12} = S_{21} = \frac{(Z_b - Z_a) \cdot 4}{4Z_a Z_b + 4Z_a + 4Z_b + 4} = \frac{Z_b - Z_a}{Z_a Z_b + Z_a + Z_b + 1} ; S_{11} = S_{22} = \frac{Z_a + Z_b - 2R_0}{Z_a + Z_b + 2R_0} \quad (4)$$

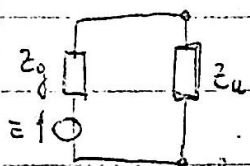
Se si vuole trasformare un circuito a T in un circuito bilanciato avente lo stesso comportamento si ~~può~~ ^{si può} le ~~z~~ ^z originali in due ~~z~~ ^z in serie ~~nel~~ ^{nel} ~~circuito~~ ^{circuito} riferire;



~~Questa trasformazione è~~

etc.

Adattamento energetico dei bipoli (a frequenza fissa).



Vogliamo trasmettere la massima potenza attiva dal generatore al carico Z_u ; troviamo:

$$Z_u = |Z_u| e^{j\varphi} \quad Z_g = |Z_g| e^{j\psi} \quad (2)$$

ed $\bar{c}$:

$$P = V I \cos \varphi$$

$$\text{cioè:} \quad P = |E|^2 \frac{|Z_u|^2}{|Z_u + Z_g|^2} \frac{1}{|Z_u|} \cos \varphi = |E|^2 \cos \varphi \frac{|Z_u|}{|Z_u|^2 + |Z_g|^2 + 2|Z_u||Z_g| \cos(\varphi - \psi)} \quad (3)$$

derivando:

$$\frac{\partial P}{\partial |Z_u|} = 0 \Rightarrow |Z_u|^2 - 2|Z_u|^2 + |Z_g|^2 = 0$$

e quindi:

$$|Z_u| = |Z_g| \quad (4)$$

A parità di angoli di fase delle impedenze, i moduli devono essere uguali. Lo adattamento energetico $Z_u = Z_g$ è un massimo relativo, finché $|Z_u| = |Z_g|$ in tal caso.

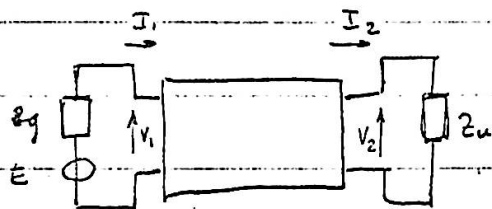
Sufficiente ora di avere Z_u e Z_g soddisfacenti la (4); si avrà ancora un massimo se le reattanze si compensano esattamente:

$$\varphi = -\psi$$

Come si potrebbe vedere anche facendo $\partial P / \partial (\varphi - \psi)$. L'adattamento minimo

$Z_u = Z_g$ non è un adattamento perfetto da punto punto di vista. Formalmente il carico è resistivo, e quindi i due adattamenti coincidono.

Parametri iterativi del doppio bipolo (a frequenza fissa).



Vogliamo trovare le condizioni di Z_u per cui l'impedenza di ingresso è Z_u . Tale valore di Z_u lo chiamiamo Z_{k1} = impedenza iterativa di ingresso. Quando si presentano due valori $\pm$

di una radice si mette il + tenendo presente che in realtà il segno va determinato riprendendo che la parte reale nell'impedenza sia [positiva]

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = Z_{k1} \quad \begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 - Z_{22}I_2 \end{cases} \Rightarrow Z_{k1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_{k1}} \quad (1)$$

si pone:

$$Z_{k1} = \frac{1}{2} \left[Z_{11} - Z_{22} \pm \sqrt{(Z_{11} - Z_{22})^2 + 4(Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2)} \right] \quad (2)$$

$$Z_{k1} = \frac{1}{2} \left[Z_{11} - Z_{22} \pm \sqrt{(Z_{11} + Z_{22})^2 \left[1 - \left(\frac{2Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22}} \right)^2 \right]} \right] \quad (3)$$

$$Z_{k1} = \frac{1}{2} \left[Z_{11} - Z_{22} \pm (Z_{11} + Z_{22}) \sqrt{1 - \left(\frac{2Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22}} \right)^2} \right] \quad (4)$$

Ci si può chiedere quale deve essere Z_g in modo che da 2 si veda una impedenza verso sinistra pari a $Z_g = Z_{k2}$:

$$Z_{k2} = \frac{1}{2} \left[Z_{22} - Z_{11} \pm (Z_{11} + Z_{22}) \sqrt{1 - \left(\frac{2Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22}} \right)^2} \right] \quad (5)$$

Si può dire che Z_{k1} , Z_{k2} ~~definiscono~~, con l'aggiunta di una costante di trasmissione iterativa, descrivono il doppio bipolo come le impedenze immaginarie. La costante di trasmissione iterativa è:

$$e^{-\gamma_{k2}} = \frac{V_2}{V_1} \quad (6)$$

in condizioni di adattamento iterativo:

$$e^{-\gamma_k} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{12} I_1 - Z_{22} I_2}{Z_{11} I_1 - Z_{21} I_2} = \frac{\frac{Z_{12}}{Z_{11}} Z_{12} - Z_{22}}{\frac{Z_{12}}{Z_{11}} Z_{11} - Z_{21}} = \frac{e^{-\gamma_k} Z_{12} - Z_{22}}{e^{-\gamma_k} Z_{11} - Z_{21}} \quad (1)$$

da cui:

$$\operatorname{Ch} \gamma_k = \frac{Z_{11} + Z_{22}}{2 Z_{12}} \quad (2)$$

e scambiando 1 con 2:

$$\operatorname{Ch} \gamma_k = \frac{Z_{22} + Z_{11}}{2 Z_{12}} = \operatorname{Ch} \gamma_k = \operatorname{Ch} \gamma_k \quad (3)$$

e risulta:

$$\operatorname{tanh} \gamma_k = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 \gamma_k}} \quad (\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1) \quad (4)$$

da cui:

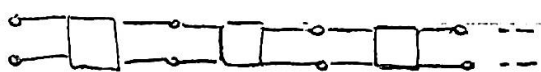
$$\operatorname{tanh} \gamma_k = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2 Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22}} \right)^2} \quad (5)$$

Notiamo che le relazioni trovate sono invertibili. Risultato:

$$Z_{k1} + Z_{k2} = (Z_{11} + Z_{22}) \operatorname{tanh} \gamma_k; \quad Z_{k1} - Z_{k2} = (Z_{11} - Z_{22}) \quad (6)$$

da cui immediatamente Z_{11} e Z_{22} ; dopodiché Z_{12} si trova dalla (5). Quindi anche coi parametri iterativi si può descrivere completamente un doppio bipolo.

Sull'analisi di avere una catena semi-definita di doppi bipoli tutti uguali. Rimuovo la impedenza di ingresso e trovo una certa Z ; tolgo il primo doppio bipolo e trovo ancora Z perché la catena è semi-definita; cioè a dire ogni doppio bipolo è in condizioni di adattamento iterativo⁽¹⁾; viceversa, una



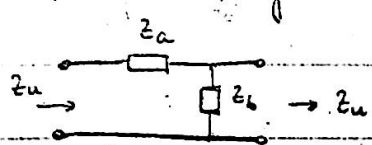
questo doppio bipolo adattato in modo iterativo si comporta come se fosse inserito

in una catena infinitamente lunga di

doppi bipoli. Ancora: dato un generatore che alimenta un certo carico, voglio chiudere l'uscita su tale impedenza ma con una tensione minore; questo si può fare con una cella a squadra adattata in modo iterativo dalle

(1) - Infatti l'impedenza vista da una porta è uguale a quella sulla quale è chiusa l'altra porta.

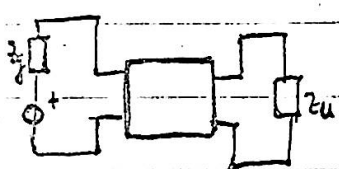
Porta di ingresso - limiti:



$$Z_{k1} = Z_a + \frac{Z_s Z_{k1}}{Z_s + Z_{k1}} \quad ; \quad \frac{V_u}{V_s} = \frac{\frac{Z_s Z_{k1}}{Z_s + Z_{k1}}}{Z_a + \frac{Z_s Z_{k1}}{Z_s + Z_{k1}}}$$

da cui Z_a e Z_b noto solo Z_{k1} e V_u .

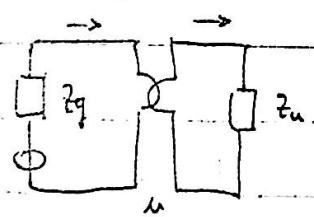
Poniamo ci sia il predomino polemico con un alternatore a spina, e vogliamo poi adattarla in base immaginaria da entrambi i lati. Questo polemo si può quando vogliamo adattare un generatore Z_g in un carico Z_u ($Z_g \neq Z_u$); si trova:



$$\begin{cases} Z_g = Z_a + \frac{Z_s Z_u}{Z_s + Z_u} \\ Z_u = \frac{Z_s (Z_a + Z_g)}{Z_s + Z_a + Z_g} \end{cases}$$

da cui facilmente Z_a e Z_b . Se Z_u e Z_g sono resistivi viene fuori che Z_a e Z_b sono reattivi, e quindi l'alternatore è zero; pertanto è sempre conveniente usare due poli componenti Z_a e Z_b invece di tre, anche se in questo modo non è possibile fissare arbitrariamente la costante di trasformazione immaginaria (l'adattamento si fa a frequenza fissa).

Adattamento con trasformatore (a tutte le frequenze).



Risulta nello schema a lato:

$$\frac{V_1}{V_2} = \mu \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\mu}$$

e quindi deve essere, perché il generatore sia adattato in base immaginaria:

$$Z_g = \frac{V_1}{I_1} = \mu^2 \frac{V_2}{I_2} = \mu^2 Z_u$$

da cui:

$$\mu = \sqrt{|Z_g| / |Z_u|}$$

ho realizzato un adattamento energetico parziale; se Z_1 e Z_2 sono distinti l'adattamento è in base minuzioso ed energetico perfetto.

Doppio b/clo simmetrico.

Limiti:

$$Z_{11} = Z_{22}$$

$$Z_{12} = Z_{21}$$

quindi le impedenze minuziose (nulla cambia o non cambia con z):

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_0 \quad (\text{impedenza caratteristica})$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_k \quad (\text{impedenza iterativa})$$

limiti più:

$$Z_0 = \sqrt{Z_v Z_c}$$

$$\lg h \vartheta = \sqrt{\frac{Z_c}{Z_v}}$$

In tal caso:

~~l'impedenza~~ $Z_k = \vartheta$, come si vede subito dalle formule relative a $\tanh \vartheta_k$ e

$\tanh \vartheta$.

limiti ancora:

$$Z_{11} = Z_0 \cosh \vartheta = Z_{22}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_0}{\sinh \vartheta}$$

Uguali invece:

$$V_1 = A V_2 + B I_2 \quad ; \quad I_1 = C V_2 + D I_2$$

suffiamo che è:

$$V_1 = Z_{11} I_1 - Z_{12} I_2 \quad ; \quad V_2 = Z_{12} I_1 - Z_{11} I_2$$

è:

$$A = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{I_2=0} = \frac{Z_{11}}{Z_{22}} = \cosh \vartheta \quad ; \quad B = \left(\frac{V_1}{I_2} \right)_{V_2=0} = \frac{Z_{11}^2}{Z_{12}} - Z_{12} = \frac{Z_0}{\sinh \vartheta} [\cosh^2 \vartheta - 1] = Z_0 \sinh \vartheta$$

$$C = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)_{V_2=0} = \frac{1}{Z_0} \sinh \vartheta$$

$$D = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)_{V_2=0} = \cosh \vartheta$$

quindi:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \cosh \vartheta + Z_0 I_2 \sinh \vartheta \\ I_1 = \frac{V_2}{Z_0} \sinh \vartheta + I_2 \cosh \vartheta \end{cases}$$

questa rappresentazione è particolarmente idonea alle linee (modo TEM). Infatti per una linea ~~da~~ risulta:

$$\begin{cases} V(x) = V_1' e^{-\gamma x} + V_2'' e^{\gamma x} \\ I(x) = \frac{V_1'}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{V_2''}{Z_0} e^{\gamma x} \end{cases}$$

imponiamo le condizioni al contorno:

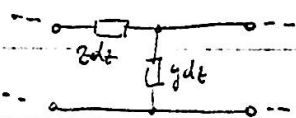
$$V(L) = V_2$$

$$I(L) = I_2$$

risulta:

$$\begin{cases} V_1(0) = V_2 \cosh \gamma L + Z_0 I_2 \sinh \gamma L \\ I_1(0) = \frac{V_2}{Z_0} \sinh \gamma L + I_2 \cosh \gamma L \end{cases}$$

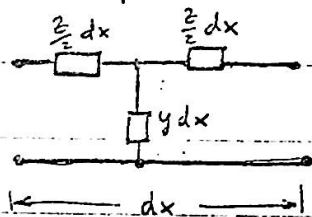
cioè: la costante di trasmissione immaginaria di una linea è γL ; l'impedenza caratteristica delle linee è l'impedenza ^{immaginaria} del doppio bipolo che è la linea nel suo complesso. Si può provare a descrivere la linea con una cella infinita prima e vedere se quello che trova:



$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

$$\gamma = \sqrt{ZY}$$

è compatibile con la $Z_0 = \sqrt{Z_c Z_v}$; $\gamma L d = \sqrt{\frac{Z_c}{Z_v}}$. Vediamo una cella del tipo indicato e analizziamo la linea infinita:



$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{Z_c Z_v} = \sqrt{\left[\frac{Z}{2} dx + \left(\frac{\frac{Z}{2} dx \cdot \frac{1}{Y dx}}{\frac{Z}{2} dx + \frac{1}{Y dx}} \right) \right] \left[\frac{Z}{2} dx + \frac{1}{Y dx} \right]} \\ &= \sqrt{\left(\frac{Z}{2} dx \right)^2 + \frac{Z}{Y}} \approx \sqrt{\frac{Z}{Y}} \end{aligned}$$

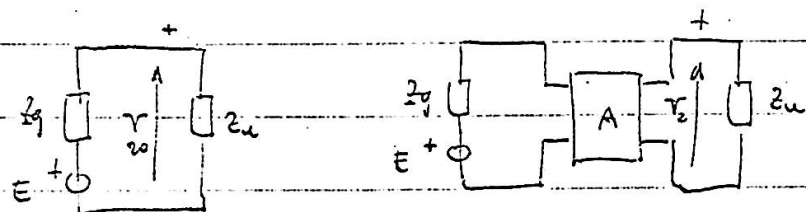
e analogamente:

$$\gamma L d = \sqrt{\frac{Z_c}{Z_v}} = dx \sqrt{ZY} \approx d(\gamma L) \Rightarrow \gamma = \sqrt{ZY}$$

Ne segue che la descrizione di una linea come una catena simmetrica di qua-

dupli è perfettamente lecito anche se è una rappresentazione astratta, che non ha un preciso riscontro fisico.

Fattore di riflessione



chiamiamo fattore di riflessione
dato ad x la costante:

$$k_i = \frac{V_2}{V_{20}} = \frac{V_2}{E} = \frac{1}{T_{10}} = \frac{1}{2} S_{21} \frac{Z_u + Z_g}{Z_u}$$

[1] si riferisce a quel doppio bipolo con quelle terminazioni. Supponiamo terminazioni
resistive, uguali fra di loro, e doppio bipolo reciproco. In tali condizioni:

$$Z_u = Z_g = R$$

$$k_i = S_{21}$$

esprimiamo k_i in funzione dei parametri immagine, cominciamo a mostrare
che uno stesso doppio bipolo con due diverse terminazioni, può far passare da
una (p) ad un'altra:



in generale:

$$[V_p^2] = [S_p] [V_p^1]$$

$$[V_p^2] = [S_p] [V_p^1]$$

ed è:

$$\begin{cases} [V] = [S] [V_p^1] + [P] [V_p^2] = ([1] + [S_p]) [V_p^1] \\ [I] = [P_p]^{-1} ([1] - [S_p]) [V_p^1] \end{cases} \quad \begin{cases} Z [V_p^2] = Z [S_p] [V_p^1] = [V] - [R] [I] \end{cases}$$

da cui:

$$Z [V_p^2] = Z [S_p] [V_p^1] = ([1] + [S_p]) [V_p^1] + [R] [P_p]^{-1} ([1] - [S_p]) [V_p^1] =$$

osservando:

$$= [S_p] ([1] + [S_p]) [V_p^1] + [R] [P_p]^{-1} ([1] - [S_p]) [V_p^1]$$

e quindi:

$$[S_P] = \left[[I] + [S_P] \right] - [R][P]^{-1} \left[[I] - [S_P] \right] \left[[I] + [S_P] + [P][P]^{-1} [I] - [S_P] \right]^{-1} \quad (2)$$

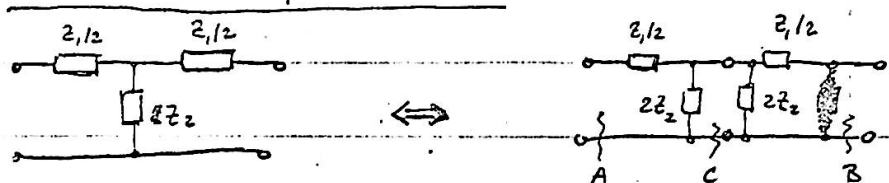
Infatti: $[P] = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (2)$

$$[S_P] = [S_0] \quad [S_R] = [S] \quad (3)$$

si trova:

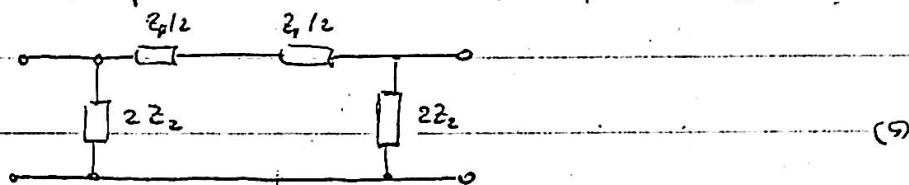
$$S_{21} = \frac{-\delta}{Z} \frac{4 R Z_0}{[(R+Z_0)^2 - (R-Z_0)^2] e^{-2\delta}} \quad \text{dici che la parentesi quadra di non ci vuole}$$

Celli a T e a π simmetriche



Le due celle a lato sono ovviamente equivalenti; supponiamo di avere una

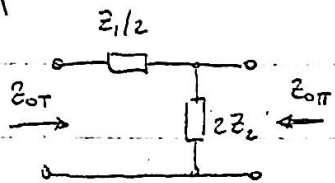
lunga catena di celle del tipo indicato, chiuse nell'impedenza caratteristica Z_0 delle celle. L'adattamento immagine è realizzato in A e B; ma data la simmetria, è realizzato anche nella sezione C, d'altra parte può non esserci Z_0 in C, bensì un'altra impedenza $Z_{0\pi}$. In effetti per doppio bipolo del tipo:



ad ogni porta ha una impedenza caratteristica $Z_{0\pi}$, poiché la sequenza infinita di quadripoli a T vista da C è una sequenza di quadripoli a π del tipo (5).

Tutto questo fa dire che ogni tipo di quadripolo è riconducibile allo studio delle celle a quadrato, le combinazioni opportune delle quali fornisce i circuiti e

quivalenti a T o a π di un qualunque quadripolo. Risulta:

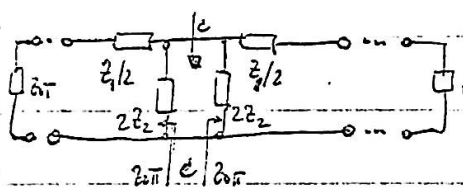


$$Z_{0T} = \sqrt{Z_{1V} Z_{1C}} = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + 2Z_2\right) \frac{Z_1}{2}} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

$$Z_{0\pi} = \sqrt{Z_{2V} Z_{2C}} = \sqrt{2Z_2 \frac{Z_1 Z_2}{\frac{Z_1}{2} + 2Z_2}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{\left(1 + \frac{1}{4} \frac{Z_1}{Z_2}\right)}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{0T}}$$

$$\text{tg} \varphi_I = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{1V}}} = \sqrt{\frac{Z_1}{2} \frac{1}{\frac{Z_1}{2} + 2Z_2}} = \sqrt{\frac{\frac{Z_1}{4Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}$$

Si possono costruire attenuatori del tipo catene formate da celle simmetriche del tipo indicato sotto; invio un ~~segnale~~ impulso μ e mediante un generatore che ha impedenza $Z_{0\pi}/2$; allora non si ha nessuna riflessione; se la catena è chiusa

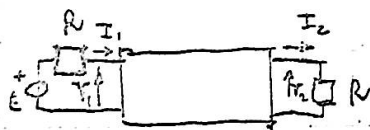


da entrambi i lati su Z_{0T} ho realizzato un adattamento di impedenza. Inoltre ci saranno tante celle ~~possibili~~ da realizzare l'attenuazione voluta. Tale

attenuazione è uguale a μ volte l'attenuazione di una cella, essendo μ il numero delle celle.

Filtri

Si tratta di doppi bipoli destinati ad avere un comportamento in frequenza ben determinato. Si tratta in sostanza di dispositivi ^{per i quali} ~~che~~ in una certa banda di frequenza (bande passante) il segnale in uscita ha l'ordine di grandezza di quello in ingresso, mentre nelle rimanenti bande (opsta) ~~non~~ è trascurabile rispetto a quello in ingresso. I filtri si terminano



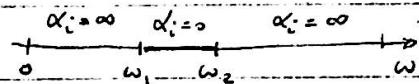
politamente nelle stesse impedenze resistive; si consideri il rapporto:

$$\frac{V_2(j\omega)}{E(j\omega)}$$

con terminazioni resistive basta così derivare il modulo del rapporto V_2/E .

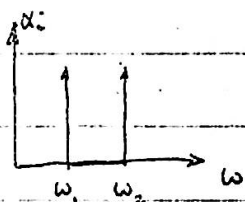
~~Il filtro~~ Filtro:

$$k_i = S_{21} = 2 \frac{V_2}{E} = \frac{1}{\alpha_i + j\beta_i}$$

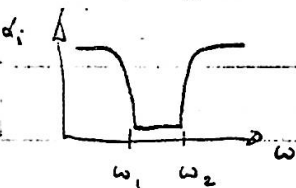


nelle bande passante dove $\alpha_i \approx 0$, e nella bande opaca $\alpha_i \approx \infty$.
 Se $\omega_1 = 0$ il filtro è passa basso, e $\omega_2 = \infty$ il filtro è passa alto; se ω_1 ed ω_2 sono finiti si dice passa banda; se $\omega_1 < \omega_2$ è la banda opaca si dice a soppressione di banda; poi ci sono i filtri selettivi ~~selettivi~~ per i quali $\omega_1 \approx \omega_2$ è molto ristretto. Nella banda passante è prescritto anche che β_i sia funzione lineare con di ω , nel qual caso il segnale viene ritardato ma non deformato.

Più modernamente si intende per filtro un dispositivo che si comporta diversamente alle varie frequenze. Nasce quindi il problema delle approssimazioni.



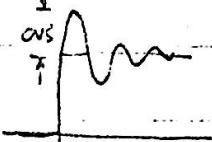
Si voglia ad esempio realizzare il filtro passa banda con la attenuazione segnata a lato; questo non si può realizzare, allora tecnicamente si tenta di realizzare uno



con una attenuazione come quella a lato (maschera del filtro). Il problema è quindi passare dalla maschera al circuito che la realizza, mediante metodi di approssimazione nelle S_{21} .

Oggi vengono anche prescritti, per un filtro, l'overshoot all'applicazione di un gradino, nel senso che si vuole, tanto più è buono il filtro, tanto più è probabile che mandando un gradino la risposta sia del tipo indicato a lato; si ritiene che il primo picco non sia troppo alto. In genere il comportamento del filtro è buono se i componenti hanno valori uniformi, e non troppo diversi l'uno dall'altro, e posto per misurazioni di montaggio.

Ci sono precisioni piuttosto di tipo tecnologico in questo senso.



Supponiamo allora di essere riusciti a trovare una $S_{21}(j\omega)$. Il filtro passivo
reattivo, e posto perché l'attenuazione è ottenuta nella banda opaca per riflessione,
e inoltre non si vuole che nella banda passante ~~non~~ ci sia dissipazione di en-
ergia. Inoltre per praticità si fanno simmetrici.

I filtri classici di Zaebel (a.k. costanti ed μ -derivati) si fondano sulle approssima-
zioni di ritardare il filtro adattato su base minimale a tutte le frequenze. Per cui la
dissipazione coincide con quella minimale: $S_{21} = e^{-\delta}$. Questo metodo si presta bene
per componenti. Il filtro più moderni (per miniaturizzazione) consentono una maggiore libertà;
supponiamo di voler realizzare una assegnata $S_{21}(j\omega)$ nelle condizioni (per riduzione (coste-
tivo, simmetrico, di non resistenza uguale)). Supponiamo che il filtro esista e trova-
mo delle condizioni necessarie; (si mostreremo che tali condizioni sono anche suffi-
cienti).

Tanto per cominciare notiamo che per un p -bipolo passivamente realistico è, sull'asse $j\omega$:

$$[D] = [I] - [\tilde{S}^*][S] = [0]$$

per quanto gli elementi diagonali di $[D]$ sono tutti nulli, e ciò ^{dal fatto} ~~è~~ ^{significa} che $d_{ij}d_{ji} = 0$,
ovvero $d_{ij}^* = d_{ji}$, nel senso che $d_{ij} = 0$. Quindi la matrice di dissipazione è nulla.
Ne segue:

$$[\tilde{S}^*][S] = [I]$$

dato che nel nostro caso è (essendo q il minimo comune multiplo dei quattro deno-
minatori dei quattro termini di $[S]$):

$$[S] = \frac{1}{q} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} \equiv [\tilde{S}]$$

(essendo k_{ij} un polinomio in $[S]$), sarà:

$$[\tilde{S}^*] = \frac{1}{q^*} \begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* \\ k_{12}^* & k_{11}^* \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{S}]^* [S] = [I] \Rightarrow \frac{1}{qq^*} (k_{11}^* k_{11} + k_{12}^* k_{12}) = 1 \quad ; \quad k_{11}^* k_{12} + k_{12}^* k_{11} = 0$$

Da cui:

$$k_{11} = - \frac{k_{12}}{k_{12}^*} k_{11}^*$$

Supponiamo che k_{11} e k_{12}^* abbiano un fattore comune f_0 :

$$k_{12} = f_0 \cdot \vartheta^* \quad , \quad k_{12}^* = \pm f_0^* \vartheta^{**} = \pm f_0 \vartheta$$

se c'è f_0 , esso è pari o dispari, come subito si verifica; il segno superiore è quello valido quando f_0 è pari. Allora:

$$k_{11} = \mp \frac{\vartheta^*}{\vartheta} k_{11}^*$$

ϑ deve avere un fattore di k_{11}^* , poiché il primo termine è un polinomio e ϑ non può avere parte di ϑ^* poiché sarebbe finito in f_0 :

$$k_{11}^* = h_0^* \vartheta$$

da cui:

$$k_{11} = \mp \vartheta^* h_0^*$$

ma è anche:

$$k_{11} = h_0 \vartheta^*$$

da cui:

$$h_0 = \mp h_0^*$$

quindi h_0 o è pari o è dispari: se f_0 è pari, h_0 è dispari, e viceversa.

Risulta allora:

$$[S] = \frac{\vartheta}{q} \begin{bmatrix} h_0 & f_0 \\ f_0 & h_0 \end{bmatrix}$$

ne risulta anche:

$$k_{11}^* k_{11} + k_{12}^* k_{12} = qq^*$$

e quindi:

$$h_0 \vartheta^* h_0^* \vartheta + \vartheta f_0^* \vartheta^* f_0 = qq^*$$

$$h_0^2 \vartheta^2 + \vartheta^2 f_0^2 = q^2$$

$$\vartheta^2 (h_0^2 + f_0^2) = q^2$$

Potremo ϑ^2 è anche un fattore di q^2 , e quindi si può scrivere:

$$q = q_0 \vartheta^2$$

e allora:

$$[S] = \frac{1}{q_0} \begin{bmatrix} h_0 & f_0 \\ f_0 & h_0 \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$S_{21} = \frac{f_0}{q_0}$$

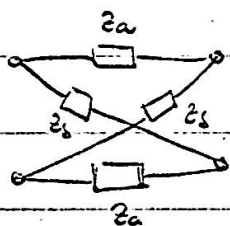
quindi deve essere:

$$1) S_{21} \text{ reale e razionale } (S_{21} = \frac{f}{d})$$

$$2) |S_{21}(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega, \text{ in quanto } |S_{21}| = 2 \frac{V_2}{E} \text{ e il sistema non amplifica.}$$

3) $\exists$ un polinomio φ di Hurwitz tale che $S_{21} = \frac{f}{d} \frac{\varphi}{\varphi} = \frac{f\varphi}{d\varphi}$ abbia numeratore pari o dispari e denominatore di Hurwitz; in quando f/d può essere del tipo $\frac{f_0}{q_0}$, ma fatto fide c'è un fattore a comune; moltiplicando e dividendo per φ si elimina tale fattore, e φ deve essere di Hurwitz perché il denominatore di Hurwitz per proprietà note.

Dimostriamo che S_{21} soddisfa la 1), 2) e 3); mostriamo che esiste sempre la rete che la realizza. Il dispositivo è un bracciale simmetrico.



$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b - Z_a \\ Z_b - Z_a & Z_a + Z_b \end{bmatrix}$$

$$[Z] = [Z(S) - Z]^{-1} [Z(S) + Z] = \frac{1}{q_0 [(h_0 - 1)^2 - f_0^2]} \begin{bmatrix} h_0^2 - f_0^2 - 1 & -2f_0 \\ -2f_0 & h_0^2 - f_0^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Da cui Z_a e Z_b per confronto:

$$Z_a = \frac{h_0^2 - f_0^2 - 1 - 2f_0}{2q_0 [(h_0 - 1)^2 - f_0^2]}$$

$$Z_b = \frac{h_0^2 - f_0^2 - 1 + 2f_0}{2q_0 [(h_0 - 1)^2 - f_0^2]}$$

Si può dimostrare che Z_a e Z_b sono funzioni reali e positive.

Filtri classici

Si è trovato:

$$S_{21} = e^{-\theta} \frac{f(R, z_0)}{g(R, z_0) e^{-2\theta}}$$

da cui, prendendone il logaritmo, si vede che la attenuazione di inserzione è la somma delle attenuazioni immaginarie più un'altra attenuazione:

$$\alpha_i = \alpha_I + \alpha_a(\omega)$$

Nei filtri classici (di Zobel) si confonde α_i con α_I ; vuol dire che $\alpha_a(\omega)$ lo si calcolerà a posteriori; in questo ipotizzeremo sempre α_i in modo che si sia al riparo da sorprese. Nelle bande passanti z_0 è pure resistenza $R(\omega)$, nelle bande opaca è pure reattanza $jX(\omega)$; in tale caso se $\alpha_a(\omega)$ è positivo questo va a vanificare il progetto; α è negativa è bene fare α_i più grande del necessario. Ammettiamo allora che sia $\alpha_i = \alpha_I$ sia nelle bande passanti sia in quelle opaca:

$$z_0 = \sqrt{z_c z_v} \quad \tanh \theta = \sqrt{\frac{z_c}{z_v}}$$

è dato che è:

$$z_c = jx_c \quad z_v = jx_v$$

è:

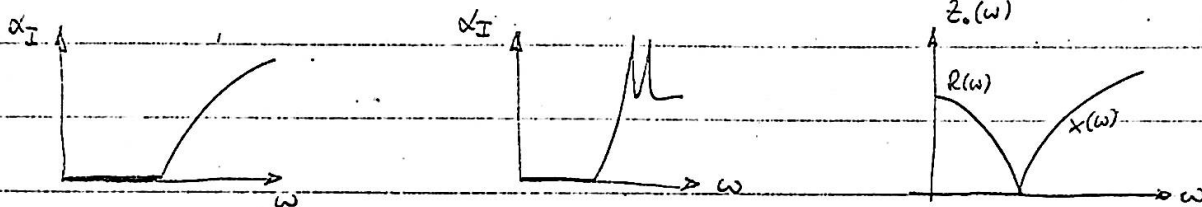
$$z_0 = \sqrt{-x_c x_v} \quad \tanh \theta = \sqrt{\frac{x_c}{x_v}}$$

ovvero x_c, x_v funzioni reali sempre crescenti della frequenza. Se $\frac{x_c}{x_v} \leq 0$ per una certa ω , z_0 è reale di ω , e $\tanh \theta$ è immaginaria, quindi $\alpha_I = 0$, e allora passa la banda passante. Se $\frac{x_c}{x_v} > 0$, z_0 è immaginaria, $\tanh \theta$ è reale ed $\alpha_I \neq 0$, quindi questa è la banda opaca. Se $\frac{x_c}{x_v} = 1$ è $\tanh \theta = 1$ si trova che $\alpha_I = \infty$, il che è ovvio, poiché la porta 1 non dipende dalla porta 2 poiché dalle porte uno si vede le stesse impedenze ma che la porta due non si è visto più o meno. Per una rete a scale passante significa che uno dei rami

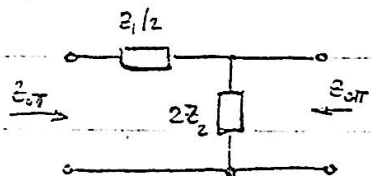
orizzontali ha ^{impedenza} ~~impedenza~~ infinita, o uno di quelli verticali ha impedenza nulla. Anzi si può dimostrare che i poli veri di una rete a scale sono proprio poli delli.

Se $x_c/x_v = 0$, z_0 è un costo e $\text{tg} \phi = 0$ e quindi $\alpha_I = 0$. Quindi $x_c = 0$ per il punto di transizione tra banda passante e banda d'arresto. Le frequenze a cui questo avviene si dicono di taglio.

In genere si hanno situazioni del tipo, per una banda:



Consideriamo un filtro a scala (sbilanciato, il che è un vantaggio: hanno un terminale a massa). Se colleghiamo le varie celle in modo che siano tutti T anni



z_{0T} , e in caso contrario anno $z_{0\pi}$. Dato che

in una cascata z_{0T} (o $z_{0\pi}$) è l'impedenza della

cascata come lo è per una cella, pertanto

le frequenze di taglio non cambiano, ma l'attenuazione

viene moltiplicata per il numero di celle, nella banda d'arresto. Nelle bande passanti

$\alpha_I = 0$ sempre in teoria, anche in realtà c'è quella $\alpha_a(\omega)$ che aumenta col numero di celle anche nella banda passante.

Per la cella in questione avevamo trovato:

$$z_{0T} = \sqrt{z_1 z_2 \left(1 + \frac{z_1}{4 z_2}\right)}$$

$$z_{0\pi} = \frac{z_1 z_2}{z_{0T}}$$

$$\text{tg} \phi = \sqrt{\frac{z_1}{4 z_2} \left(1 + \frac{z_1}{4 z_2}\right)}$$

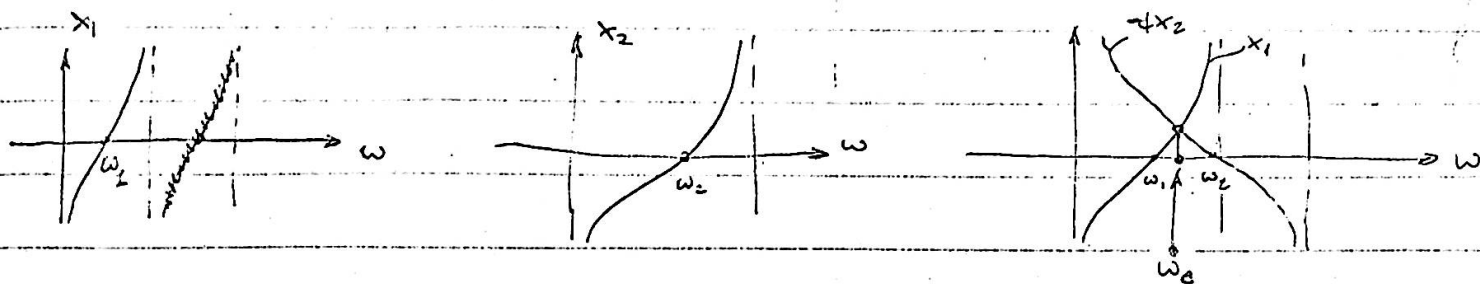
nel nostro caso:

$$z_{0T} = \sqrt{-x_1 x_2 \left(1 + \frac{x_1}{4 x_2}\right)}$$

$$z_{0\pi} = \frac{-x_1 x_2}{z_{0T}}$$

$$\text{tg} \phi = \sqrt{\frac{x_1}{4 x_2} \left(1 + \frac{x_1}{4 x_2}\right)}$$

x_1 ed x_2 variano con la frequenza; alle frequenze di taglio $z_{0T} = 0$, e quindi:
 $x_1 = 0$ $x_2 = -4x_1$



La costruzione grafica è immediata; tra 0 ed ω_1 la banda è ~~passante~~ ^{opaca}; tra ω_1 e $+\infty$ la banda è ancora opaca. Pertanto la banda passante è tra ω_1 ed ω_2 .
 I punti in cui x_1 e x_2 cambiano segno contemporaneamente non portano alcun cambiamento nelle meschere del filtro.

Questo tipo di filtri viene realizzato a k costante, prendendo (essendo $k = cte$):

$$-x_1 x_2 = k^2$$

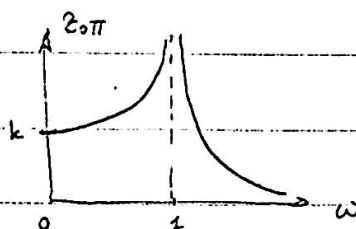
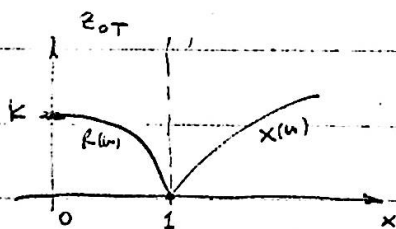
o, scrivendo: $-\frac{x_1}{dx_2} = x^2$ (funzione di ω)

notare che per $x=1$ si ha una frequenza di taglio, e per $x=0$ si ha un'altra frequenza di taglio. In tali ipotesi:

$$z_{0T} = k \sqrt{1-x^2}$$

$$\lg h \omega = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

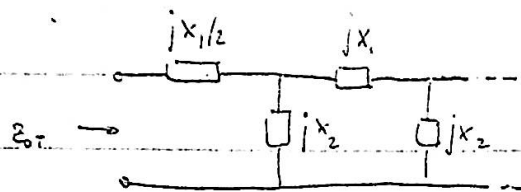
$$z_{0\pi} = \frac{k^2}{\sqrt{1-x^2}}$$



Terminando un filtro a k costante ~~si~~ ^{si} ha una meschiera derivata, al variare di u , z_0 assume

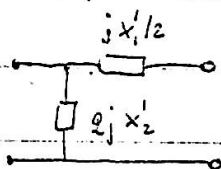
andamenti intermedi tra z_{0T} e $z_{0\pi}$; così si riesce a far sì che le fluttuazioni nelle bande passante siano fin o meno nell'orizzontale ($u = 0,5$).

Facciamo ora i due casi, di impedenza a T e di impedenza a π :



$$Z_{0T} = k \sqrt{1-x^2}$$

cella μ -derivata:



de mettere ad entrambi i terminali del filtro.

Il filtro è adattato su base immagine se:

$$Z_c Z_v = Z'_c Z'_v$$

(Z_c e Z_v di T); per cui:

$$Z'_c = \mu Z_c \quad Z'_v = \frac{1}{\mu} Z_v$$

da cui:

$$j \frac{X'_1}{2} = \mu j \frac{X_1}{2} + j \frac{X'_1}{2} + 2j X'_2 = \frac{1}{\mu} j \frac{X_1}{2} + \frac{1}{\mu} j X_2$$

$$X'_1 = \mu X_1 \quad X'_2 = \frac{X_2}{\mu} + \frac{X_1}{4} \left(\frac{1-\mu^2}{\mu} \right)$$

per dare quindi μ reale positivo, e inoltre $1-\mu^2 > 0$

cioè $\mu \leq 1$

L'impedenza Z_{HT} vista dai terminali del filtro

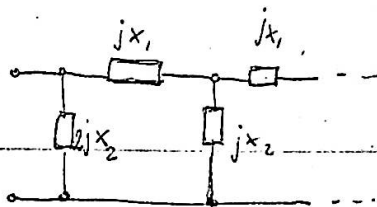
e delle celle μ -derivata messi in cascata:

$$Z_{HT} = \sqrt{\frac{2jX'_2 \cdot (-X'_1 X'_2)}{j(X'_1 + X'_2/2)}} = \sqrt{\frac{(-X'_1 X'_2) \left(1 + \frac{X'_1}{4X'_2}\right)^{-2}}{1 + \frac{X'_1}{4X'_2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{k^2 [1-x^2 (1-\mu^2)]}{1 + \frac{\mu^2}{-1/x^2 + 1-\mu^2}}}$$

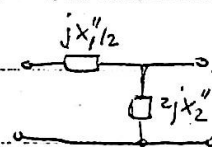
$$\mu = 0 \quad Z_{HT} = k \sqrt{1-x^2}$$

$$\mu = 1 \quad Z_{HT} = \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$Z_{0\pi} = \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}$$

cella μ -derivata:



de mettere ad entrambi i terminali del filtro.

Il filtro è adattato su base immagine se:

$$Z_c Z_v = Z''_c Z''_v$$

(Z_c e Z_v di π)

$$Z''_c = \mu Z_c \quad Z''_v = \frac{1}{\mu} Z_v$$

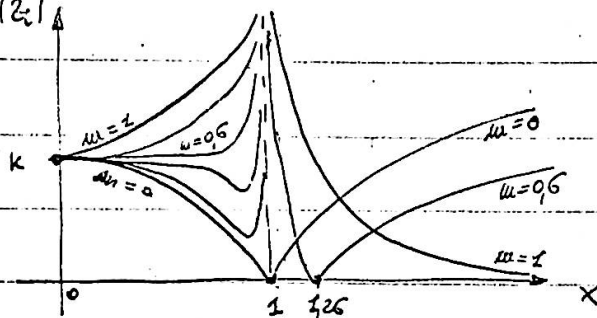
da cui:

$$j \frac{X''_1}{2} = \mu j \frac{X_1}{2} + j \frac{X''_1}{2} + 2j X''_2 = \frac{1}{\mu} j \frac{X_1}{2} + \frac{1}{\mu} j X_2$$

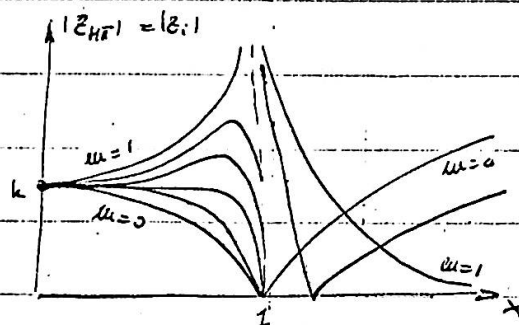
$$X''_1 = \mu X_1 \quad X''_2 = \frac{X_2}{\mu} + \frac{X_1}{4} \left(\frac{1-\mu^2}{\mu} \right)$$

Si vede quindi che μ variabile tra 0 ed 1, z di conseguenza varia continuamente tra $\mu=0$ e $\mu=1$:

$$|z_{HT}| = |z_i|$$



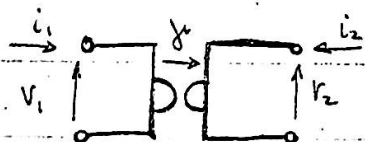
Si vede che per $\mu=0,6$ si riesce ad ottenere che $|z_i|$ per $x \ll 1$ rimane molto bene costante entro il 4% nel 90% della banda. Inoltre la banda non è affatto cambiata con la $z_{0\pi}$ si ha pure $|z_{HT}|$:



Circuiti elettronici

I circuiti elettronici si riducono in genere a circuiti attivi equivalenti, che non sono reciproci.

Per ovvio motivo che pure reti RLC si possono rappresentare con R, C e giratori γ :



$$v_2 = \gamma i_1$$

$$v_1 = -\frac{1}{\gamma} i_2$$

Per molto μ e $\mu=1$, da 1 si vede $\mu=1$, come subito si verifica. Inoltre si tratta di un elemento non reciproco. Due giratori in cascata fanno un tras-

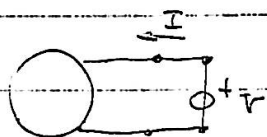
matrice ideale - Si tiene conto delle non linearità, nei circuiti equivalenti, mediante generatori pilotati (elementi trifasari); i generatori pilotati sono attivi come si vede dal test di passività polio.

Tediamo come si tiene conto di un qualunque componente stanco nella teoria delle reti - Intanto sono lineari, per lo meno alle variazioni; quindi è sempre:

$$[A][V] = [B][I]$$

e quindi si può operare sempre come al solito, tenendo ben presente che con gli elementi attivi i poli e gli zeri possono stare ovunque, per cui hanno molto interesse le questioni di stabilità - Possono anche porre questioni di passività delle soluzioni.

In particolare, per generatori pilotati debbono essere valide nell'usare i teoremi di sovrapposizione; ad esempio quello di Thevenin; nelle determinazioni della e breve sovrapposizione i generatori normali ma non quelli ~~passivi~~ pilotati e si ovinne:



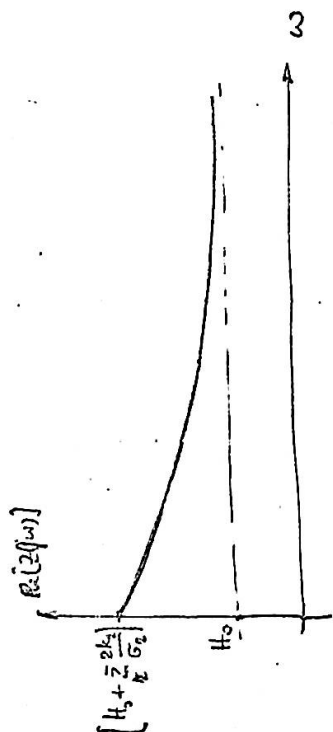
$$z = \frac{V}{I}$$

In questo modo può venire una z negativa in certi punti dell'asse immaginario.

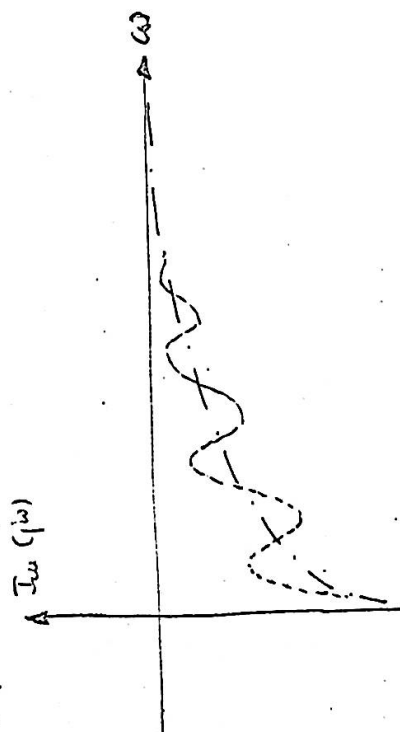
Con semplici calcoli si ottiene anche:

$$z_{RC}(j\omega) = \left[H_0 + \sum_k \frac{2k_2 G_k}{G_k^2 + \omega^2} \right] - j \left[\frac{k_0}{\omega} + \sum_k \frac{2k_2 \omega}{G_k^2 + \omega^2} \right]$$

$$= R_c [Z(j\omega)] + j I_m [Z(j\omega)]$$



La rete è di poli conduttori $H_0 = 0$, poli a frequenza infinita dove nasce $z = 0$.



È facile verificare che: $\frac{\partial \text{Re}[Z(j\omega)]}{\partial \omega} < 0$

Il che $I_m(j\omega)$ non è monotono.