

Giuseppe Biorci

# TEORIA delle RETI ELETTRICHE

## 1

reti RLC lineari, analisi di una rete RLC, analisi del bipolo RLC, reti di bipoli, rete a scala, teorema di Millman, reti lineari più generali, teoremi dei sistemi mediante le variabili di stato, reti a regime, potenza nei sistemi sinusoidali, esame del comportamento delle funzioni delle reti nel piano complesso, condizioni di fisica realizzabilità del bipolo normale passivo, trasformatori, proprietà delle funzioni reali positive

Anno Accademico 1966-67



BIORCI

# TEORIA DELLE RETI ELETTRICHE

ANNO ACCADEMICO

KCHLXVI-

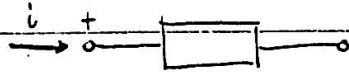
-KCHLXVII



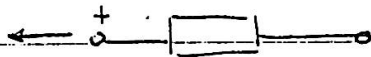
## Reti RLC (lineari).

Si tratta di reti costituite da resistori ( $R$ ), induttanze ( $L$ ), e capacità ( $C$ ). Supponiamo che tutti gli elementi della rete siano bipli (esclusi quindi gli accoppiamenti), supponiamo quindi che non vi siano campi elettromagnetici nello spazio che circonda i bipli.

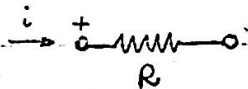
In generale si usano due convenzioni<sup>1)</sup>, quella degli utilizzatori:



e quella dei generatori:

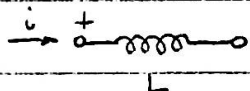


In elettronica si usa sempre largamente la convenzione degli utilizzatori. Ecco le relazioni che legano tensione e corrente degli enti che consideriamo, rispettivamente nello spazio dei tempi e nello spazio delle frequenze (ammesso che tensioni e correnti siano tutte in fase):



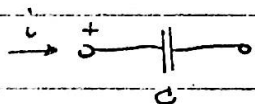
$$v = Ri$$

$$V = RI$$



$$v = L \frac{di}{dt}$$

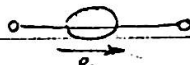
$$V = \omega LI$$



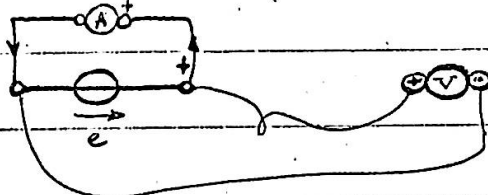
$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$I = \omega CV$$

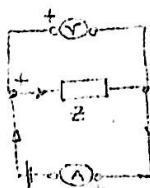
Consideriamo ancora generatori ideali di tensione e di corrente. Il primo:



mantiene ai suoi morsetti una tensione "e" qualunque sia la corrente che lo percorre. Per verificare che un generatore di tensione è ideale si può di pratica costruire un gran numero di esemplari identici e di collegarne ognuno ad un carico differente; se la corrente evolve nel tempo con la medesima legge per tutti gli esemplari, allora il generatore è ideale. La freccia indica che, nel seguente collegamento con un voltmetro (strumento algebrico di cui ipotizziamo l'esistenza):



(1) - Per un biplio passivo è  $v_i > 0$ ; nelle convenzioni degli utilizzatori:





Il volmetro dà effettivamente una indicazione positiva. Finito allora il verso della corrente ai morsetti corrente<sup>(2)</sup> con la freccia, e finiamo il polo positivo del generatore in modo da poter disfare la convenzione negli utilizzatori.



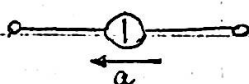
Esso è governato dall'equazione:

$$V + e = 0$$

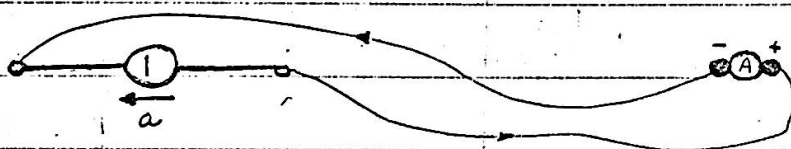
$$V + E = 0$$

(1)

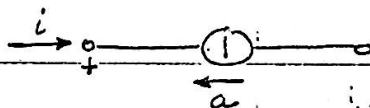
Un generatore ideale di corrente è tale da erogare sempre la medesima corrente, in qualunque sia la d.d.f. ai suoi morsetti.



Per stabilire il segno su tale generatore<sup>(2)</sup> facciamo il collegamento seguente con un amperometro:



Se l'amperometro segna effettivamente una corrente positiva, come nell'esempio, finiremo i segni con:



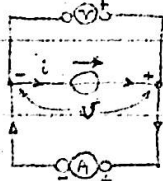
Applicando la prima legge di Kirchhoff al morsetto contrassegnato con + si ha, nel due do = mini, del tempo e delle frequenze:

$$i + a = 0$$

$$I + A = 0$$

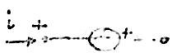
(2)

(1) - Il generatore di tensione è tale che sia sempre  $v < 0$  (cioè è un generatore); allora convenzione degli utilizzatori è sempre:

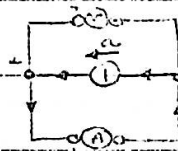


Nel collegamento indicato gli strumenti segnano positivo. Finita la corrente, si desinnesca il bipolo recando la convenzione degli utilizzatori a fine il stesso positivo di  $v$  come in figura sotto. Da lui segue immediatamente:

$$v = -e \Rightarrow v + e = 0$$



(2) Anche se il generatore ideale di corrente è  $v < 0$ ; nell'esempio, dopo utilizzatori è soltanto:



Nel collegamento indicato gli strumenti segnano positivo. Si applica la convenzione degli utilizzatori, finché si è verso positivo; di  $i$  va  $i > 0$  così:



Applicando la legge delle correnti ad un morsetto:

$$i = -a \Rightarrow i + a = 0$$



I problemi che ci poniamo sono i seguenti - Data una rete chiusa RLC ci si può chiedere quali siano i valori di tutte le variabili che caratterizzano la rete e come sia possibile determinarli in funzione del tempo (analisi della rete chiusa).

Si può invece studiare quali proprietà caratterizzino una rete aperta (con morsetti accessibili) qualunque siano i generatori ad essa applicati (Analisi delle reti aperte).

Si può infine, assegnata la relazione tra tensione e corrente che si può chiamare di capi di un bipolo, domandarsi se esiste, ed in tal caso come è fatto, il bipolo che realizza tale relazione (interi del bipolo). È interi di un  $n$ -bipolo (o rete ad  $n$  porte) ovvero di un  $n$ -polo, è un'ovvia estensione del problema della interi del bipolo.

### Analisi di una rete RLC (lineare) chiusa.

Supponiamo sia composta da  $n$  nodi ed  $l$  lati; potremo scrivere per ogni nodo

$$\sum i = 0$$

$$\sum I = 0$$

in numero di  $n-1$  relazioni indipendenti; potremo ancora scrivere per ogni maglia:

$$\sum v = 0$$

$$\sum V = 0$$

in numero di  $l-n+1$  relazioni indipendenti. Per ogni bipolo possiamo scrivere la sua relazione indipendente del tipo:

$$v + e = 0$$

$$i + a = 0$$

$$v = Ri$$

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

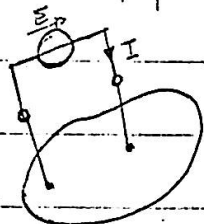
In tutto scriviamo allora  $l$  ulteriori equazioni di bipolo indipendenti.

Abbiamo quindi, tutto in totale,  $2l$  equazioni lineari <sup>indipendenti</sup> (algebraiche se trasformate secondo Laplace) nelle  $2l$  tensioni e correnti incognite (tensioni e correnti di ogni lato). La soluzione del sistema è quindi immediata. Dato che i termini noti sono solo le  $e_i (E_i)$  e le  $a_j (A_j)$ , p.e.m. e correnti imposte dai generatori contenuti nella rete, allora, ogni tensione ed ogni corrente, nello spazio delle frequenze, sono combinazioni lineari di tutte le  $E_i$  e di tutte le  $A_j$ , i coefficienti di tali combinazioni lineari essendo funzioni razionali fatte in  $s$ ; numeratore e denominatore di tali frazioni sono polinomi in  $s$  a coefficienti reali ( $R, L, C$ ).



### Analisi del bipolo RLC (lineare)

Se tra i morsetti del bipolo mettiamo un generatore di tensione  $E$  noto, ma non specificato, la rete è chiusa, e le si applicano le considerazioni precedenti, in modo formale, ma non identico, poiché le soluzioni dipendono dalla variabile indipendente  $E$ . Sarà in generale:



$$I = \sum_i c_i E_i + \sum_j C_j A_j + f E \quad (1)$$

che riscriviamo:

$$I = -A - Y E \quad (2)$$

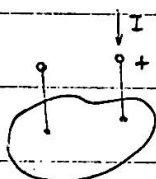
Dato che:

$$V + E = 0 \quad (3)$$

La (2) diventa, tenuto conto della (3):

$$\boxed{I + A = Y V} \quad (4)$$

relazione affatto indipendente da  $E$ .  $A$  è una combinazione lineare <sup>omogenea</sup> delle f.e.m. e delle correnti impresse dei generatori ideali contenuti entro il bipolo; i coefficienti di tale combinazione lineare sono funzioni razionali fatte in  $s$  (come  $Y$  del rete), i polinomi in  $s$  che compaiono a numeratore ed a denominatore essendo a coefficienti reali ( $R, L, C$ ).  $A$  ed  $Y$  dipendono quindi soltanto dalla rete e dai morsetti resi accessibili. Stabilita la (4) si usano le solite convenzioni in segno:

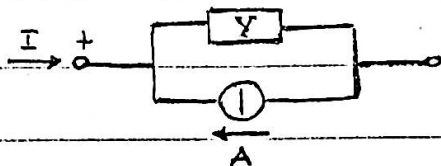


A rappresenta il valore di  $I$  ai morsetti, cambiato di segno, quando il bipolo è in corto circuito (corrente di corto circuito). Se si rende passiva la rete è  $A=0$ , ed  $Y$  in tal caso è il rapporto tra corrente e tensione ai capi del bipolo (ammettenza del bipolo). La rete si rende passiva quando si aprono i generatori ideali di corrente e si cortocircuitano i generatori ideali di tensione, in quanto deve essere nei due casi  $E=0$  ed  $A=0$ ; poiché è  $V+E=0$  ed  $I+A=0$  ne segue che deve essere  $V=0$  ed  $I=0$ , e l'unico modo per realizzare tali condizioni è quello indicato.

E allora il circuito equivalente al bipolo è quello indicato qui di seguito (teorema



di Norton):

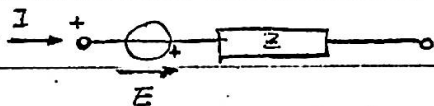


Tuttavia, se mettiamo, in tale schema, in corto circuito i morsetti,  $V$  è nullo ed è  $I + A = 0$ , cioè  $I = -A$ ; se è  $A = 0$ , allora chiaramente:  $V = I/Y$ . Dato che siamo in presenza di reti e sistemi di equazioni lineari, basta che siano verificate due condizioni e l'identità delle due reti è certa. A parole: una rete lineare bipolare equivale sempre ad un generatore di corrente in parallelo con una ammettanza; la corrente del generatore è quella di corto circuito del bipolo cambiata di segno, e l'ammettanza è quella vista dai morsetti verso l'interno del bipolo.

Se all'inizio si fosse inserito un generatore di corrente tra i morsetti e si fosse ripetuto tutto il ragionamento si sarebbe arrivati alla relazione, equivalente alla (1) di pg. precedente:

$$V + E = Z I \quad (2)$$

che costituisce il teorema di Thévenin;  $E$  è la tensione a vuoto (morsetti aperti) cambiata di segno, e  $Z$  è l'impedenza della rete vista verso l'interno. È immediato verificare che il bipolo equivalente è il seguente:



Data la loro definizione operativa è evidente che è  $Z = 1/Y$ ; dato poi che la corrente di corto circuito deve essere la stessa nel primo schema e nel secondo, è:

$$-A = E/Z \quad Z = 1/Y \quad (3)$$

che servono per passare da uno schema all'altro, validi entrambi in ogni caso per reti lineari.

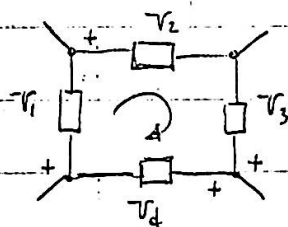
#### RETE DI BIPOLI

Per una rete di bipoli possiamo scrivere perché siano lineari:

$$\left. \begin{array}{l} n-1 \\ l-m+1 \\ l \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{equazioni} \\ \text{del} \\ \text{tipo} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sum I = 0 \\ \sum V = 0 \\ V + E = Z I \end{array} \right. \quad (3)$$

Qualora si sia usata per ogni bipolo la riduzione di Thévenin, se un bipolo fosse un generatore ideale di ~~corrente~~ corrente, tale riduzione non sarebbe possibile; escludiamo per ora tale caso. Se invece per ogni bipolo si fosse usata la riduzione di Norton, allora un discorso analogo varrebbe per i generatori ideali di tensione.

Si tratta di 24 equazioni in 24 incognite risolvibile con i metodi ordinari. Notare che per ogni bipolo è più essenziale tener conto dei segni, visto che le equazioni sono quelle scritte in precedenza. Ad esempio, scrivendo l'equazione della maglia indicata in fig. 1, scriviamo:



$$-V_1 + V_2 - V_3 + V_4 = 0 \quad (1)$$

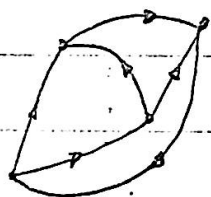
Fig. 1

Nel caso il bipolo sia privo di generatore non è possibile sapere il verso delle corrente, e lo si sceglie allora a caso, riprendendo poi il potenziale secondo le convenzioni degli utilizzatori.

È essenziale fare una netta distinzione tra le prime due equazioni e le terze (3) di 4.5.

Per la validità delle prime basta che le reti sia di bipoli e siano note le loro connessioni; la terza conta anche la conoscenza del tipo di bipolo. Le prime due si dicono geometriche, la terza fisica. Per l'applicazione delle equazioni geometriche è quindi sufficiente sapere i nodi con punti, e i lati con rette orientate (salvo tutto ad eccezione del no. computazionale fisico); otteniamo in sostanza un grafo orientato.

Si può allora dare la definizione di nodo: quel punto dove convergono almeno tre lati (unico caso interessante dal punto di vista elettrico); il numero di lati che convergono in un nodo si dice grado del nodo; la maglia è un insieme di lati del grafo che si lascia percorrere in modo da formare un cammino chiuso, passando per uno stesso punto una volta sola.



Un albero di un grafo è un insieme di lati (del grafo), privo di maglie, e che tocca tutti i nodi. Se  $n$  sono i nodi di una rete, il numero di lati di un albero è sempre  $n-1$ , come è facile dimostrare<sup>(1)</sup>. Ciò che rimane del grafo quando si sopprime un albero è un sottografo detto

(1) - Vedere ORE: I GRAFI - ZANICHELLI, pag. 45.



- coalkeno che ha orientamento un numero di lati  $l = n + 1$  (tante come le equazioni delle maglie, mentre  $n - 1$  sono le equazioni dei nodi). Definiamo le matrici di maglia e quelle di cociclo (insieme dei lati tagliati da una superficie chiusa, <sup>numero di lati di volta</sup>  $V$  ~~chiusa~~ <sup>in particolare</sup>  $\text{cut-set}$ ); una superficie chiusa semplicemente connessa divide i nodi in due parti: quelli che stanno dentro e quelli che stanno fuori; il cociclo è l'insieme dei lati che <sup>i nodi</sup> ~~uniscono~~ <sup>quelli di dentro</sup> ~~con quelli di fuori~~).
- Costruiamo una matrice così: mettiamo nelle colonne i nomi dei lati, e nelle righe quante superfici chiuse vogliamo  $s_1, s_2, \dots$ ; l'elemento generico della matrice vale  $\pm 1$  se il lato della colonna sta nel cociclo della riga, zero in caso contrario (matrice di cociclo non orientata); per orientare la matrice si orienta la normale al cociclo verso l'esterno<sup>(1)</sup>; se il lato che taglia il cociclo è orientato verso l'esterno<sup>del cociclo</sup>  $\pm 1$ , e se è orientato in senso contrario:  $-1$ . La matrice di maglia si definisce nello stesso modo mettendo le maglie <sup>orientate</sup>  $V$  al posto dei cocicli.

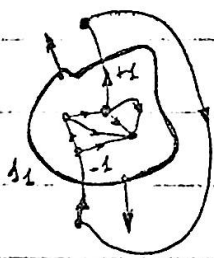


fig. 1

Es. di graf. orientato  
e di cociclo ( $s_1$ ).

Sui lati dei cocicli è ovvio che la somma delle  $I$  è nulla<sup>(2)</sup>; se sui lati si scrivano i valori<sup>correnti</sup> delle correnti, allora vale proprio il segno  $+ 0 -$  che compare nelle matrici di cociclo<sup>orientata</sup>  $I$  che chiamiamo

$[A]$ ; detta:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ \vdots \end{bmatrix}$$

con le correnti scritte nello stesso ordine in cui sono scritti i lati nelle matrici di cociclo, allora è assolutamente vero che risulta:

$$[A][I] = \begin{bmatrix} a & b & c & \dots \\ 1 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

e queste equazioni comprendono anche le equazioni  $\sum I = 0$  relative ai nodi<sup>(3)</sup>.

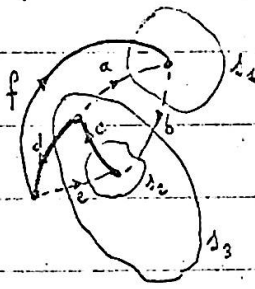
Il numero di cocicli è il numero dei nodi in cui si può dividere la rete in nodi esterni ed interni.

(1) - Ovvero verso l'interno, ~~per convenzione si prende verso l'esterno~~.

(2) - Per la conservatività della corrente elettrica  $I$ .

(3) - Basta prendere una superficie  $s_j$  che contenga nel suo interno solo il nodo  $j$ -esimo, e così per tutti i nodi; in generale però, se così si fa, cesserà l'utilità di queste considerazioni.

Dall'equazione  $[A][I]=0$  si vuole ottenere un sistema di equazioni indipendenti; (matematicamente è quel sistema che ha  $\Delta_{\min} \neq 0$ ); topologicamente il sistema è quello di prendere quei cicli <sup>(ha i tanti simili)</sup> associati ad un albero (che tagliano <sup>cioè</sup> quell'albero <sup>ciascuno</sup> in un lato solo). Questo procedimento è sempre possibile finché l'albero non ha maglie. Ad esempio:



|       |     | f | c | d | a  | b  | e  |
|-------|-----|---|---|---|----|----|----|
| $S_1$ | (f) | 1 | 0 | 0 | 1  | -1 | 0  |
| $S_2$ | (c) | 0 | 1 | 0 | 0  | -1 | -1 |
| $S_3$ | (d) | 0 | 0 | 1 | +1 | -1 | -1 |

La matrice di cicli si costruisce così: nelle colonne le righe  $S_1, S_2, S_3$  sulle maglie prima i componenti del d'albero in ordine: f, c, d e poi i rimanenti lati della rete in un ordine qualunque (costruzione).

Le normali di ogni superficie le scegliamo equivoche con il verso del lato d'albero tagliato da esse. [L'ordine di a, b, e, può essere qualunque nella matrice.] Notare bene le forme delle prime parti delle matrici di cicli (sottomatrice diagonale). Tale matrice <sup>di cicli</sup> la scri-  
viamo:

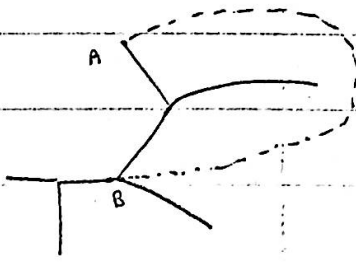
$$[A_2] = \begin{bmatrix} V & T \end{bmatrix}_{(u-1) \times (b-u+1)} \quad ([A_2][I] = 0)$$

Il gruppo di equazioni nate da questi cicli è indipendente, finché la  $[A_2]$  ha certamente rango  $u-1$ , finché il determinante  $|V|$  è  $\neq 0$ . In effetti il grafo dell'esempio ha 4 nodi, e come sappiamo le  $\Sigma I = 0$  indipendenti sono  $4-1=3$ ; cioè a dire il procedimento indicato è un modo per trovare le  $u-1$  equazioni del tipo  $\Sigma I = 0$  indipendenti. <sup>(1)</sup>

La matrice di maglia  $[B]$  si costruisce nello stesso modo rispetto alle matrici  $[V]$  delle tensioni;

$$[B][V] = 0$$

Per dedurre un gruppo minimo di equazioni indipendente da un punto di vista topologico, consideriamo un lato di coalbero che va da A a B; c'è un solo percorso d'albero



che va da A a B <sup>(2)</sup>; un lato ~~coalbero~~ di coalbero e il percorso d'albero sono una maglia; tutte le maglie simili di questo tipo, finché l'albero, sono

(1) - E' come ogni lato d'albero è tagliato da un solo ciclo le componenti figure in uno ed uno solo di esso.  
(2) - Perché se ce ne fosse due ci sarebbe un albero con una maglia



in dipendenti

$$[B_2] = \begin{array}{c|cc|ccc} & a & b & c & \dots & f & g & d \\ \hline H_1 & (a) & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 \\ H_2 & (b) & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ H_3 & (c) & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

maglia      lati del  
coalbero

Per tracciare la matrice  $[B_2]$  ridisponiamo sulle righe le maglie in appartenenti i lati del coalbero, posti nello stesso ordine che avevano nella matrice  $[A_2]$ , e in tutte le colonne gli stessi lati nello stesso ordine, ed in fondo i lati d'albero nello stesso ordine che avevano in  $[A_2]$

Ancora si orienta la maglia concordemente con il lato di coalbero. Notare ancora che la prima parte di  $[B_2]$  è una sotto matrice (rettangolare in genere) diagonale. Indichiamo la  $[B_2]$  le equazioni

$$[B_2][V] = 0$$

sono  $l-u+1$ , e sono indipendenti; si vede che è:

$$[B_2] = [V \quad -T^t] \begin{matrix} (l-u+1) & (u-1) \\ (l-u+1) \end{matrix}$$

( $T^t = T$  trasposta); e quindi  $[B_2]$  ha certamente rango  $(l-u+1)$

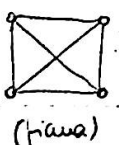
Si è risolto in via puramente geometrica un problema arduo come l'identificazione delle maglie indipendenti.

Il numero di gradi di libertà in tensione è  $u-1$ : si possono fissare arbitrariamente  $u-1$  tensioni, e posto fissa un albero è posto maglie e gli si possono assegnare ad arbitrio i potenziali per cui sia  $\sum V \neq 0$ .

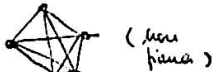
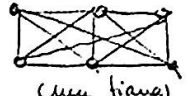
Analogamente il grado di libertà in corrente è  $l-u+1$ , tanti quanti sono i lati del coalbero, in cui si possono mettere arbitrari generatori di corrente e determinare universalmente le correnti negli altri rami. (1)

I gradi di libertà vengono eliminati dalle equazioni finché che finora sono state trattate.

Una rete è fissa se si può annullare in una sfera senza incroci. Una rete è

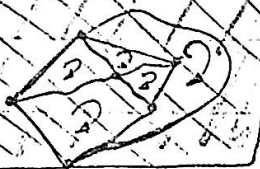


non fissa se <sup>essenziale</sup> contiene come sotto grafo un sottografo completo ovvero un poligono di Kuratowsky di ordine 3 (ovvero tre nodi allineati a due a due, e uniti in tutti i modi possibili l'uno all'altro).

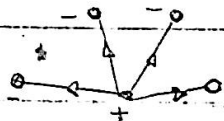


- (1) - Per ogni nodo c'è un ramo d'albero, pertanto nei rami del coalbero le correnti si possono fissare arbitrariamente per cui in un nodo sia  $\sum I \neq 0$ .
- (2) - Così si può risolvere il sistema  $[B_2][V]$  rispetto alle tensioni di coalbero in funzione delle tensioni d'albero.

Una rete piana ridinchi sempre delle aree sufficientemente connesse (confini tra gli stati). Sono altre maglie indipendenti queste tali aree (sull'ipotesi, si badi, su una spina).

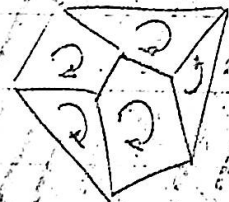


Le tensioni indipendenti di una rete associate con un altro a stelle rispetto delle potenze verso il centro delle stelle, a fatto di orientare i lati verso l'esterno.



S'è visto che dato un altro delle reti, per ogni lato della altro individua una maglia indipendente; ad esempio un lato di coalkes ed i lati d'altres de esso sotto. Le correnti indipendenti sono tante quanti sono i lati di coalkes. Si può pensare alle correnti di coalkes <sup>come circolanti in tutta la maglia</sup> e chiamarle correnti cicliche, e allora tutte le altre correnti sono combinazioni lineari delle correnti cicliche che si possono pensare che sono correnti cicliche. Tutte le maglie indipendenti delle reti, mediante la polarizzabilità delle correnti, si riducono alla maglia di coalkes. Facendo lo stesso per tutti gli altri lati di coalkes, si può concludere che le correnti per i lati d'altres è una combinazione lineare delle correnti cicliche. Dato che ogni corrente ciclica è polarizzabile per come è definita (circola in una maglia) è osservato il principio di polarizzabilità della corrente. (\*)

Se la rete è piana si possono scegliere le maglie indipendenti come figure piane ed in ognuna possono scegliere una corrente ciclica. Se tutte le correnti cicliche sono esprimibili, allora le correnti in ogni lato è sempre esprimibile come differenza tra due correnti cicliche. (rete piana: due maglie che confinano con quel lato)



$$I_k = I_2 - I_5$$

Stabiliamo ora il seguente fondamentale:

Teorema: prendiamo una rete lineare o no e stabiliamo un sistema di

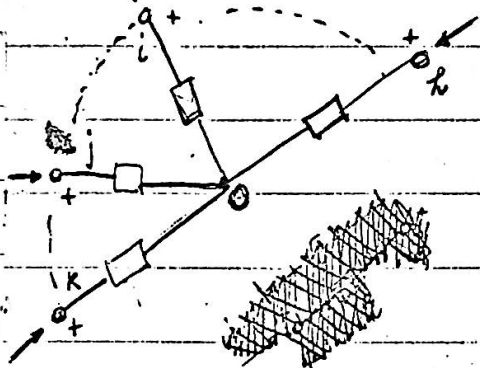


Tensioni  $v_h$  compatibili con la  $\sum v = 0$  (per quella rete con interne che siano le tensioni effettive sulle reti); analogamente per sistemi di correnti  $i_h$  tali che siano compatibili con  $\sum i = 0$ . Tensioni e correnti siano per con le convenzioni degli utilizzatori su ogni lato; allora risulta:

$$\sum_{h=1}^l v_h i_h = 0 \quad (1)$$

Anche per le trasformate risulta  $\sum V_h I_h = 0$ , e  $\sum I_h = 0$ ; Ragioniamo quindi sulle trasformate.

Consideriamo un nodo A e tutti i lati  $V$  convergenti in A; fissato sulle reti un



albero a stelle, è definita la tensione di ogni nodo rispetto al centro stelle; allora:

$$V_{ho} = \varphi(h) - \varphi(0)$$

Allora per il nodo 0:

$$\sum_h V_{ho} I_h = \sum_h (\varphi(h) - \varphi(0)) I_h = \sum_h \varphi(h) I_h - \varphi(0) \sum_h I_h =$$

$$= \sum_h \varphi(h) I_h \quad (\text{perché } \varphi(0) \sum_h I_h = 0)$$

Scriviamo per i nodi  $i$  ed  $j$  la relazione:  $(\varphi_i) =$  potenziale del nodo  $i$ -esimo;  $i_{ij}$  = corrente che va dal nodo  $i$  al nodo  $j$ ):

$$\sum_i \sum_j (\varphi_i - \varphi_j) I_{ij} =$$

$$= \sum_i \left( \sum_j \varphi_j I_{ij} \right) - \sum_j \left( \sum_i \varphi_i I_{ij} \right) = \sum_i \varphi_i \left( \sum_j I_{ij} \right) - \sum_j \varphi_j \left( \sum_i I_{ij} \right) = 0$$

perché  $\sum_j \varphi_j I_{ij} = \varphi_i \sum_j I_{ij} = \varphi_i \cdot 0 = 0$  (perché si tratta di tutte le correnti che vanno verso il nodo  $i$ -esimo, essendo fino  $i$ ); e lo stesso per il secondo termine; ma è:

$$0 = \sum_i \sum_j (\varphi_i - \varphi_j) I_{ij} = \sum_k \sum_l V_{kl} I_{kl}$$

~~essendo la somma a secondo membro estesa a tutta la rete.~~

essendo la somma a secondo membro estesa a tutta la rete. Pertanto il teorema è dimostrato. Nel caso il sistema di tensioni e correnti fosse quello vero delle reti, la dimostrazione delle (1) sarebbe banale, rappresentando il teorema di conservazione

dell'energia.

Si trova che  $\sum V_i I_i = 0$  per come conseguenza che vale anche per le <sup>anti-</sup>trasformate:

$$\sum V_i I_i = 0$$

(fateci ripetere il medesimo ragionamento fatto per  $\sum V_i I_i = 0$ )

[Un bipolo è passivo all'istante  $t$  quando  $V_i > 0$ , <sup>in tale istante  $t$</sup>  e diciamo che non è passivo quando  $V_i < 0$ ].

Tali proprietà valgono anche per una rete in cui un solo lato è un generatore e tutti gli altri sono bipoli passivi, normali o anomali. Dimostriamo allora il seguente teorema.

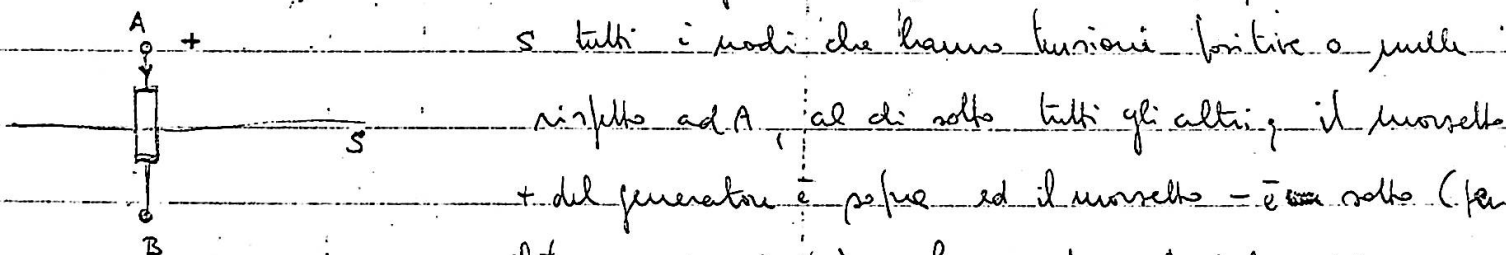
In una rete formata di bipoli passivi e di un solo generatore nessuna tensione è maggiore della tensione del generatore. Consideriamo il nodo A (dopo aver fissato un riferimento).

Se in quel nodo non converge <sup>o converge</sup> il generatore, quel nodo ha un potenziale intermedio nelle reti. C'è per lo meno una corrente entrante ed una uscente; per le prime  $V_{BA} > 0$

e  $V_{AC} > 0$  e quindi il potenziale di A è intermedio tra il minimo ed il massimo.

Se ne deduce che il potenziale massimo e minimo sono nei nodi in cui converge il generatore, quindi le d.d.p. maggiori e minime sono tra i nodi del generatore (beninteso che il gen. è l'unico bip. non passivo della rete).

Consideriamo un lato passivo: disegna una superficie  $S$  e disegna al di sopra di  $S$  tutti i nodi che hanno tensioni positive o nulle



rispetto ad A, al di sotto tutti gli altri; il morsetto + del generatore è sopra ed il morsetto - è sotto (per

il teorema precedente). Le correnti nel lato del generatore

è negativa. Esisteranno lati collegati a nodi fra l'uno

di una parte e l'altro dall'altra di  $S$  e la tensione è positiva verso l'alto e

$V_i > 0$ , e quindi le correnti va in basso per tutti i lati meno che per il generatore.

Quindi, per la conservatività delle correnti, le correnti nel generatore è maggiore

delle correnti che passano sugli altri lati. (Stessa amplificazione delle tensioni e

delle correnti). - Tenete presente che il teorema vale istante per istante, e ancora così:

se in un dato istante nella rete un solo bipolo è attivo, e tutti gli altri sono passivi,

allora in quell'istante tensioni e correnti nel lato attivo sono i più grandi che si trovano nella rete.



Terminiamo poi l'analisi puramente geometrica delle reti - Riprendiamo l'analisi completa; supponiamo che la rete si possa descrivere con le equazioni:

$$\begin{cases} V+E = ZI & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{Z}I = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{E}V = 0 & (3) \end{cases}$$

Dal punto di vista della soluzione numerica questo sistema è troppo grosso (2<sup>a</sup> equazioni in 2<sup>a</sup> incognite). Se eliminiamo  $V$  tra (1) e (3) otteniamo:

$$(l-u+1) \begin{cases} \bar{E}ZI = \bar{E}E & (4) \end{cases}$$

~~per ogni nodo~~  $(u-1) \begin{cases} \bar{Z}I = 0 \end{cases}$  ~~in tutto~~ in tutto ho le equazioni in  $l$  incognite (le correnti di lato):

$$\begin{cases} \bar{Z}E = \bar{E}ZI & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{Z}I = 0 & (6) \end{cases}$$

Il sistema è più semplice di quello di partenza. Ad ogni  $ZI$  si fa precedere un più o meno  $\bar{Z}$  e concorda con il verso di percorrenza della maglia, ogni  $E$  va preso col + se la freccia coincide col verso di percorrenza della maglia. Ogni soluzione  $I$  delle (5) e (6) viene una combinazione lineare <sup>maglie</sup> delle  $E$  e delle impedenze  $Z$  dei lati:

$$I_h = \sum_{k=1}^l Y_{hk} E_k \quad (7)$$

Le  $Y_{hk}$  sono funzioni razionali fatte di  $S$ .  $Y_{hk}$  indice ammettente mutua fra lati. Eliminiamo ora il caso in cui si possa descrivere la rete con le equazioni:

$$\begin{cases} I+A = YV & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{E}V = 0 & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{Z}I = 0 & (10) \end{cases}$$

Quando come prima <sup>(4)</sup>:

$$\begin{cases} \bar{E}A = \bar{E}YV & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{E}V = 0 & (12) \end{cases}$$

Le equazioni in  $l$  incognite ( $V$ ). Ogni  $YV$  va preso col + se ~~il più~~ il più delle tensioni non è il più del nodo;  $A$  va preso col segno + se la  $A$  va in senso contrario al

(2) - Eliminando cioè  $I$  tra le (8) e le (10).

Le soluzioni  $\bar{e}$  del tipo:

$$T_k = \sum_{h=1}^l z_{hk} A_k \quad (1)$$

$z_{hk}$  si dice impedenza mutua tra lati.

Per una rete descritta tutte con le convenzioni degli utilizzatori è:

$$\sum_{h=1}^l T_h I_h = 0 \quad (2)$$

Supponiamo che su ogni lato  $T_k = -E_k + z_k I_k$  ; alimentiamo con  $E'_k$  e con  $E''_k$ :

$$T'_k = -E'_k + z_k I'_k \quad T''_k = -E''_k + z_k I''_k \quad (3)$$

risultate:

$$\sum_{h=1}^l T'_h I'_h = 0 \quad \sum_{h=1}^l T''_h I''_h = 0 \quad (4)$$

$$\text{cioè:} \quad \sum_{h=1}^l T'_h I''_h = \sum_{h=1}^l T''_h I'_h \quad (5)$$

$$\text{ovvero:} \quad \sum_{h=1}^l (-E'_h + z_h I'_h) I''_h = \sum_{h=1}^l (-E''_h + z_h I''_h) I'_h \quad (6)$$

$$\text{e infine:} \quad \boxed{\sum_{h=1}^l E'_h I''_h = \sum_{h=1}^l E''_h I'_h} \quad (7)$$

che ~~non~~ rappresenta il teorema di reciprocità. Supponiamo  $E'_k$  tutti zero eccetto uno, e lo stesso per  $E''_k$ ; la (7) diventa:

$$E'_k I''_k = E''_k I'_k \quad (8)$$

$$\text{ovvero:} \quad \frac{I'_k}{E'_k} = \frac{I''_k}{E''_k} \quad (9)$$

$$\text{che scriviamo:} \quad Y_{kh} = Y_{hk} \quad (10)$$

(vedi (1) di pag. precedente)<sup>(1)</sup> La stessa dimostrazione si può fare per le  $z_{hk}$  che compaiono nelle (4).

Supponiamo di avere una corrente ciclica che gira tra un lato di coaltro e corrispondenti lati d'altro; Sarà  $\Sigma E =$  combinazione lineare delle correnti cicliche  $J$ :

$$[(2-n+1) equazioni] \quad \bar{\Sigma} E = \sum z^{(u)} J$$

$$\text{o meglio:} \quad \bar{\Sigma} E^{(u)}_n = \sum_{h=1}^{l-u+1} z^{(u)}_{nh} J_h$$

$z^{(u)}_{nn}$  si dice impedenza propria delle maglie  $n$  ed è la somma delle impedenze delle

(1) - Il teorema di reciprocità vale quindi con tutta generalità; basta che la rete sia formata di bipoli lineari.

maglia (e il suo di per sé delle maglie è però coincidente con le correnti cicliche).  $Z_{rs}^{(u)}$  è la somma delle impedenze comuni alle maglie  $r$  ed  $s$ , (o al più o al meno a seconda che le correnti sono equivalse ~~contravalse~~). Se la rete è fissa e le correnti sono tutte equivalse (in assoluto) le  $Z_{rs}^{(u)}$  ( $r \neq s$ ) sono tutte negative. Il sistema ottenuto è di  $l-u+1$  equazioni in  $l-u+1$  incognite. La matrice di maglia è anche essa simmetrica.

Trattazione duale: tensione tra il nodo  $r$  ed il nodo di riferimento:

$$V_r^{(u)}$$

E troviamo:

$$A_r^{(u)} = \sum_{s=1}^{u-1} Y_{rs}^{(u)} V_s^{(u)}$$

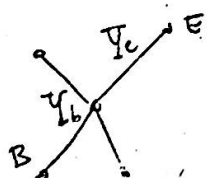
$Y_{rs}^{(u)}$  è detta ammettenza di nodo (mutua o propria). La trattazione non è perfettamente duale poiché si prendono i potenziali di un albero a stelle, mentre bisognerebbe fare in generale per un qualunque albero  $T$ .  $Y_{rr}^{(u)}$  è la somma di tutte le ammettenze che fanno capo al nodo  $r$ ;  $Y_{rs}^{(u)}$  è l'ammettenza tra il nodo  $r$  ed il nodo  $s$  con il segno meno. Le equazioni dei nodi sono  $(u-1)$  equazioni in  $(u-1)$  incognite.

Dal numero di nodi è ovvio che se  $(l-u+1) < (u-1)$  conviene lavorare con le correnti cicliche e viceversa nel caso contrario.

Una rete mista e quando non è possibile rappresentare tutti i bipoli nello stesso modo ( $V+E = \sum I$  o viceversa:  $I+A = \sum V$ ); non è <sup>allora</sup> possibile fare uso delle correnti cicliche se potenziali ai dei nodi.

Si usano, ad esempio, le (1), (2) e (3) di pg. 13, nel caso siano presenti dei generatori ideali di corrente: alcune correnti ~~non~~ <sup>inoltre</sup> ~~non~~ <sup>note</sup> nelle  $\sum I = 0$ , niente di male. Dualmente nel secondo caso (8), (9) e (10) di pg. 13 ci saranno alcune  $V$  note. Però per due casi c'è una tensione e una corrente ignote che figurano nelle prime equazioni; però il numero di incognite totale è invariato.

Ricordare le formule di trasformazione stella-poligono e viceversa e la giustificazione del fatto che non si può fare la trasformazione poligono-stelle (sul Parevesi, pag. 107) stelle poligono:

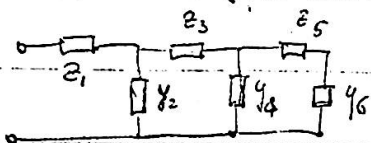


$$V_{BE} = \frac{Y_c \cdot Y_b}{\sum Y_k}$$

- (1) - e compariamo altrettante tensioni incognite (nei lati dei generatori di corrente) nelle  $\sum V = 0$ . Il numero delle equazioni ed il numero delle incognite è sempre lo stesso.
- (2) - nelle  $\sum I = 0$ , ma ci saranno altrettante  $I$  (nei lati dei gen. di tensione) incognite nelle  $\sum I = 0$ . Tutto come prima.



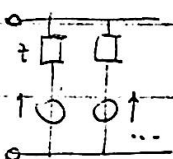
rete a scala (Marseni pg. 103):



$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \dots}}}$$

(\*)

Teorema di Millman. Consideriamo tanti generatori in ~~parallelo~~ serie e vogliamo trovare l'equivalente in parallelo:

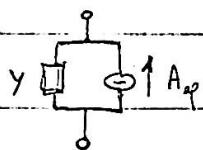


$$I_{cc} = \sum I_{cc_i}$$

$$Y_{eq} = \sum Y_i$$

che ammette il duale

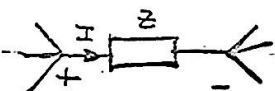
(vedere pg. 112 del Marseni).



Esaminiamo ora il caso, importantissimo per le applicazioni, in cui

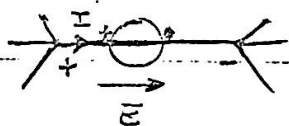
~~non~~ si voglia conoscere le variazioni di una certa grandezza di rete, nel caso variino le caratteristiche di un lato della rete, in particolare di una impedenza. Questo problema si pone specialmente in questioni di sensibilità o di stabilità delle caratteristiche di una rete, ecc. Enumeriamo allora il seguente, importantissimo:

Teorema di ~~compensazione~~ compensazione: dato il lato di una rete, che subisca un variazione, possiamo sempre sostituire tale lato con un generatore di tensione (o di corrente) opportuno. Infatti nel caso reale:



$$V = ZI$$

nel caso ideale:



$$V + E = 0$$

cioè tale che sia:

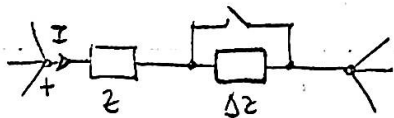
$$E = -V = -ZI$$

e quindi il teorema è dimostrato. Esso vale anche nel caso il bipo non sia lineare. In sostanza si è sostituita una impedenza con un generatore comandato.

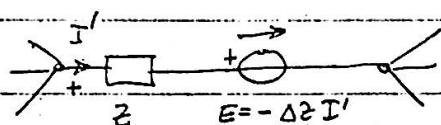
Sull'ipotesi allora che l'impedenza del lato  $z$  possa variare di  $\Delta z$ , prima la corrente

è  $I$ , dopo è:

$$I' = I + \Delta I$$



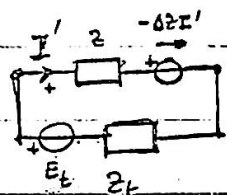
o2 lo sostituisco con un generatore di tensione. Applicando il principio di



sovrapposizione degli effetti: scriviamo  $I'$  come somma di un termine dovuto ad  $E$  ed uno dovuto a tutti gli altri generatori della rete:

$$I' = I + \frac{E}{Z + Z_L} \quad (1)$$

perché il primo termine si ha quando  $E$  è cortocircuitato; il secondo si ha quando tutta la rete meno il lato è annesso, cioè si riduce ad una impedenza  $Z_L$ ; dalla (1):



$$I' = I + \frac{\Delta Z I'}{Z + Z_L} \quad (2)$$

e infine:

$$I' \left( 1 + \frac{\Delta Z}{Z + Z_L} \right) = I \quad (3)$$

o anche:

$$I' = \frac{I (Z + Z_L)}{Z + Z_L + \Delta Z} \quad (4)$$

Il problema è quindi risolto, nota la  $Z_L$ . Dalle (4) si può ricavare  $\Delta I$  o  $\Delta I/I$  se  $\Delta Z$  è piccolo:

$$\frac{\Delta I}{I} \approx - \frac{\Delta Z}{Z + Z_L} \quad (5)$$

In forme infinitesime:

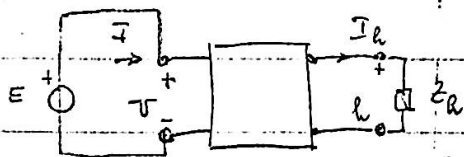
$$dE = -dZ I' = -dZ (I + dI) \quad (6)$$

ovvero:

$$dE = -I dZ - dI dZ \approx -I dZ \quad (7)$$

cioè, una variazione infinitesima dell'impedenza di un lato si può rappresentare con un generatore infinitesimo  $dE = -I dZ$ , essendo  $I$  la corrente prima della variazione di  $Z$ .

Tesore di Cohn: sufficiamo di avere una rete di bipoli alimentati da un solo generatore e consideriamo un lato che possa subire una variazione infinitesima. Si può rappresentare la cosa in questo modo:



Diciamo  $z$  l'impedenza ai morsetti del generatore, in seguito ad una variazione infinitesimale di  $z_L$ ,  $z$  varia di una certa quantità che calcoliamo:

$$z = \frac{V}{I}$$

Supponiamo prima che le variazioni avvengano avendo  $V$  costante (il che non è sempre vero):

$$\Delta z = - \frac{V}{I^2} \Delta I$$

~~Però~~  $V$  dipende dal lato  $h$  la corrente  $I_h$ , ma ~~anche~~ vale il teorema di reciprocità, e quindi se mettiamo  $V$  in pratica e cortocircuitiamo l'ingresso troviamo  $I_h$  all'ingresso.

E se fare  $V'$  invece di  $V$ , otterremo in ingresso  $I_h \frac{V'}{V}$  poiché la rete è lineare.

Se allora al posto di  $V$  ci mettiamo  $\Delta E$ , in ingresso troveremo  $I_h \frac{\Delta E}{V}$ ; se però è

$\Delta E = -I \Delta z_h$ , nel generatore è proprio quello che ci vuole per simulare le variazioni infinitesime di  $z_h$  nel lato  $h$ . E quindi in ingresso ho  $-I_h^2 \frac{\Delta z_h}{V}$  che è proprio il  $\Delta I$  che cerchiamo:

$$\Delta I = -I_h^2 \frac{\Delta z_h}{V}$$

e quindi infine:

$$\Delta z = \frac{I_h^2}{I^2} \Delta z_h$$

in notazione infinitesimale:

$$\frac{\partial z}{\partial z_h} = \frac{I_h^2}{I^2}$$

Notare che il secondo membro è costituito da un numero: due correnti note, prima delle variazioni di impedenza.

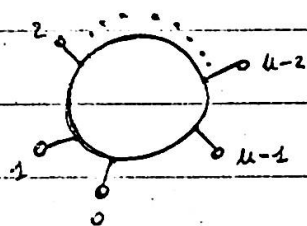
Il teorema di Thévenin e Norton valgono allora per qualunque rete lineare, non solo per reti RLC lineari.

$\Delta I = \Delta I_h \frac{\Delta z_h}{z_h}$   
 Se la corrente d'ingresso  $I_h$  è costante, allora  $\Delta I = \Delta I_h \frac{\Delta z_h}{z_h}$  e si può anche scrivere  $\Delta I = \Delta I_h \frac{\Delta z_h}{z_h}$ .



# Reti lineari più generali.

Consideriamo ora una rete lineare più complessa, non più di bipoli. [Si potrebbe dimostrare che  $\mu$  amplificatore è necessario un elemento con almeno 3 morsetti, non con 2], che può non essere fisicamente decomponibile in bipoli. Supponiamo che i componenti abbiano  $\mu$  terminali e supponiamo che il ~~no~~ <sup>no</sup> interno ~~no~~ <sup>no</sup> qualunque.



Supponiamo che il distributore interagisca con l'universo solo attraverso i morsetti <sup>per conoscere il comportamento del sistema</sup> ~~per conoscere il comportamento del sistema~~ dovremo conoscere correnti e tensioni ai ~~no~~ <sup>no</sup> morsetti.

Fra gli  $\mu$  terminali ne possono utilizzare ~~quasi tutte~~ <sup>scrive</sup> tutte le portazioni topologiche più ~~scritte~~ <sup>scritte</sup> le

reti (alberi, maglie etc); ~~non esiste~~ [notare che non esistono i lati come bipoli, però

le considerazioni topologiche valgono lo stesso, <sup>allora</sup> ~~non~~ <sup>non</sup> si tiene conto delle equazioni

finché <sup>tra i morsetti</sup>  $\sum V + E = \sum I$  etc.]. Allora le tensioni che si possono misurare <sup>tra i morsetti</sup> sono  $\binom{\mu}{2}$ , le quelle

indipendenti sono  $\mu - 1$ , come i lati d'albero; <sup>tra i morsetti</sup> le correnti <sup>indipendenti</sup> ~~sono~~ <sup>sono</sup>  $\mu - 1$ , finché

la  $\mu$ -esima è determinabile dal principio delle correnti applicato allo  $\mu$ -esimo.

Nella pratica si prendono come tensioni indipendenti

quelle rispetto al centro di un albero a stella, e le correnti si prendono tutte quelle

ai morsetti eccetto che quelle del nodo di centro stella. Le equazioni <sup>debbono essere</sup> ~~sono~~ <sup>sono</sup> finché

in questo caso  $\mu - 1$ , <sup>(1) affluente</sup> ~~sono~~ <sup>sono</sup> note tutte le tensioni, indipendenti, siano note tutte le

correnti indipendenti, e viceversa. Nel caso lineare quindi sarà necessariamente:

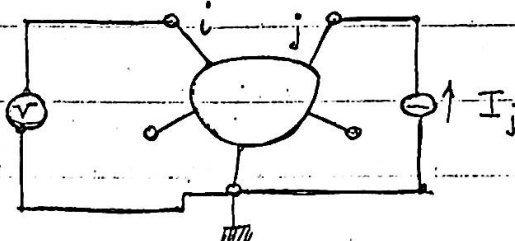
$$V_i = \sum_{k=0}^{\mu-2} Z_{ik} I_k + V_{i0} \quad (1)$$

essendo  $V_{i0}$  la tensione del morsetto  $i$ -esimo, rispetto al riferimento, a vuoto. In forma

$$[V] + [E] = [Z][I] \quad (2)$$

dove la  $[E]$  è la matrice delle tensioni a vuoto.  $Z_{ij}$  si ottiene lasciando aperti tutti i morsetti meno  $i$  e  $j$ , immettendo la  $I_j$ , misurata  $V_i$  (rispetto a massa), facendo il rapporto:

$$\frac{V_i - V_{i0}}{I_j} = Z_{ij}$$



(1) - In totale ho scritto  $\mu - 1$  equazioni del tipo  $\sum V = 0$  ed una sola equazione del tipo  $\sum I = 0$ ; in totale ho un sistema di  $\mu$  equazioni in  $(\mu - 1) + \mu = 2\mu - 1$  incognite; ho quindi bisogno di altre  $\mu - 1$  equazioni finché il sistema diventi di  $(\mu) + (\mu - 1) = 2\mu - 1$  equazioni in  $2\mu - 1$  incognite.

[21c] può essere simmetrica; lo è se <sup>l'u-polo è una</sup> rete di bipoli. (\*)

Per una rete di  $n$ -bipoli si potrà scrivere, per ogni di essi:

$$[V] + [E] = [Z][I]$$

e scriveremo ancora l'equazioni dei nodi e delle maglie, essendo tali nodi e maglie indipendenti. Ritrovando in evidenza due morsetti della rete otteniamo un bipolo lineare ma non decomponibile in bipoli; <sup>il quale può vale la  $V+E=ZI$</sup>  e allora per un bipolo

qualunque è sempre  $V+E=ZI$  ai terminali, finché tale bipolo sia lineare. (1)

Sull'insieme di estrarre dalle rete fin coppie di terminali: <sup>avremo</sup> ~~totalmente~~ ~~totalmente~~

per un  $n$ -bipolo. Sarà anche, per tutte tali coppie di terminali:

$$[V] + [E] = [Z][I]$$

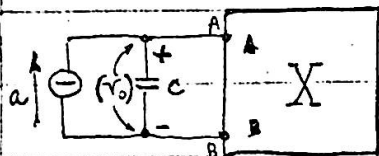
[Questo lo faccio in potenza finché ad ogni port voglio collegare un bipolo]. Da questo segue che ad ogni port entra ed esce la medesima corrente. Le tensioni che intercorrono sono allora solo quelle tra i due elementi di una stessa porta. Quando allora l' $n$ -bipolo è noto (note tensioni e correnti alle porte), l'oggetto finco corrispondente non è totalmente descritto; la descrizione è totale solo quando lo considero a bipoli esterni, uno per ogni porta.]

Tra tutti i modi possibili di estrarre coppie di morsetti, c'è anche il modo completo, e ricado nelle rappresentazioni ad  $n$ -polo. Per intenderci si intende il processo che fa passare da [21] all' $n$ -polo che la realizza, ([E] è irrilevante finché si sintetizza sempre con generatori indipendenti).

Per tutte le considerazioni precedenti doveva essere scarica la rete per  $t \leq 0$ . Se questo non avviene si può così: si sostituiscono le f.e.m. e le correnti imposte con le stesse moltiplicate per  $1(t)$ , e si tiene conto che c.e.d.l. non sono scarichi per  $t=0$ . La cosa è ragionevole, finché la matrice di  $v_c$  e  $i_c$  è proprio la matrice di stato del sistema, cioè  $v_c$  e  $i_c$  sono proprio quelle grandezze che, se sono assegnate ad un istante, è assegnato lo stato del sistema per  $t > 0$  finché siano note le grandezze imposte, come vedremo in seguito.

(1) - In effetti si vede a questo punto che tutte le considerazioni che si sono svolte sulle reti LDC valgono in ogni caso, finché le reti siano lineari.

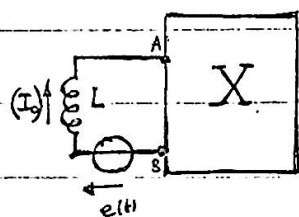
Sull'analisi ad esempio che all'istante  $t=0$  tutte le grandezze impresse cessino di agire: la rete evolve spontaneamente finché  $C$  ed  $L$  non sono scarichi. La memoria di ciò che è avvenuto per  $t < 0$  è conservata esclusivamente dai  $C$  ed  $L$ . È ovvio allora che se si riesce ad ottenere con un artificio dei condensatori e gli induttori siano carichi per  $t=0$  si realizza quello che si desiderava. Ad esempio per un



$$q(t) = C V_0 u(t)$$

$Q = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt = C V_0$  che passa tutta in  $C$  finché rappresenta un corto per  $u(t)$

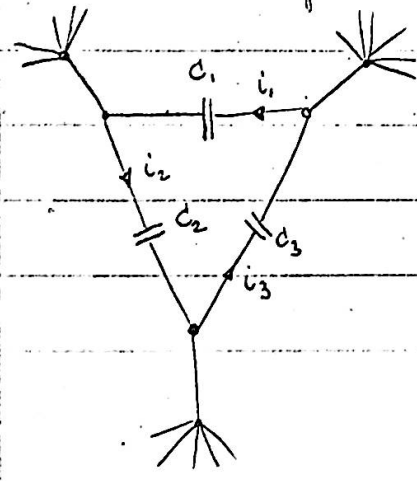
viene, una carica  $C V_0$  per  $t=0$ , e dopo finiscono; quindi questo è proprio l'artificio che cercavamo. Analogamente, per l'induttore la



$$e(t) = L I_0 u(t)$$

$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} e(t) dt = \frac{1}{L} I_0 = I_0$  che passa in  $L$

maio tali, occorre che la maglia dei condensatori ~~non~~ <sup>anche</sup> persista tagliando tutti i lati che non contengano un ~~potenziale~~ <sup>di induttori</sup> condensatore (o più condensatori); il ciclo deve rimanere anche se si cortocircuitano tutti gli  $R$  e  $i.c.$  Sull'analisi che si sta, ad esempio, una maglia di condensatori. Tra le altre relazioni per la maglia bisogna scrivere:



$$V_1 + V_2 + V_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = 0$$

$$i_1 = C_1 \dot{V}_1$$

$$i_2 = C_2 \dot{V}_2$$

$$i_3 = C_3 \dot{V}_3$$

- (1) - Finché una parte di carica passa allora anche nel ramo di condensatori che, per ipotesi, sono scarichi.
- (2) - Nell'esempio indicato a lato, se passa corrente in  $L$  passa corrente anche in  $L_1$  ed  $L_2$  per la solenoidaltà della corrente. Pertanto non deve esistere alcun ciclo esclusivamente di induttori complementari  $L$ .





da cui:

$$\frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} + \frac{i_3}{C_3} = 0$$

sostituendo, tra quelle scritte prima, la  $i_3 = C_3 \dot{v}_3$ , e mi riduco al sistema:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad \frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} + \frac{i_3}{C_3} = 0 \quad i_1 = C_1 \dot{v}_1 \quad i_2 = C_2 \dot{v}_2$$

E quindi:

$$v_3 = -(v_1 + v_2) \quad i_3 = -\left(\frac{C_3}{C_1} \dot{v}_1 + \frac{C_3}{C_2} \dot{v}_2\right) \quad (1)$$

in generale sarebbe:

$$v_2 = -\sum_i v_i \quad i_2 = -\frac{1}{S_2} \sum_i S_i i_i \quad (2)$$

Sostituisco  $v_3$  ed  $i_3$  in ogni altra equazione in modo da farli sparire dal sistema di equazioni; e allora aggiungo a  $C_1$  e  $C_2$  i generatori fittizi in parallelo e sopprimo momentaneamente il condensatore  $C_3$ , la maglia di condensatori non c'è più, e quindi non ho difficoltà. Adesso ripristino il condensatore  $C_3$  ed utilizzo le equazioni già scritte. Chiarisco meglio il procedimento da seguire in questi casi:

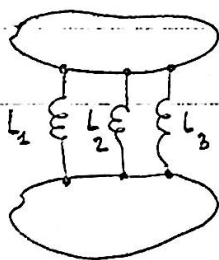
~~Consideriamo~~ immaginiamo di ripetere un altro che comprende  $C_1$  e  $C_2$ , e quindi non  $C_3$ , che è di cablo. C'è allora una sola equazione che contiene  $v_3$  ed

è la  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ . Scrivendo le equazioni dei nodi la  $i_3$  figura in due sole equazioni. Fra le equazioni di Ohm ce n'è una sola che contiene  $i_3$  e  $v_3$ :  $i_3 = C_3 \dot{v}_3$ .

Se adesso sopprimiamo  $C_3$  le maglie indipendenti diventano due in meno, e infatti la  $i_3 = C_3 \dot{v}_3$  non la si scrive più. La rete che conduce al nuovo gruppo di equazioni è trattabile col solito metodo poiché non c'è una maglia di condensatori.

Un'altra volta trattare le reti in modo normale, bisogna scrivere le equazioni che contengono  $i_3$  e  $v_3$  sostituendole però con le (2).

Il caso duale è perfettamente analogo. Brevemente, per un circuito di 3 induttori:



$$\sum i = 0$$

$$L_1 \dot{i}_1 = v_1 \quad L_2 \dot{i}_2 = v_2 \quad L_3 \dot{i}_3 = v_3$$

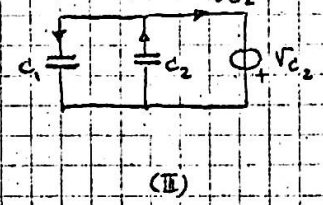
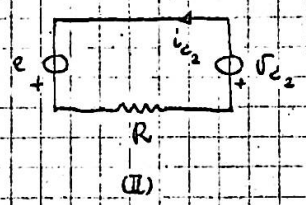
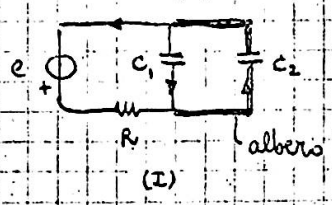
e ritorna:

$$\sum i = 0$$

$$\sum \frac{v_i}{L_i} = 0$$

da portatine alla  $\sum i = 0$  e  $i_3 = v_3$  (Terzo volume del Guillemin).

Ad esempio: data la rete (I), la si divide in due reti (II) e (III) come indicato:



indi si calcola le correnti  $i_{c_2}$  sulle due reti (II) e (III):

$$i_{c_2} = \frac{e - v_{c_2}}{R}$$

$$i_{c_2} = (c_1 + c_2) \dot{v}_{c_2}$$

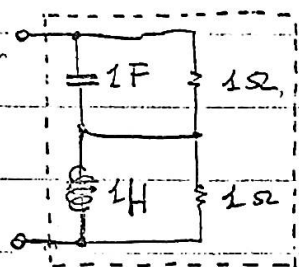
e si eguagliano le due correnti trovate; da cui l'equazione differenziale in  $v_{c_2}$  richiesta:

$$(c_1 + c_2) \dot{v}_{c_2} = \frac{e - v_{c_2}}{R}$$

~~Esaminiamo ora il comportamento libero della rete:~~ <sup>la rete</sup> ~~per  $t < 0$  la rete è eccitata;~~ <sup>la rete</sup> ~~per  $t = 0$  sopprimiamo i generatori;~~ <sup>la rete</sup> ~~l'evoluzione delle tensioni e correnti per  $t > 0$  è il comportamento libero della rete.~~ <sup>la rete</sup> ~~Il comportamento libero della rete libero è determinato dai generatori in = pulsini aggiunti<sup>(1)</sup>.~~ <sup>la rete</sup> ~~Può però succedere che non si riesca a produrre sulla rete uno stato~~

(1) - ... per tener conto delle condizioni iniziali.

iniziale che mette in evidenza tutti i possibili integrali delle equazioni differenziali omogenee per il circuito; in tal caso dico che esistono dei modi nascosti di eccitazione della rete, (che non riesco ad eccitare con generatori per  $t < 0$ ).



L'impedenza del circuito, designato a lato  $z$ :

$$z = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+\frac{1}{s}} = 1 \quad \Omega$$

Cioè il circuito presenta resistenza di  $1 \Omega$  a tutte le frequenze. E oltre visto dai terminali il sistema è un

resistore, cioè non c'è nessun elemento che mi indichi il comportamento reattivo del sistema (dai morsetti). Può se carico il condensatore <sup>(o l'induttore)</sup> c'è un comportamento diverso tutt'altro che banale (modo nascosto).

I modi nascosti si possono rivelare rendendo accessibili tutti gli elementi reattivi della rete; tuttavia, nelle considerazioni che seguono, supponiamo sempre che non esistano modi nascosti. Ci chiediamo, almeno che non esistano modi nascosti, quanti siano i modi della rete. Terminiamo di scrivere tutte le equazioni delle reti nel modo seguente (assumendo ~~come~~ come variabili che ci interesseranno le tensioni nei condensatori e le correnti negli induttori):

$$\begin{aligned} \text{induttori} \quad \left\{ \begin{array}{l} sL_1 I_{L_1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots = V_{L_1} \\ 0 \quad sL_2 I_{L_2} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots = V_{L_2} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \\ \text{Condensatori} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad sC_1 V_{C_1} \quad \dots \dots = I_{C_1} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad sC_2 V_{C_2} \quad \dots \dots = I_{C_2} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \end{aligned}$$

equazioni algebriche (senza  $s$ )  
della maglia ~~che~~  
dei modi



Anullo tutti i secondi membri e dico che la soluzione non banale delle vibrazioni libere è quella per cui il determinante (in  $s$ ) dei coefficienti è nullo:

$$\det A(s) = 0 \tag{1}$$

(le radici sono gli esponenti da dare ad  $e$ ) - Il grado <sup>del polinomio (1)</sup> è ovviamente  $l + c$ , essendo  $l$  il numero di induttori e  $c$  il numero dei condensatori (perché  $s$  compare solo in  $e^{st}$ ). Quindi il numero di modi è  $l + c$ ; o meglio, dato che per ogni maglia di condensatori e per ogni ciclo di induttori viene costituita una equazione in  $s$  con una algebrica<sup>(2)</sup>, il numero di modi è:

$$l + c = m_c - c_c$$

( $m_c$  = maglie indip. di condensatori;  $c_c$  = cicli indipendenti di induttori). Se troviamo  $s=0$  come radice vuol dire che la rete può <sup>ammettere una</sup> ~~proporzionale~~ <sup>come modo</sup> corrente costante, e questo avviene se esistono cicli di condensatori e <sup>maglie</sup> ~~cicli~~ di induttori; in tal caso le correnti costanti formano parte delle frequenze naturali. Se escludiamo le  $s=0$ , allora il numero dei modi di vibrazione libera è:

$$l + c - m_c - c_c = n \quad (\text{numero di frequenze al finito})$$

Inoltre ci possono essere radici doppie etc, cioè il numero di frequenze distinte è minore di  $n$ , delle quantità  $m_c + c_c$ .

In una maglia di condensatori può esistere il modo  $s=0$ , e nel ciclo di induttori possono esistere transienti di frequenze infinite ( $s=0$ ); cioè  $m_c + c_c$  è il numero di frequenze naturali infinite. Il numero totale di frequenze naturali è pertanto proprio  $l + c$ , di cui  $m_c + c_c$  sono  $\infty$ ,  $m_c + c_c$  sono nulle, le altre sono quelle normali. Da queste considerazioni segue un corollario curioso:

Una rete di condensatori e di induttori che non abbia cicli né maglie di condensatori o di induttori ha un numero di lati pari.

(2) - Cioè: per ogni maglia di condensatori e per ogni ciclo di induttori c'è una condizione iniziale in meno rispetto al numero totale di condensatori e di induttori.

## Teoria dei sistemi mediante le variabili di stato

Le variabili significative di un sist. elettrico sono tutte le tensioni e le correnti. Tra di esse vengono distinte:  $[x]$  o variabili di stato,  $[u]$  o di ingresso,  $[y]$  o di uscita.

~~Le variabili di stato sono quelle che dall'esterno del sistema possono essere manipolate ad arbitrio. [nel caso delle reti sono i generatori ideali].~~

Le  $[x]$  sono quelle minime numero di variabili che, note  $p.t. = t_0$ , unite alle conoscenze di  $[u]$  nell'intervallo  $t_0 \rightarrow t$ , <sup>danno</sup> l'andamento di tutte le variabili significative  $p.t. = t_0 \rightarrow t$ .

Le  $[y]$  sono il risultato dell'applicazione di  $[x]$  al sistema, e  $[u]$  variano, su una rete, a seconda degli scopi.

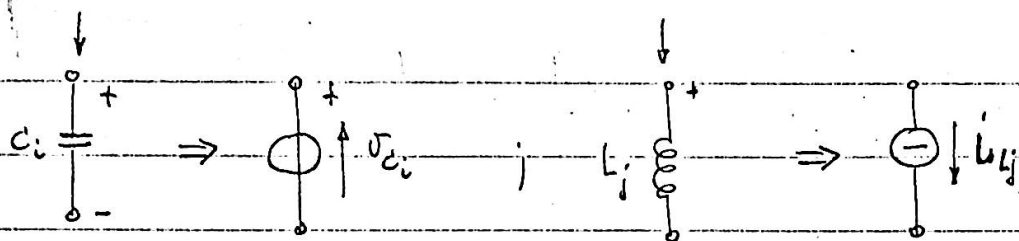
In una rete R.L.C. (ma i risultati sono validi in generale), cioè <sup>più</sup> rete composta da L, C e da componenti indipendenti dalla frequenza (resistori, generatori, filtri o no, etc.), le variabili di stato sono le tensioni nei condensatori e le correnti negli induttori, poiché sono queste grandezze che è necessario conoscere per determinare l'evoluzione della rete, avendo solo gli L e i C capaci di immagazzinare energia. <sup>Infatti,</sup> ~~il sistema~~ se si scrivono tutte le equazioni (el) delle reti, constatiamo che le sole variabili che compaiono sotto il segno di derivate sono proprio le tensioni nei C e le correnti nei L, quindi la soluzione dipende solo dalle condizioni iniziali su tali variabili; sarà quindi, per le reti:

$$[x] \equiv \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$$

Le quali però non sono il numero minimo di variabili di stato, in quanto nel caso i condensatori formino maglie e gli induttori formino cicli, da alcuni <sup>di essi</sup> se ne ricavano altre; quindi il numero di variabili indipendenti è:

$$n + G - \mu_C - \mu_L$$

Sufficiente per adorno che per:  $\mu_C = 0$  - cominceremo a sostituire ogni condensatore con un generatore di tensione ideale ~~filtra~~ di tensione, ed ogni L con una di corrente:



La rete è composta da resistori e generatori (distinguibili in due classi, ma equivalenti al fine di scrivere le equazioni delle reti, che è diventata di tipo misto) - Risolviamo la rete mista (equazioni algebriche) rispetto alle correnti dei condensatori e le tensioni sugli induttori ( $i_{C_i}$ ,  $v_{L_j}$ ). Troviamo ogni  $i_{C_i}$  ed ogni  $v_{L_j}$  come combinazioni lineari di tutti i generatori di tensione e corrente presenti nella rete:

$$\begin{cases} i_{C_i} = \sum_2 \alpha_i v_{C_2} + \sum_1 \beta_i i_{L_1} + \sum_t \gamma_i e_t + \sum_z \delta_i a_z \\ v_{L_j} = \sum_2 \alpha'_j v_{C_2} + \sum_1 \beta'_j i_{L_1} + \sum_t \gamma'_j e_t + \sum_z \delta'_j a_z \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

ma è:  $i_{C_i} = C_i \frac{dv_{C_i}}{dt}$   $v_{L_j} = L_j \frac{di_{L_j}}{dt}$

A sinistra delle equazioni il sistema ha le derivate delle variabili di stato, e in definitiva otteniamo un sistema del tipo:

$$[\dot{x}] = [A][x] + [B][u] \quad (1)$$

E troviamo che  $[y]$  sarà pure una combinazione lineare dei generatori di tensione e corrente:

$$[y] = [C][x] + [D][u]$$

Abbiamo pertanto operato la separazione della parte differenziale della parte algebrica, ma la parte differenziale è di per sé risolvibile (mentre quella che ricaviamo da Kirchhoff non lo può di per sé) - Si può cioè risolvere solo la  $[\dot{x}] = [A][x] + [B][u]$ , e trovare  $[x(t)]$ ; trovato il quale poi, se vogliamo, trovare  $[y]$  dalle  $[y] = [C][x] + [D][u]$ . In definitiva tutto il problema è trovare l'evoluzione nel tempo delle variabili di stato; il resto è un problema marginale, che non può mai essere risolto se prima non si è risolto il primo problema, e questo accade in qualunque modo io voglia risolvere la rete - Da notare anche che la soluzione del problema principale risulta estremamente semplice applicando la sovrapposizione degli effetti.

La soluzione generale del sistema (1) è la solita:

(1) -  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$  dipendono tutte dalle sole resistenze presenti nella rete, o per lo meno dai soli componenti indipendenti dalla frequenza.





Previsto l'andamento  $p$   $t=0+$  e  $t=\infty$ , le frequenze naturali mi danno una informazione di quel che succede in mezzo.

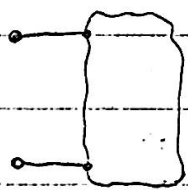
Una rete puramente reattiva non si può schematizzare,  $p$   $t=\infty$ , con tutti corti <sup>o aperti</sup> perché posto si può fare solo se la rete è anche dissipativa, mentre in quella reattiva i transienti non si spengono mai. I.

Per risolvere l'equazione  $E(s) = [A](s)$  io devo spegnere tutti i generatori; <sup>dov'è</sup> ~~ovvero~~ corto circuito se i generatori di tensione e aprire quelli di corrente; (per un bipolo non posso trovare le frequenze naturali in generale, ma solo se è specificato quale generatore mette alla prova, in quanto a seconda dei due tipi di generatori ho differenti valori di  $u_c, u_L, c_c$  e  $c_L$ ); dopo scrivo le  $i(s) = [A](s)$ , le matrici  $[A]$  non dipende dai generatori che ho <sup>scelto</sup> ~~scelto~~, in quanto a posto fisso i morsetti delle rete essenziali, ed il tipo di loro connessione, in quanto già fissato.

Per un bipolo è:

$$\frac{V}{I} = Z = \frac{b_{ms}^m + \dots}{a_n s^n + \dots} \quad (1)$$

il grado del numeratore e quello del denominatore o sono uguali o differiscono di uno; infatti ai morsetti posso mettere un generatore di tensione o di corrente, e trovando

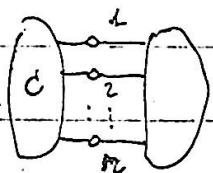


la soluzione dell'equazione associata nei due casi, trovo le radici del numeratore e del denominatore <sup>della</sup> ~~della~~ e allora è chiaro l'esito, finché al più nei due casi c'è un  $u_c, u_L, c_c$  o  $c_L$  in più o in meno;

cioè nei due casi le radici (frequenze naturali) del numeratore e del denominatore (= quando fisso la tensione ai morsetti e considero come input la corrente ai morsetti stessi; ovvero quando fisso la corrente ai morsetti e considero come input la tensione ai morsetti stessi) o sono in numero eguale (=  $2+0$ ), ovvero differiscono di una unità (= un  $u_c$ , ovvero un  $u_L$ , ovvero un  $c_c$ , ovvero un  $c_L$ , escluso o incluso nell'altro caso, ma non nell'altro, che mi fa diminuire, come sappiamo, di un'unità  $2+0$ ).

Nel caso ci sia una coppia di condensatori, non tutte le tensioni in tali condensatori

possiamo giocare il ruolo di variabili di stato; se la mappa è formata ad esempio da 3 condensatori solo due tensioni sono indipendenti: la terza è combinazione lineare delle altre due. (\*) In generale una rete composta di condensatori soltanto, può essere estratta dalla rete, e se  $n_2$  sono i rami di collegamento,  $n-1$  sono le tensioni indipendenti;



per scegliere indipendenti, capiamo come tensioni quelle che appartengono ad un albero reale di  $C$  che contenga  $n-1$  nodi coincidenti con  $n-1$  rami tra gli  $n$  di collegamento. Agli  $n-1$

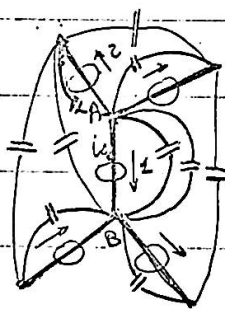
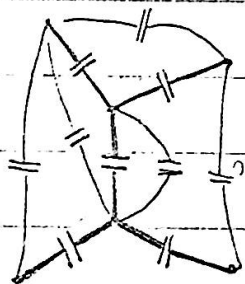
condensatori appartenenti ai lati dell'albero scelto sostituiamo i generatori di tensioni che esprimono le variabili di stato. Tutto procede come si era detto prima. Troviamo allora, in particolare:

$$i_{c_i} = \sum \alpha_i v_i + \sum \beta_i i_i + \sum \gamma_i v_i$$

non mi può più ora scrivere:

$$i_{c_i} = C \frac{dv_i}{dt}$$

perché non è vero, dato l'esistenza di una rete completa dei condensatori; ora dobbiamo scrivere che  $i_{c_i}$  è legata alla rete di condensatori, mediante la conoscenza delle rete stessa.



E allora possiamo scrivere che la corrente nel generatore  $i_{c_i}$  è la somma delle correnti che si ha cortocircuitando tutti gli altri generatori (nel qual caso tutta la rete si riduce a due nodi ~~essenziali~~).

che sono gli estremi del generatore non cortocircuitato ed ai soli condensatori che appartengono al ciclo che contiene tale generatore, ed ~~essi~~ <sup>essi</sup> hanno i capi nei due nodi ~~essenziali~~ <sup>essenziali</sup>.

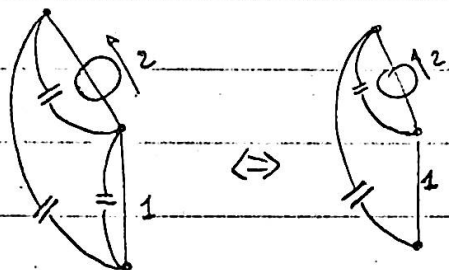
$$C_{11} = C_{c_i} = \sum C_{AB}$$

$$i_1 = C_{c_i} \dot{v}_{c_i}$$

più la somma delle correnti che passano in  $1$  quando tutti i generatori sono cortocircuitati meno una faccenda = dare posto una a tutti quelli presenti nella rete (sostituzione degli effetti).



In quest'ultimo caso la rete si riduce ad un insieme di condensatori che sono comuni al ciclo uno ed al ciclo due. Le capacità



è:

$$C_{12} = \sum C$$

essendo  $C$  le capacità comuni al ciclo 1 e 2.

E quindi, infine:

$$i_{ci} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} C_{ij} \dot{v}_{cj} \quad (1)$$

$a_{ij}$  è + o meno uno a seconda che ~~il generatore i e quello j sono equivalenti~~ o  $i=j$  è  $a_{ij} = +1$  o  $i \neq j$  allora  $a_{ij} = +1$  se il generatore  $i$  e quello  $j$  sono equivalenti,  $a_{ij} = -1$  se il generatore  $i$  e quello  $j$  sono orientati in senso inverso. La (1) va quindi introdotta alla  $i_{ci} = C dv_{ci}/dt$  nelle equazioni di stato, che possono poi essere compilate facilmente ognuna dipende da tutte le altre.

Per gli induttori vale il discorso duale: si finano le correnti di co-albero etc.

#### RETI A REGIME

Il generale non ha senso parlare di regime forzato; si può parlare solo quando, data la natura di  $u$ , il regime tende asintoticamente ad un valore dipendente solo dal tempo<sup>(1)</sup>. Se i generatori sono tutti a gradino ed il circuito è dissipativo si ha una risposta forzata (circuiti in c.c.); lo stesso per una rete in regime sinusoidale; ~~in~~ ~~il~~ generale si raggiunge un regime se le frequenze naturali stanno nel semipiano di sinistra del piano  $(\sigma, j\omega)$ <sup>(2)</sup>; tutto ciò che resta è di verificare che la rete RLC raggiunge un regime se gli si applica una oscillazione sinusoidale di ampiezza crescente<sup>(3)</sup>; tutti e tre i casi si riducono all'analisi sinusoidale:

$$e(t) = E e^{st} \cos(\omega t + \varphi) \quad i(t) = \operatorname{Re} \left[ \tilde{E} e^{1t} \right] \quad \begin{aligned} (1 = \sigma + j\omega) \\ (\tilde{E} = E e^{j\varphi}) \end{aligned}$$

Tediamo cosa succede in un caso del genere.

Sull'analisi di avere una relazione del tipo:

(1) - In tali condizioni ogni grandezza della rete si può scrivere come una costante moltiplicata per una medesima funzione del tempo.

(2) - Infatti in tal caso le risposte libere si smorzano nel tempo.

$$Y_{ku}(s) = \frac{a_p s^p + \dots + a_1 s + a_0}{b_q s^q + \dots + b_1 s + b_0} = \frac{I_u(s)}{V_u(s)}$$

esse contiene le stesse informazioni di

$$b_q \frac{d^q i}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{di}{dt} + b_0 i = a_p \frac{d^p v}{dt^p} + \dots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v$$

In pratica assegnata, ad esempio,  $v$ , mi deve trovare  $i$ . Se ad esempio  $v$  è  $v$  del tipo sinusoidale  $A e^{st} \cos(\omega t + \phi)$ , mi può servire:

$$v_u = A e^{st} \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} [\bar{A} e^{st}]$$

$$\bar{A} = A e^{j\phi} \quad p = \sigma + j\omega$$

Cerchiamo un integrale particolare dell'equazione data; esso ha la forma:

$$\operatorname{Re} [\bar{I} e^{st}] \quad A = s(p) \quad s = \sigma + j\omega$$

dove  $s$  è soluzione dell'equazione:

$$a_p s^p + \dots = b_q p^q + \dots + b_1 p + b_0$$

ora, se  $\sigma < 0$ , quello trovato è un integrale particolare e basta; se  $\sigma > 0$ , invece, e se la c.c. è applicata da  $-\infty$  in poi, allora l'integrale particolare è l'unico esistente, in quanto esso va a zero per  $t \rightarrow -\infty$  più rapidamente di ogni potenza di  $t$ , e quindi per  $t = -\infty$  la rete è scarica, quindi l'integrale generale dell'equazione associata è nullo, finché a  $t = (-\infty)^+$  tutte le derivate delle correnti sono nulle, finché il discorso della c.c. crescente significa proprio inizio infinitamente dolce. Cioè, per  $\sigma > 0$  l'integrale c.c. crescente è l'integrale generale dell'equazione data. Questo significa anche che mi riesce a raggiungere un regime c.c. crescente. Quindi le relazioni di Laplace:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

se  $\sigma_1 > 0$ , (come si prende sempre), ~~significa~~ che ogni funzione del tempo è somma di c.c. di ampiezza infinitesima:

$$\left( \frac{F(s) ds}{2\pi j} \right) e^{st}$$

Quello che varia da una all'altra istante è solo la frequenza, in quanto la parte reale di  $s$  è finita, e vale  $\sigma$ .

Potenza nei sistemi sinusoidali. In generale la potenza associata da un bipolo è istante per istante  $v i$ . In caso sinusoidale risulta:



$$v(t) = \operatorname{Re} [\dot{V} e^{j\omega t}]$$

$$i(t) = \operatorname{Re} [\dot{I} e^{j\omega t}]$$

oppure, tenendo presente che:

$$z = a + jb$$

$$a = \operatorname{Re}[z] \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{(a+jb) + (a-jb)}{2}$$

possiamo scrivere:

$$v(t) = \operatorname{Re} [\dot{V} e^{j\omega t}] = \frac{\dot{V} e^{j\omega t} + \dot{V}^* e^{-j\omega t}}{2}$$

e analogamente:

$$i(t) = \frac{\dot{I} e^{j\omega t} + \dot{I}^* e^{-j\omega t}}{2}$$

e quindi la potenza istantanea è:

$$v(t) i(t) = \frac{1}{4} \left\{ [\dot{V} \dot{I} e^{2j\omega t} + \dot{V}^* \dot{I}^* e^{-2j\omega t}] + [\dot{V} \dot{I}^* + \dot{V}^* \dot{I}] \right\}$$

in ogni parentesi quadra c'è la somma di un numero complesso con il suo coniugato, e per ciò che si è detto prima:

$$p(t) = v(t) i(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{V} \dot{I} e^{j2\omega t}] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{V} \dot{I}^*]$$

quindi la potenza istantanea è esprimibile mediante un termine indipendente dal tempo (potenza media) ed una parte a valore medio nullo (potenza fluttuante), che consta di una parte che viene messa in gioco avanti e indietro fra il circuito e di una parte che entra non uniformemente nel bipolo ma viene dissipata nel bipolo stesso). Se scriviamo:

$$\dot{V} = V e^{j\alpha}$$

$$\dot{I} = I e^{j(\alpha - \varphi)}$$

$$\dot{I}^* = I e^{-j(\alpha - \varphi)}$$

risulta:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{V} \dot{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{V I}{2} e^{j\alpha} e^{-j(\alpha - \varphi)} \right] = \frac{V I}{2} \operatorname{Re} [e^{j\varphi}] = \frac{V I}{2} \cos \varphi$$



e ancora:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{V} \vec{I} e^{j2\omega t}] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\vec{V} \vec{I}}{2} e^{j[(2\alpha - \varphi) + 2\omega t]} \right] = \frac{V I}{2} \cos [2\omega t + (2\alpha - \varphi)] =$$

$$= \frac{V I}{2} \left\{ \cos 2(\omega t + \alpha) \cos \varphi + \sin 2(\omega t + \alpha) \sin \varphi \right\}$$

quindi, in totale:

$$p(t) = v(t) i(t) = \frac{V I}{2} \cos \varphi [1 + \cos 2(\omega t + \alpha)] + \frac{V I}{2} \sin \varphi [\sin 2(\omega t + \alpha)] =$$

$$= P [1 + \cos 2(\omega t + \alpha)] + Q [\sin 2(\omega t + \alpha)]$$

il primo termine rappresenta la potenza istantaneamente dissipata nel bipolo, ed ha per valore medio  $\frac{V I}{2} \cos \varphi$ ; il secondo termine rappresenta la potenza accumulata dal bipolo reversibilmente, in quanto è a valore medio nullo (variazione dell'energia interna del sistema).

Nota che la potenza fluttuante non coincide con le ~~pot~~ energia interne o potenza reattiva del sistema.

Il teorema di Boucherot dice che per una rete di bipoli descritta con le convenzioni degli utilizzatori, risulta:

$$\sum P = 0$$

$$\sum Q = 0$$

quando la potenza

è estesa a tutti i lati della rete. Riuscirà infatti:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\vec{V} \vec{I}^*}{2} \right] = P$$

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{\vec{V} \vec{I}^*}{2} \right] = Q$$

dato che, come c'è visto:

$$\sum_n \vec{V}_n \vec{I}_n = 0 \iff \sum \vec{V} \vec{I} = 0$$

ma anche  $\vec{I}^*$  soddisfa alla  $\sum I = 0$ , e quindi

$$\frac{1}{2} \sum \vec{V} \vec{I}^* = 0$$

ed allora sono nulle sia la parte reale sia la parte immaginaria, e quindi il teorema è dimostrato.

## Espressioni del comportamento delle funzioni di rete nel piano complesso.

Quando diciamo funzione di rete intendiamo qualunque funzione che lega tensioni e correnti della rete. Si distinguono funzioni di rete dette autoimmittanze (impedenze o ammettenze di porte interne) e altre dette funzioni di trasferimento<sup>(1)</sup> (che legano grandezze che si riferiscono a porte diverse)<sup>(2)</sup>. Trattiamo reti RLC, e quindi ogni funzione di rete è una funzione razionale fatta di  $s$ . Per un bipolo:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow V(s) D(s) = I(s) N(s)$$

immediatamente traducibile in una equazione differenziale. Se ad esempio si considera come grandezza in porta  $I(s)$ ,  $V(s)$  è la risposta; per trovare  $V(s)$  si comincia ad annullare il secondo membro (morsetti aperti) e si risolve l'equazione associata etc. Se la tensione è nota, allora  $I(s)$  è la risposta. Questa proprietà di dualità non vale per le funzioni di trasferimento<sup>(\*\*)</sup>. Consideriamo infatti una ammettenza mutua:

$$\frac{V_j(s)}{I_i(s)} = \frac{I_j(s)}{V_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \Leftrightarrow D(s) I_j(s) = N(s) V_i(s)$$

cioè  $Y_{ij}$  è un elemento della matrice delle ammettenze di corto circuito della rete (le si misura ponendo  $V_h = 0$  per  $h \neq i$ , e  $V_i$  in porta, misurando  $I_j$ ). Dalla definizione  $Y_{ij}$  si misura, <sup>quindi</sup> cortocircuitando <sup>anche</sup> il lato  $j$ -esimo; è chiaro allora che, impendendo le correnti nel lato  $j$ -esimo e misurando la tensione nel lato  $h$ -esimo, si deve mettere un generatore di ~~corrente~~  $I_j$  ed aprire  $h$ , cioè cambiare la rete; l'asserto è dimostrato. È pertanto il denominatore di  $Y_{ij}$  che determina realmente le risposte libere della rete, mentre il numeratore non ha questo significato.

Quella indicata è la differenza essenziale tra autoimmittanze e funzioni di trasferimento.

Vediamo alcune cose più generali per  $s$  di grado  $n$ .

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

con  $a_i$  reale. Si dice che  $s_i$  è radice di  $P(s)$  se  $P(s_i) = 0$ ; per questo  $s_i$  si dice

(1) - A parametri concentrati; in caso contrario le considerazioni svolte non vanno più bene. Come vedremo più avanti, niente cambia, inoltre, se accettiamo anche le mutue in distanza tra i componenti della rete.

(2) - Predisponiamo esplicitamente che non ha senso, in generale, fornire una auto o mutua simmetria senza specificare alle connessioni esterne dell' $n$ -bipolo. (\*)

anche "zero" di  $P(s)$ . Per un rapporto di polinomi gli zeri del rapporto sono quelli del numeratore, mentre quelli del denominatore si dicono poli del rapporto.

Si dice che uno zero di un polinomio è di ordine  $r_i$  se esso annulla il polinomio e tutte le sue derivate fino all'ordine  $(r_i - 1)$ -esimo. Le radici multiple in generale, in teoria delle reti, vengono fuori per particolari valori numerici dei componenti la rete; può accadere però che una radice multipla lo sia per fatto topologico, cioè rimane multipla per qualunque valore numerico dei componenti le reti, un fatto non è un fatto frequente. Condizione necessaria e sufficiente perché si sia uno zero di  $P(s)$  è che si possa scrivere:

$$P(s) = (s - s_i)^{r_i} F(s) \quad F(s_i) \neq 0 \quad (1)$$

Un polinomio di ordine  $n$  ammette  $n$  radici, come è noto. Questo fa sì che si possa sempre scrivere:

$$P(s) = a_n \prod_i (s - s_i)^{r_i} \quad (2)$$

Risulta nel caso di un rapporto:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_n \prod_i (s - s_i)^{r_i}}{b_m \prod_j (s - s_j)^{p_j}} = H \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0} \quad (3)$$

La costante  $H = a_n / b_m$  è detta livello della funzione di rete. Una funzione di rete è totalmente specificata se si conoscono poli, zeri e livello; tuttavia il livello è di gran lunga la grandezza meno importante nel problema delle reti, che è ciò che ci interessa.

Se  $s_i$  è complesso ed è radice di  $P(s)$ , anche  $s_i^*$  è radice di  $P(s)$ . Il polinomio è pari quando sono zero tutti i coefficienti delle potenze dispari, e viceversa.

Consideriamo una funzione di rete con poli e zeri non multipli; i poli e gli zeri al finito delle funzioni di rete sono rispettivamente zeri del denominatore e del numeratore; all'infinito:



$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) \cong \# s^{u-m} = \begin{cases} \# & u=m \\ \infty & u>m \\ 0 & u<m \end{cases}$$

cioè se  $u=m$   $Y$  è regolare all'infinito, se  $u>m$   $Y$  ha un polo all'infinito di ordine  $u-m$ , e se  $u<m$   $Y$  ha uno zero all'infinito di ordine  $m-u$ .

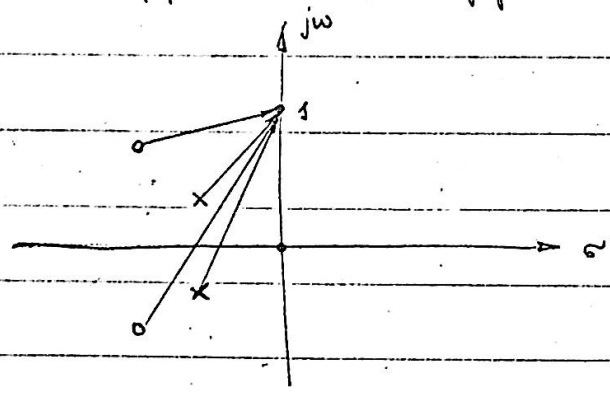
In totale il numero di poli e zeri è complementare:

$$u+m+|u-m| = \begin{cases} 2u & u>m \\ 2m & u<m \end{cases}$$

Quindi <sup>il numero</sup> di poli e zeri di una funzione di rete è sempre uguale al doppio del grado più grande tra quelli del numeratore e del denominatore.

Potrebbe capitare che numeratore e denominatore abbiano delle radici comuni; ma in analisi <sup>delle reti</sup> questo non ha importanza: ~~rimuovendole~~ si semplificano i fattori comuni come si fa normalmente in analisi matematica.

Dato il diagramma dei poli e degli zeri nel piano  $(\sigma, j\omega)$ , moltiplichiamo che si disegnano due superfici, modulo e fase di  $Y(s)$ , al di sopra di tale piano; voglio determinare il comportamento in alternata; allora esso è dato dall'intersezione delle due superfici con un piano perpendicolare al piano  $(\sigma, j\omega)$  e passante per l'asse  $j\omega$ .



Dato ora nel piano  $(\sigma, j\omega)$  un generico punto  $s$ , ad esempio sull'asse  $j\omega$ , la (3) ci dice che il modulo di  $Y(s)$  è dato dal prodotto e quoziente dei moduli dei vettori che uniscono i poli e gli zeri con il punto in questione, e la fase di  $Y(s)$  è data dalla somma e differenza delle fasi di detti vettori.

Da questo fatto segue che poli e zeri molto lontani dall'origine, se temporanei, influenzano poco lo andamento di  $Y(s)$  in alternata, mentre il contrario accade per i poli vicini all'origine, come per gli zeri vicini all'origine. Dalla rappresentazione data, se ne conclude che effettivamente poli e zeri

di  $Y(s)$  (oltre al suo livello) esauriscono la descrizione di  $Y(s)$  in ogni punto del piano  $(\sigma, j\omega)$ . Nota che se  $s$  si avvicina ad uno zero,  $|Y(s)|$  diventa molto piccola; al contrario, se  $s$  si avvicina ad un polo  $|Y(s)|$  diventa molto grande.

Il calcolo di  $Y(s)$  in corrispondenza di una rete  $s$  significa trovare la risposta forata ad una grandezza sinusoidale corrispondente a quel valore di  $s$ , come subito si comprende. I poli e gli zeri hanno invece il significato di frequenze libere del bipolo in circuito e a morsetti aperti.

Tema: tutti i poli e gli zeri che sono interpretabili come frequenze naturali delle reti devono giacere nel semipiano sinistro (rete RLC); e posto  $\rho$  che, se zeri e poli sono interpretabili come frequenze libere della rete, la rete non può generare delle grandezze monotonicamente crescenti nel tempo. (I poli e gli zeri possono <sup>al limite</sup> giacere sulla <sup>dato che</sup> ~~retta~~ <sup>asse immaginario</sup>). Le autoimmolte hanno per radici del numeratore e del denominatore interpretabili entrambi come frequenze libere, <sup>poli e zeri delle autoimmolte</sup> ~~compensati~~ stanno tutti a <sup>sinistra</sup> ~~destra~~ dell'asse immaginario, mentre gli zeri possono stare anche alla sua destra, in quanto, come c'è già visto, solo i poli della funzione di trasferimento hanno significato di risposte libere della rete.

Si usa a volte un'altra rappresentazione di una funzione di rete, <sup>facendo uso</sup> ~~componendo~~ della corrispondenza che c'è tra i due piani  $(\sigma, j\omega)$  e  $(\operatorname{Re} z, j \operatorname{Im} z)$ . Si potrebbe dimostrare che la trasformazione tra i due piani è conforme, il che è ovvio dato che  $z(s)$  è una funzione analitica. Si può decomporre la funzione di rete in fattori semplici; diciamo che  $N(s)/D(s)$  è propria se il grado di  $N$  è maggiore di quello di  $D$ ; fatta la divisione (grado di  $N$  minore di quello di  $D$ ):

$$Y_i(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

Quindi <sup>dalle  $s_1, s_2, \dots$</sup>  le radici di  $D(s)$  è sempre possibile scrivere:

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{k_i'}{(s-s_i)} + \frac{k_i''}{(s-s_i)^2} + \dots + \frac{k_i^{(r_i)}}{(s-s_i)^{r_i}} \right\} \quad (1)$$

Per tutti i casi che incontreremo le radici sono semplici, quindi ci sarà solo il primo termine.

~~Svolgendo i calcoli~~

~~Si trova per la (1):~~ si trova per la (1):

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^m \frac{k_i' (s-s_i)^{(r_i-1)} \prod_{j \neq i} (s-s_j)^{r_j} + k_i'' (s-s_i)^{(r_i-2)} \prod_{j \neq i} (s-s_j)^{r_j} + \dots}{D(s)}$$

cioè a secondo membro il grado del numeratore è certamente non inferiore al grado di  $R(s)$ , <sup>(3)</sup> per cui i coefficienti sono determinabili in modo univoco, sempre, applicando

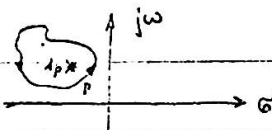
(3) - Infatti a secondo membro il numeratore ha sempre il grado del denominatore diminuito di uno; dato che  $R$  ha al massimo il grado di  $D$  diminuito di uno, applicando il principio di identità dei polinomi otterremo un sistema risolvibile in modo univoco, perché le condizioni da soddisfare non sono mai in numero inferiore alle incognite  $k_i$ .

il principio di identità dei polinomi.

Il poli di  $V$  si dicono punti singolari; la singolarità è sempre non essenziale, poiché è sempre possibile fare in modo che il prodotto di  $V$  per  $(s-s_p)$ , (ovvero  $s_p$  il polo), elevato ad un certo esponente, sia regolare in  $s_p$ , data la forma di  $V(s)/(3)q. 25$ .  
Se si moltiplica  $R(s)/D(s)$  in serie di Laurent nell'intorno di un polo  $s_p$ :

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_i}{(s-s_p)^i} + \sum_{j=0}^{\infty} A_j (s-s_p)^j$$

Se la singolarità è non essenziale la parte principale si arresta ad  $n_p$  termini, per cui la parte principale si riduce proprio all'espressione di  $R(s)/D(s)$  in fattori semplici, e le  $H_i$  coincidono con le  $k_i$ . Infatti, dato che la  $H_1$  ~~ovvero~~ <sup>è</sup> il residuo in  $s_p$ , risulta:



$$\oint_{\gamma} \frac{R(s)}{D(s)} ds = 2\pi i H_1$$

quato significa che  $k_1$  è proprio il residuo della funzione in  $s_p$ . Dato che le funzioni di rete hanno <sup>in genere</sup> poli tutti semplici, le  $k_i$  sono tutte residue nei poli si risulta (ovvero  $s_p$  un polo di  $R(s)/D(s)$ ):

$$\lim_{s \rightarrow s_p} [(s-s_p)^{n_p} \frac{R(s)}{D(s)}] = \lim_{s \rightarrow s_p} (s-s_p)^{n_p} \sum_{i \neq 1} \left[ \frac{k_i}{s-s_i} + \frac{k_i^2}{(s-s_i)^2} + \dots \right] +$$

$$+ \lim_{s \rightarrow s_p} \left\{ k_{p2} (s-s_p)^{n_p-1} + k_{p2} (s-s_p)^{n_p-2} + \dots + k_{p, n_p-1} (s-s_p) + k_{p, n_p} \right\}$$

o anche:

$$\lim_{s \rightarrow s_p} [(s-s_p)^{n_p} \frac{R(s)}{D(s)}] = \lim_{s \rightarrow s_p} \left[ (s-s_p)^{n_p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_i}{(s-s_p)^i} + (s-s_p)^{n_p} \sum_{j=0}^{\infty} A_j (s-s_p)^j \right]$$

moltiplicando si vede che:  $H_{n_p} = k_0$  ; per vedere che l'identità rimane anche per i coefficienti di grado più basso basta fare le derivate rispetto ad  $s$  di

$$\lim_{s \rightarrow s_p} \frac{d}{ds} \left[ (s-s_p)^{n_p} \frac{R(s)}{D(s)} \right]$$

e procedere in modo analogo a prima. Se pertanto dimostrata l'identità delle  $H_i$  e  $k_i$  - S'è trovato inoltre l'imponente risultato:

$$k_p^{(2p)} = \lim_{s \rightarrow s_p} \left[ (s - s_p)^{2p} \frac{R(s)}{D(s)} \right] ; \quad k_p^{(2p-1)} = \lim_{s \rightarrow s_p} \frac{d}{ds} \left[ (s - s_p)^{2p} \frac{R(s)}{D(s)} \right] \quad (1)$$

e in generale:

$$k_p^{(2p-h)} = \frac{1}{h!} \lim_{s \rightarrow s_p} \frac{d^h}{ds^h} \left[ (s - s_p)^{2p} \frac{R(s)}{D(s)} \right] \quad (2)$$

che costituisce il metodo di Heaviside per determinare i coefficienti dello sviluppo.

Nel caso di radici tutte semplici:

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{k_h}{s - s_h} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow s_p} \sum_{h=1}^{\infty} (s - s_p) \frac{k_h}{s - s_h} = k_p \quad (3)$$

applicando l'Hospital:

$$k_p = \frac{R(s_p)}{D'(s_p)} \quad (4)$$

Questa proprietà vale anche per  $N(s)/D(s)$  come è facile verificare (MARENESI PAG. 286):

$$k_p = \frac{N'(s_p)}{D'(s_p)} \quad (5)$$

Spesso <sup>nel</sup> sviluppo in parti semplici si cerca di far apparire solo costanti reali; (caso delle radici semplici). Se i poli sono reali, facciamo il limite per  $s$  tendente lungo l'asse reale a detto polo  $\sigma_i$ :

$$\lim_{s \rightarrow \sigma_i} \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_i}{s - \sigma_i} + \text{termini più piccoli} = \frac{k_i}{s - \sigma_i} \quad (6)$$

ma la funzione di rete ha coefficienti reali, pertanto  $N(s)/D(s)$  è ~~reale~~ reale; pertanto  $k_i$  è reale; i residui della funzione relativi a poli reali sono reali - Consideriamo un polo complesso ( $\sigma_i = \sigma_i + j\omega_i$ ) del primo ordine:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \dots + \frac{k_j}{s - \sigma_j - j\omega_j} + \frac{k_{j+1}}{s - \sigma_j + j\omega_j} + \dots \quad (7)$$



ovvero ( $k_i = a + jb$  ;  $k_{i+1} = a' + jb'$ ) :

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \dots + \frac{(a + jb)(-s_j + j\omega_j) + (a' + jb')(-s_j - j\omega_j)}{s_j^2 + \omega_j^2} + \dots =$$

$$= \dots + \frac{(-as_j - b\omega_j - a's_j + b'\omega_j) + j(-bs_j + a\omega_j - b's_j - a'\omega_j)}{s_j^2 + \omega_j^2} + \dots$$

Dato che  $f(s)$  reale la funzione deve essere reale, deve essere:

$$-bs_j + a\omega_j - b's_j - a'\omega_j = 0$$

che è verificata se  $k_j$  e  $k_{j+1}$  sono complessi coniugati. La dimostrazione non è rigorosa ma la si può fare in generale. Rimette altre:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \dots + \frac{k_j}{s - s_j - j\omega_j} + \frac{k_j^*}{s - s_j + j\omega_j} + \dots =$$

$$= \dots + \frac{As + B}{(s - s_j)^2 + \omega_j^2} + \dots + \dots$$

dove  $A$  e  $B$  sono reali, come subito si verifica ( $k_j = a + jb \Rightarrow 2a = A$ ,  $-2(s_j a + \omega_j b) = B$ ); Rimette altre:

$$A = -2 \operatorname{Re}[k_j] \quad B = -2[s_j \operatorname{Re}[k_j] + \omega_j \operatorname{Im}[k_j]]$$

Se il polo è puramente immaginario ( $s_j = 0$ ):

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \dots + \frac{As + B}{s^2 + \omega_j^2} + \dots \quad A = -2 \operatorname{Re}[k_j] \quad B = -2\omega_j \operatorname{Im}[k_j]$$

Le stesse considerazioni ~~non fanno~~ se le radici sono pure semplici.

Condizioni di fisica realizzabilità del bipolo normale passivo.

E' necessario ora porci il problema di quale deve essere la forma di una funzione di rete affinché sia realizzabile con una rete RLC. Intanto una rete RLC è una rete passiva; ci occupiamo ora di autoimmunità. Per una rete passiva si può de-

finire lo stato zero, cioè quello in cui tutte le reti  $\bar{e}$  sono cariche; la ~~potenza~~ <sup>energia</sup>  $\bar{e}$  allora:

$$W = \int_0^t v i dt \geq 0 \quad (\forall t) \quad (1)$$

qualunque sia l'andamento di  $v$  ed  $i$  applicate. Nel caso valga l'uguaglianza in qualche istante la rete viene detta conservativa o reattiva. Dato che la (1) deve essere verificata per ogni  $v$  ed  $i$ , essa ~~può~~ <sup>si deve</sup> tradursi in una proprietà di  $Z(s)$ .

Questa traduzione fu fatta da Brune, ed è:  $Z(s)$  (o  $Y(s)$ ) deve essere una funzione reale e positiva. (Condizione necessaria, ma non sufficiente); la sufficienza è stata

dimostrata più tardi da Brune stesso, dopo Bott e Duffin, hanno mostrato che non sono necessarie delle ulteriori riduzioni). Per funzione reale si intende che è

reale per  $s$  reale; positiva significa che  $\operatorname{Re}[Z(s)] \geq 0$  e  $\operatorname{Re}[1] = \sigma \geq 0$ .

Infatti, ad esempio per  $\sigma = 0$ ,  $\operatorname{Re}[Z(s)]$  è una resistenza, che deve essere reale e positiva.

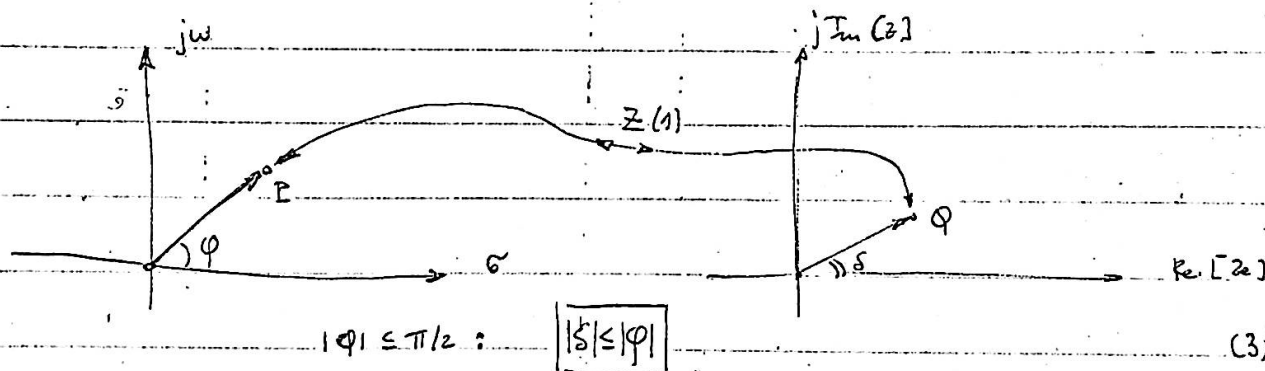
Per la parte destra del piano ( $\sigma > 0$ ), si pensi ad una circonferenza crescente. Per  $\operatorname{Re}[Z(s)] \geq 0$  la parte non diventerà negativa.

La condizione di Brune può essere tradotta identicamente nelle condizioni di Guillemin:

~~l'argomento~~ <sup>rendendo  $s$  tale che</sup> abbia argomento in modulo minore di  $\pi/2$ .

il modulo dell'argomento della funzione di rete è minore del modulo dell'argomento di  $s$ :

$$\left| \operatorname{arg} \frac{Z(s)}{s} \right| \leq \left| \operatorname{arg} \frac{\omega}{\sigma} \right| \quad \forall s: \sigma \geq 0 \quad (2)$$

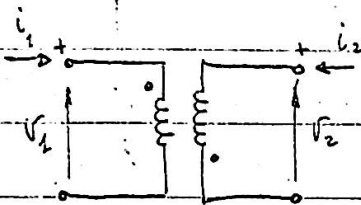


Questa enunciazione porta a concludere che ~~se  $Z$  è r.p.~~  <sup>$Z$  è r.p.</sup> anche  $Y$  è r.p.; infatti la fase di  $Z$  e di  $Y$  è la stessa a parte il segno.

La dimostrazione delle condizioni di Brune verrà data a pg. 78 in generale.

## Trasformatori

Scegliamo ora le portine degli induttori accoppiati. Solitamente la portina viene definita in modo astratto con un doppio bipolo, sistema che ha due gradi di libertà (a seconda delle connessioni delle porte 2) e pertanto è definito da due equazioni:



$$\begin{cases} V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ V_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

$L_1, L_2$  ed  $M$  sono costanti cui segni nati dalle seguenti considerazioni:  $L_1$  ed  $L_2$  sono positive se il doppio bipolo è descritto con la convenzione degli utilizzatori,  $M$  è positivo nella stessa convenzione se i fili coincidono con i morsetti +, negativa in caso contrario.  $L_1$  ed  $L_2$  sono positive soltanto finché il sistema lo ipotizziamo passivo; allora  $M$  è positivo solo per un fatto costruttivo; infatti, se  $I_2$  è nullo allora  $V_2 = \pm M I_1$ ; mettendo il + alla porta 2 in basso o in alto,  $V_2$  cambia segno e basta, quindi c'è un modo solo per scegliere il segno di  $M$  finché tutto vada bene; il segno di  $M$  si determina solo sperimentalmente finché i segni di avvolgimento (tradotti dai fili) sono sempre ignoti.

Supponiamo  $I_2 = 0$ ,  $V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$  che è l'equazione di un induttore ideale; se l'induttore è passivo:

$$\int_0^t V_1 i_1 dt = \frac{1}{2} L_1 \int_0^t i_1 \frac{di_1}{dt} dt = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \geq 0 \quad (2)$$

quindi deve essere:

$$L_1 \geq 0 \quad (3)$$

finché il sistema sia passivo. Analogamente per  $L_2$ .

Più generalmente, la condizione di passività si estenderà ad un  $n$ -polo scrivendo che la somma di tutte le energie entrate sulle porte deve essere non negativa:

$$\sum_j \int_0^t V_j i_j dt \geq 0 \quad (\forall t) \quad (4)$$

( $t=0$ : la rete è scarica).

Per gli induttori accoppiati deve essere:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^t (V_1 i_1 + V_2 i_2) dt = \int_0^t \left( L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \int_0^t (M i_1 di_2 + M i_2 di_1) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M \int_0^t d(i_1 i_2) = \\ &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$i_1$  ed  $i_2$  si possono considerare come variabili indipendenti, ed allora perché la forma quadratiche sia definita positiva deve essere: ( $i_1, i_2 = x$ ):

$$L_1 x^2 + 2Mx + L_2 \geq 0 \quad (2)$$

che è positiva se il discriminante è negativo, in quanto il primo coefficiente è positivo:

$$\Delta = 4M^2 - 4L_1 L_2 = 4(M^2 - L_1 L_2) \leq 0 \quad (3)$$

da cui:

$$M^2 \leq L_1 L_2 \quad (4)$$

affinché il quadrupolo sia passivo; (la disuguaglianza precedente è la classica disuguaglianza del segno del tensore).

Notare che la descrizione del quadrupolo è completa, anche se ciò contrasta con le regole generali che vorrebbero 3 equazioni finché per la descrizione del dispositivo a 4 morsetti; infatti le correnti nel trasformatore sono sempre uguali, alle porte, per la sua costituzione fisica<sup>(1)</sup>. Le tensioni indipendenti sono in realtà tre, ma se tra le porte 1 e 2 non c'è collegamento tutto va bene, se c'è collegamento la tensione è perfettamente definita proprio per la costituzione fisica del quadrupolo. Si vede anche che il segno uguale nella (4) vale quando  $i_1 = i_2 = 0$ .

Test di passività dei quadrupoli del tipo indicato sono richiesti frequentemente agli esami.

Ricordare che la frase "induttanza del primario" ha un senso solo con l'aggiunta:

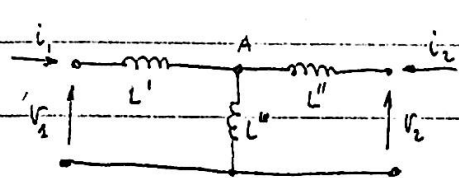
"a secondario aperto", o "chiuso" etc.

Il sistema (4) di pg. 43 è invertibile solo se  $L_1 L_2 - M^2 \neq 0$ , cioè se gli induttori non sono perfettamente accoppiati. Dato che questo avviene sempre nei casi reali, il sistema (4) è sempre invertibile, e pertanto parlare di reti RLCM invece che di reti RLC è fuorviante.

(1) - Pertanto la  $\sum i = 0$  per tutte le correnti entranti nel quadrupolo è sempre identicamente soddisfatta; allora dobbiamo soddisfare solo un sistema di  $n-1=3$  equazioni in  $n-1=3$  tensioni e  $\frac{n}{2}=2$  correnti incognite. Le incognite sono pertanto  $3+2=5$ ; ho bisogno allora di sole due equazioni finché (le (4) di pg. 43) per avere un sistema di 5 equazioni in 5 incognite.



puente la stessa cosa. Un circuito equivalente del trasformatore trattato è il seguente:



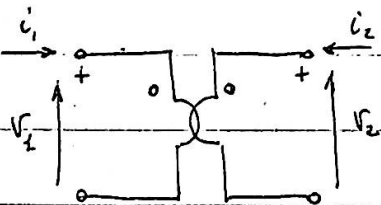
$$\begin{cases} V_1 = L' i_1 + L''' (i_1 + i_2) \\ V_2 = L' i_2 + L''' (i_1 + i_2) \end{cases}$$

$$L''' = M \quad L' = L_1 - M \quad L'' = L_2 - M$$

Ciò mette il fatto chiaro che il trasformatore ammette un circuito equivalente fatto di bipoli, può però succedere che  $L'$  o  $L''$  siano negativi, nonostante che sia verificato il tri di passività ( $L, L_2 \geq M^2$ ), tuttavia formalmente il complesso del circuito equivalente è passivo, quindi non può sorprese, finché nessun lato della rete esterna sia collegato al nodo A. C'è però un'altra difficoltà: nel caso reale la tensione tra primario e secondario è non definita, in quanto non la si può ricavare mai dalle sole equazioni (5) di pag. 43; essa risulta definita soltanto se il trasformatore è collegato ad una rete esterna. Nel caso del circuito equivalente invece la tensione tra primario e secondario è definita in ogni caso.

C'è da aggiungere che, fisicamente, la presenza di capacità parassite tra primario e secondario fa sì che se molto più voluttoso tra primario e secondario riesce a minimare una tensione in ogni caso; inoltre, dato che le capacità parassite formano un ciclo, esse ammettono come modo una tensione costante tra primario e secondario e tra guasti e terra che ci ritroviamo sempre in pratica; è questa la ragione per cui i dispositivi elettronici vengono messi a terra.

Si definisce trasformatore ideale un dispositivo, così indicato:



tale che (senza connessioni metalliche tra primario e secondario):

$$v_1 = n v_2$$

$$i_1 = -\frac{1}{n} i_2$$

è positivo se i poli coincidono con i poli critici del quadrupolo. Il dispositivo è precisamente passivo, poiché la potenza assorbita da 1 è uguale a quella ceduta da 2:

$$v_1 i_1 = -v_2 i_2$$

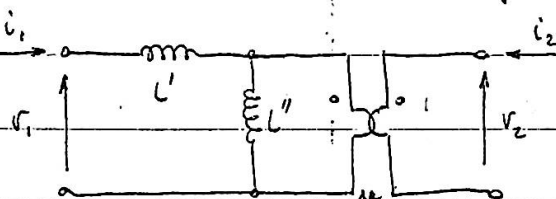
Si tratta quindi di un dispositivo che non dissipa e non accumula. Se il trasformatore è chiuso su una impedenza  $Z(s)$ :

$$\frac{v_2(s)}{i_2(s)} = -Z(s)$$

e quindi:

$$\frac{v_1(s)}{i_1(s)} = Z(s) = n^2 Z(s)$$

Si tratta quindi anche di un adattatore di impedenza. Per posto i problemi della sintesi sono più semplici se si accetta tra i componenti anche il trasformatore ideale. Due induttori accoppiati possono schematizzarsi come segue:



Infatti, se il secondario è a vuoto:

$$v_1 = (L' + L'') i_1 \quad \Rightarrow \quad L' + L'' = L_1$$

se il primario è a vuoto:

$$v_2 = \frac{L''}{n^2} i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{L''}{n^2} = L_2$$

se il secondario è in cortocircuito:

$$v_1 = L' i_1 \quad \Rightarrow \quad L' = L_1 - \frac{n^2}{L_2}$$

Per tanto si ottiene, posto:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \sigma = 1 - k^2$$

$$L' = L_1 \sigma$$

$$L'' = L_2 k^2$$

$$M = \frac{H}{L_2}$$

Si potrebbero sempre fare altri schemi equivalenti dello stesso tipo, ma sempre troveremo una induttanza in serie ed una induttanza in parallelo, in quanto quelle in serie tiene conto che  $V_2$  non è proporzionale a  $V_1$ , e quelle parallelo che  $i_2$  non è proporzionale a  $i_1$ .

Il trasformatore costituito da due induttori accoppiati si riduce a quello ideale se

$$L' = 0 \text{ ed } L'' = \infty, \text{ cioè se } k = 1 \text{ e se } L_1 = \infty.$$

Sufficiente allora di avere un anello a  $\mu = \text{cte}$  con due avvolgimenti di  $N_1$  ed  $N_2$  spire, avvolti su di esso in modo uniforme e molto strettamente. Se il secondario è aperto, il dispositivo dai morsetti 1 è un induttore,

$$V_1 = L_1 \dot{i}_1$$

$$V_2 = -e = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = N_2 \Lambda N_1 \frac{di_1}{dt}$$

sendo:

$$\Lambda = \mu \frac{S}{l}$$

$$\Phi = \Lambda N_1 i_1$$

e quindi:

$$V_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = N_1^2 \Lambda \dot{i}_1$$

Quindi a moto le equazioni del trasformatore ideale coincidono con quelle del trasformatore reale, a fatto di perdere:

$$L_1 = N_1^2 \Lambda$$

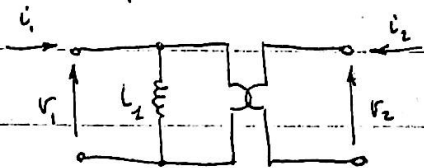
$$M = N_1 N_2 \Lambda$$

$$L_2 = N_2^2 \Lambda$$

sendo però

$$k = 1$$

Quindi lo schema equivalente è il seguente:



Quindi finché  $L_1 \rightarrow \infty$  dove  $\Lambda \rightarrow \infty$ , cioè dove  $\mu \rightarrow \infty$ . In tal caso:  $k = 1$ ,  $\mu = \infty$  il trasformatore ideale sarebbe realizzato fisicamente.

È da notare infine che i circuiti <sup>equivalenti</sup> normalmente presentati per i trasformatori non hanno perso né il numero di componenti che ci sono dentro né il numero maggiore delle grandezze determinabili finemente.

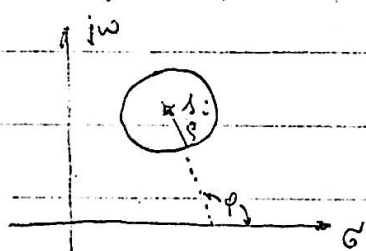
### Proprietà delle funzioni reali positive

Ogni proprietà <sup>necessaria</sup> delle funzioni reali positive si traduce in una condizione necessaria alla realizzabilità con RLC. [Metodologicamente, soddisfare le condizioni necessarie, in genere si porta a realizzare la simmettanza con i metodi politici, guardando cosa succede.]

- 1) Supponiamo che l'immittanza ammetta un polo  $s_i$  con parte reale positiva, decomponiamo l'immittanza in parti semplici e facciamo tendere  $s$  ad  $s_i$ ; risulta:

$$\frac{N(s)}{D(s)} \approx \frac{k_i(s_i)}{(s-s_i)^{r_i}}$$

Disegniamo un cerchio di raggio  $\rho$  intorno ad  $s_i$ , e ora:



$$s - s_i = +\rho e^{j\varphi}$$

$k_i(s_i)$  è un numero complesso:

$$k_i(s_i) = k e^{j\bar{\Psi}}$$

e pertanto per  $s \rightarrow s_i$ :

$$\frac{N(s)}{D(s)} \approx +k\rho^{-r_i} e^{j(\bar{\Psi} - r_i\varphi)}$$

Pertanto la parte reale di  $N/D$  varia come il coseno di  $\bar{\Psi} - r_i\varphi$  al variare

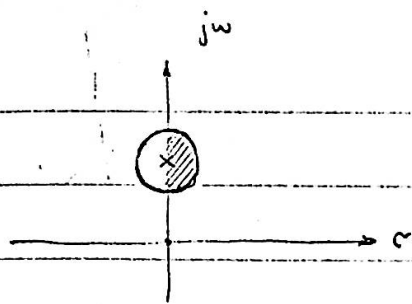
di  $\varphi$ , cioè ~~l'argomento del coseno assume tutti i valori compresi tra 0 e  $2\pi r_i \geq 2\pi$~~  mentre  $\varphi$  varia

da 0 a  $2\pi$ , cioè il coseno diventa anche negativo contro l'ipotesi che la funzione sia reale positiva (infatti il minimo valore di  $r_i$  è 1) - si deve avere pertanto parte reale negativa <sup>(2)</sup>

- 2) Poniamo esistere poli (e zeri) sull'asse immaginario, ma sono semplici ed hanno residuo reale e positivo. Utilizziamo ciò che si è detto supponendo che si sia sull'asse immaginario. Supponiamo  $\varphi$  variante da  $+\pi/2$  a  $-\pi/2$  nel semi-

(2) - Notare che questi fatti succedono anche se  $\sigma < 0$ , ma in tal caso non si richiede affatto che  $\Re\{Z(s)\}$  sia positiva.





fianco di destra; quindi  $\Phi = \angle \varphi$  subisce una variazione di  $\pi$ ; poiché la parte reale di  $N/D$  sia sempre positiva  $\pi$  non può essere maggiore di  $\pi/2$ ; pertanto il polo deve essere sem-

plare e  $k_{i(n-1)}$  è il residuo del polo; ma deve essere anche  $\Phi = 0$  poiché il coseno di  $\Phi = \angle \varphi$  sia positivo mentre  $\varphi$  varia da  $+\pi/2$  a  $-\pi/2$ ; ma dire  $\Phi = 0$  significa che  $k_{i(n-1)}$  è reale e positivo, poiché coincide col suo modulo. (1)

3) Ora, l'origine appartiene all'asse immaginario. Uno dei termini di  $N$  o di  $D$  ha grado zero, poiché in caso contrario si potrebbe mettere in evidenza  $s$  ed eliminarlo sopra e sotto. Si abbia ad esempio questa situazione:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{+ a s^i}{+ b s^j} = 0 \quad \text{con l'ordine } i < j \quad (1)$$

In tal caso l'origine possiede uno zero dell'impedenza di ordine  $i$ ; ma dato che l'origine giace sull'asse immaginario  $i = 1$ , oppure  $i = 0$ . Questo significa che uno dei due polinomi tra  $N$  e  $D$  ha grado minimo 0, e l'altro ha grado minimo 0, ovvero 1. (Se si fosse al denominatore nelle (1) stesso discorso per il punto all'infinito)

L'origine rappresenta il comportamento in continua; se entrambi i polinomi hanno grado minimo zero, in continua l'impedenza è un resistore: c'è <sup>almeno</sup> un ciclo di condensatori e resistori e c'è un percorso da un terminale all'altro fatto di resistori e induttori. E così via per gli altri casi.

4) La differenza tra i gradi massimi e minimi è uno. Si può fare lo stesso ragionamento fatto nelle 3), riguardando però al punto all'infinito, che appartiene anch'esso all'asse immaginario. D'altra parte:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{N}{D} = \lim_{s \rightarrow \infty} H s^{m-n}$$

deve essere  $H$  positivo poiché la funzione sia reale e positiva. ~~Uniamo ora~~

(1) - Vedere osservazione sottolineata nel Mariani a pag. 296 -

le definizioni di Hurwitz di funzione reale e positiva:

$$s = |s| e^{j\varphi}$$

$$Z(s) \cong H |s|^{u-u} e^{j(m-u)\varphi}$$

e deve essere  $|m-u| \leq 1$ , che dimostra l'asserto.

- 5) I gradi intermedi tra quello minimo e massimo o di pari tutti o di pari solo quelli pari o solo quelli dispari. Prendiamo uno dei due polinomi tra  $N$  e  $D$ . Sia  $P(s)$  (caso di autosimmetria soltanto!):

$$P(s) = a_m \prod_i (s - s_i)^{n_i}$$

La  $s_i$  può essere reale, nel qual caso è negativa o nulla; possiamo  $s_i = -|s_i|$ ; può essere immaginario puro:  $s_i = \pm j\omega_i$ ; oppure può essere  $s_i = -|s_i| \pm j\omega_i$ . Nel secondo caso  $n_i = 1$ ; scriviamo allora:

$$P(s) = a_m s \prod_i (s + |s_i|)^{n_i} \prod_j (s^2 + \omega_j^2)^{n_j} \prod_k [(s + |s_k|)^2 + \omega_k^2]^{n_k}$$

$(s - j\omega)(s + j\omega) \quad (s + |s_k| - j\omega)(s + |s_k| + j\omega)$

Proprio per quei segni che ci ritroviamo, tutti i coefficienti hanno lo stesso segno<sup>(1)</sup>. Lo stesso vale per il denominatore. Putando insieme è in evidente un segno meno, e, essendo  $H > 0$ , numeratore e denominatore hanno coefficienti con segni tutti positivi.

Se un polinomio ha solo radici immaginarie, ~~è~~ è un polinomio pari, cioè:

$$P(s) = a_m \prod_j (s^2 + \omega_j^2)$$

Scriviamo di più anche le radici nell'origine:

$$P(s) = a_m s \prod_j (s^2 + \omega_j^2)$$

il polinomio è dispari ed è completo per forza, dato i segni. In ogni altro caso è evidente che il polinomio è completo ed ha tutti i gradi, pari e dispari<sup>(2)</sup>.

- 6) Definiamo il polinomio di Hurwitz: polinomio a coefficienti reali con radici a parte

(1) - Infatti tutte le quantità sotto il segno  $\Pi$  sono positive; quindi  $P(s)$  ha lo stesso segno di  $a_m$ .

(2) - Cfr. Rauscher pag. 301.

reale negativa; quello generalizzato ha radici <sup>a parte reale</sup> non positive. Ogni polinomio che costituisce una simmetria <sup>di un bi-polo</sup> è un polinomio di Hurwitz generalizzato. Si dimostra che in una parte pari ed una dispari:

$$H(s) = M_p(s) + M_d(s)$$

definita la funzione:

$$\bar{F}(s) = \frac{M_p}{M_d}$$

o anche, indifferentemente  $M_d/M_p$ ,

si vede che: le radici comuni a  $M_p$  ed  $M_d$  sono tutte e sole le radici immaginarie di  $H(s)$  e pertanto sono semplici;  $\bar{F}(s)$ , ridotta ai minimi termini, ha poli e zeri tutti immaginari, semplici e che si alternano nello asse immaginario. Cominciamo a valutare  $H(s)$  sull'asse immaginario;  $M_p$  è allora reale;  $M_d$  è sempre esprimibile come

$$M_d(s) = s M_p^*(s)$$

pertanto sull'asse immaginario:

$$M_d(j\omega) = j\omega M_p^*(j\omega)$$

quindi:

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = M_p(j\omega) \quad \operatorname{Im}[H(j\omega)] = \frac{1}{j} M_d(j\omega) = -j M_d(j\omega)$$

Sufficiamo che 1. sia radice di  $M_p$ :  $M_p(s_1) = 0$ ; dato che  $M_p$  è pari:  $M_p(-s_1) = M_p(s_1) = 0$ . Se invece  $s_1$ :  $M_d(s_1) = 0$ ,  $\bar{s}_1 = -s_1$   $M_d(-s_1) = -M_d(s_1) = 0$ . Sufficiamo  $\exists s_2$  che annulla sia  $M_d$  sia  $M_p$ :

$$M_p(s_2) = M_d(s_2) = 0$$

da cui:

$$H(s_2) = 0$$

e inoltre:

$$M_p(-s_2) = M_d(-s_2) = 0$$

e quindi:

$$H(-s_2) = 0$$

e pertanto  $s_2$  deve essere immaginario puro<sup>(2)</sup>, e quindi è semplice. Viceversa, sappiamo che ci sia pure radici immaginarie di  $H(s)$ ;  $H(j\omega) = 0$ ; e quindi  $j\omega$  deve annullare separatamente  $M_d$  ed  $M_p$ . Quindi tutte e sole le radici comuni a  $M_p$  ed  $M_d$  sono

(1) - Sarà ovviamente:

$$M_p(s) = \frac{H(s) + H(-s)}{2}$$

$$M_d(s) = \frac{H(s) - H(-s)}{2}$$

(2) - Se  $H(s)$  è diversa autoimmatura (non ci sono zeri nel semipiano di destra).

(3) - Ed i cui zeri a parte reale nulla sono semplici.

(4) - Vedere Marelli pag. 303 -

immaginarie pure.

7) Iniziamo con  $M_p$ :

$$M_p(s) = T_p(s) M_{1p}(s)$$

ovvero  $T_p(s)$  il polinomio formato dalle sole radici immaginarie di  $M_p(s)$ :

$$T_p(s) = \prod_i (s^2 + \omega_i^2)$$

( $M_{1p}(s)$  è pure pari, poiché il prodotto verrebbe dispari in caso contrario). Ancora:

$$M_d(s) = T_p(s) M_{2d}(s)$$

Esiste l'eventualità che l'origine sia radice, quindi può essere comune a  $M_p$  ed  $M_d$ , e pertanto può essere:

$$T_p(s) = \begin{cases} \prod_i (s^2 + \omega_i^2) \\ s \prod_i (s^2 + \omega_i^2) \end{cases}$$

che è la parte comune a  $M_d$  ed  $M_p$ ; chiamiamo  $T_p$  la parte pari di  $T_p$ ; pertanto può essere solo, nel caso l'origine sia radice:

$$\begin{cases} M_p(s) = s T_p(s) M_{1d}(s) \\ M_d(s) = s T_p(s) M_{2p}(s) \end{cases}$$

Facendo il rapporto tra  $M_p$  ed  $M_d$ , si vede che  $\Phi$  è sempre una ~~funzione~~ <sup>funzione</sup> pari o dispari. In tali condizioni numeratore e denominatore hanno radici tutte distinte.

Tra  $M_{1p}$ ,  $M_{1d}$ ,  $M_{2p}$ ,  $M_{2d}$  sono polinomi di Hurwitz non generalizzati.

Si dimostra che  $\Phi(s)$  ridotta ai minimi termini è reale e positiva. E allora

può valere tutte le proprietà prima dimostrate per le funzioni reali e positive.

Si possono trattare i seguenti 4 casi, tenendo presente che poi trattiamo  $\Phi(s)$  o la sua inversa:

$$\Phi(s) = \frac{M_{1p}}{M_{2d}} \quad \begin{cases} \mu > n \\ \mu < n \end{cases}$$

$$\Phi(s) = \frac{M_{1d}}{M_{2p}} \quad \begin{cases} \mu > n \\ \mu < n \end{cases}$$



Trattiamo solo il primo caso. Facciamo la divisione:

$$\Psi(s) = k_0 s + \frac{R(s)}{n_{2d}(s)}$$

$R(s)$  è pari certamente e  $R/M_{ed}$  è una frazione propria, decomponibile in fattori semplici con un polo in  $s=0$ :

$$\Psi(s) = k_0 s + \frac{k_1}{s} + \sum_i \frac{A_i s}{s^2 + \omega_i^2} \quad (1)$$

Per  $s = j\omega$ :

$$\Psi(j\omega) = k_0 j\omega - j \frac{k_1}{\omega} + j \sum_i \frac{A_i \omega}{(\omega_i^2 - \omega^2)}$$

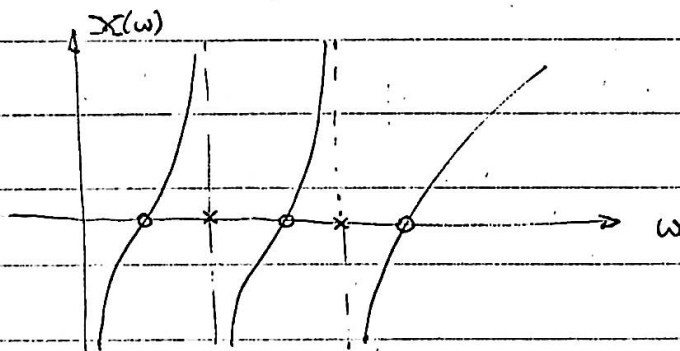
$$\Psi(j\omega) = jX(\omega)$$

$k_0, k_1$  e  $A_i$  sono tutte positive, quindi:

$$\frac{dX}{d\omega} > 0$$

come subito si verifica eseguendo la derivazione indicata.

Pertanto il diagramma di  $X(\omega)$  non può essere che del tipo:



Quindi necessariamente poli e zeri si alternano.

Gli altri casi sono trattati più dettagliato nel paragrafo da pag. 306 a pag. 312.

Si trova allora che sempre si può scrivere:

$$\Psi(j\omega) = jX(\omega)$$

e che è sempre:

$$dX(\omega)/d\omega > 0$$

(2) - Si è trovato a pag. 41 che:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \dots + \frac{As + B}{s^2 + \omega_i^2} + \dots \quad A = 2 \operatorname{Re}[k_i] \quad B = -2\omega_i \operatorname{Im}[k_i]$$

Ma nel nostro caso  $k_i$  è il residuo sul polo puramente immaginario, pertanto è reale e positivo, quindi:

$$\operatorname{Im}[k_i] = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\operatorname{Re}[k_i] > 0 \quad \Rightarrow \quad A > 0$$