

IV Elettrodinamica

4.1 Introduzione

Questo capitolo riguarda i campi elettrici e le cariche che si incontrano in diversi sistemi. L'elettricità è un fenomeno antico già conosciuto dai Greci. La base sperimentale e teorica dell'attuale comprensione dei fenomeni elettrodinamici è stata stabilita da due uomini: Michael Faraday, lo sperimentatore autodidatta, e James Clerk Maxwell, il teorico. Il lavoro di entrambi era basato su un vasto materiale e conoscenza di Coulomb. Faraday, in origine, un rilegatore, era molto interessato all'elettricità. La sua curiosità nell'acquisire conoscenze sui fenomeni elettrici ha permesso di ottenere un assistente nel laboratorio di Davy. Faraday (vedi Figura 4.1.1) è stato uno dei più grandi sperimentatori di sempre. Nel corso dei suoi esperimenti scoprì che un magnete sospeso ruotava attorno a un filo portante di corrente. Questa osservazione lo ha portato a proporre che il magnetismo sia una forza circolare. Ha inventato la dinamo nel 1821, con la quale viene generata una grande quantità della nostra attuale elettricità. Nel 1831 scoprì l'induzione elettromagnetica. Uno dei suoi più importanti contributi alla fisica nel 1845 fu lo sviluppo del concetto di campo per descrivere le forze magnetiche ed elettriche.

Michael Faraday: nato il 22 settembre 1791; morì il 25 agosto 1867.

Maxwell (vedi Figura 4.1.2) iniziò scrivendo un documento intitolato "Sulle linee di forza di Faraday" (1856), in cui tradusse le teorie di Faraday in forma matematica. Questa descrizione delle scoperte di Faraday per mezzo della matematica presentava le linee di forza come tubi immaginari contenenti un fluido incomprimibile. Nel 1861 pubblicò l'articolo "On Physical Lines of Force" in cui trattava le linee di forza come entità reali. Infine, nel 1865, pubblicò una teoria puramente matematica nota come "Su una teoria dinamica del campo elettromagnetico". Le equazioni derivate da Maxwell e pubblicate in "[A Treaties on Electricity and Magnetism](#)" (1873) sono ancora valide e costituiscono una fonte di leggi fondamentali per l'ingegneria oltre che per la fisica.

James Clerk Maxwell: nato il 13 giugno 1831; morì il 5 novembre 1879.

Lo scopo di questo capitolo è introdurre i fenomeni di base e le procedure risolutive di base per i campi elettrici. Il materiale discusso è una raccolta di esempi. È lungi dall'essere completo considerando l'enorme diversità dei fenomeni elettromagnetici. Tuttavia, gli esempi discussi dimostrano come i calcoli simbolici possono essere usati per derivare soluzioni per problemi elettromagnetici. Questo capitolo è organizzato come segue: La sezione 4.2 contiene materiale sulle cariche puntuali. L'esempio discute il campo elettrico di un insieme di cariche discrete distribuite nello spazio. Nella Sezione 4.3, viene esaminato un problema al bordo standard dell'elettrostatica per risolvere l'equazione di Poisson per un segmento angolare. L'interazione dinamica dei campi elettrici e delle particelle cariche in una trappola di Penning è discussa nella Sezione 4.4.

4.2 Campi elettrici e potenziali di distribuzioni discrete di carica

Nei problemi elettrostatici, spesso abbiamo bisogno di determinare il potenziale e i campi elettrici per una certa distribuzione di carica. L'equazione di base dell'elettrostatica è la legge di Gauss. Da questa relazione fondamentale che collega la densità di carica con il campo elettrico, si può derivare il potenziale del campo. Possiamo enunciare la legge di Gauss in forma differenziale con

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho(\vec{r}) \quad (4.2.1)$$

Se introduciamo il potenziale Φ come $\vec{E} = -grad(\Phi)$ possiamo riscrivere l'Eq. (4.2.1) per una data distribuzione di carica sotto forma di equazione di Poisson

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho \quad (4.2.2)$$

dove ρ denota la distribuzione di carica. Per ottenere soluzioni dell'Eq. (4.2.2), possiamo usare il formalismo delle funzioni di Green per derivare una particolare soluzione. La stessa funzione di Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$ deve soddisfare un'equazione di Poisson in cui la densità di carica continua è sostituita dalla funzione delta di Dirac:

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Il potenziale è quindi dato da

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') d^3r' \quad (4.2.3)$$

Inoltre, assumiamo che la condizione al contorno $G|_V = 0$ sia soddisfatta sulla superficie del volume V . Se lo spazio in cui si trovano le nostre cariche è infinitamente esteso, la funzione di Green è data da

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.2.4)$$

La soluzione dell'equazione di Poisson (4.2.3) diventa

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (4.2.5)$$

Il nostro obiettivo è quello di esaminare il potenziale e i campi elettrici di una distribuzione di carica discreta. Le cariche sono caratterizzate da un valore q_i e si trovano in determinate posizioni \vec{r}_i . La densità di carica di una tale distribuzione è data da:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (4.2.6)$$

Il potenziale di una tale distribuzione discreta degli oneri è in accordo con l'Eq. (4.2.5):

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (4.2.7)$$

dove \vec{r}_i denota la posizione della carica puntiforme. Il campo elettrico corrispondente è dato da:

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \sum_{i=1}^N q_i \vec{r} - \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (4.2.8)$$

e la densità di energia del campo elettrico di tale distribuzione di carica è data da:

$$w = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}|^2 \quad (4.2.9)$$

Tre proprietà fondamentali di una distribuzione di carica discreta sono definite dalle Eq. (4.2.7), (4.2.8) e (4.2.9). Di seguito scriviamo un pacchetto *Mathematica* che calcola il potenziale, il campo elettrico e la densità di energia per una data distribuzione di carica. Con questo pacchetto siamo in grado di creare immagini del potenziale, del campo elettrico e della densità di energia.

Per progettare una rappresentazione grafica delle tre quantità, abbiamo bisogno di creare grafici di contorno di uno spazio tridimensionale. Per semplificare la gestione delle funzioni, inseriamo le coordinate cartesiane delle località e l'intensità delle cariche come variabili di input in una lista. Le sue sotto-liste contengono le informazioni per le singole cariche. La struttura della lista di input è data da $\{\{x_1, y_1, z_1, \rho_1\}, \{x_2, y_2, z_2, \rho_2\}, \dots\}$. Per semplificare le cose nei nostri esempi, scegliamo la sezione $y = 0$ dello spazio tridimensionale. Il pacchetto `PointCharge`, che si trova nella sezione pacchetti e programmi, contiene le equazioni sopra discusse. Il pacchetto genera `contour plots` del potenziale, del campo elettrico e della densità di energia.

Per testare le funzioni di questo pacchetto, consideriamo alcuni insiemi di cariche frequentemente discussi in letteratura. Il nostro primo esempio descrive due particelle che trasportano la carica opposta, nota come dipolo. Definiamo prima le cariche e le loro coordinate per cariche: `charges={{1,0,0,1},{-1,0,0,-1}}`

Le cariche si trovano nello spazio in $x = 1, y = 0, z = 0$ e in $x = -1, y = 0, z = 0$. Il quarto elemento nelle sotto-liste specifica il valore delle cariche. L'immagine delle linee di contorno del potenziale viene creata chiamando:

```
FieldPlot[charges, "Potential"];
```

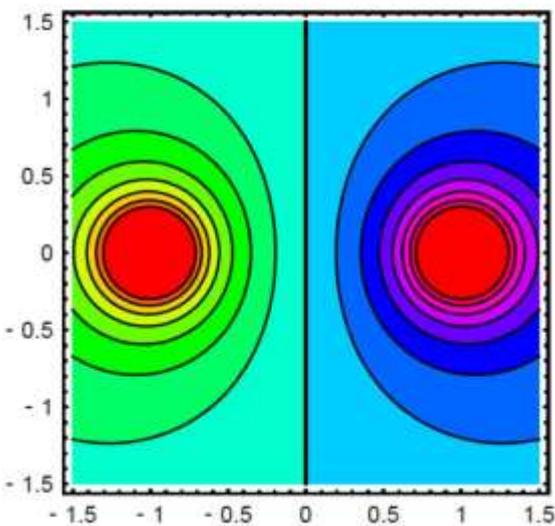
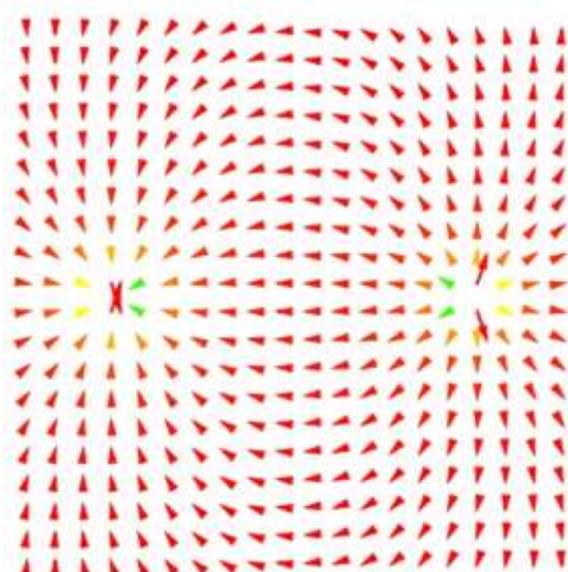


Figura 4.2.3 - ContourPlot del potenziale di due cariche nel piano (x, z) . Le particelle portano cariche opposte.

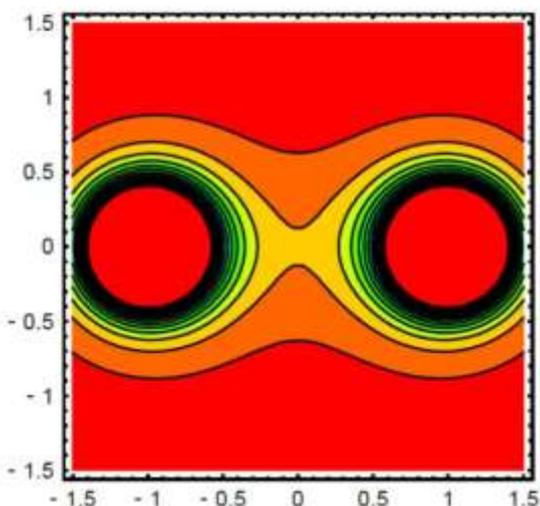
Il secondo argomento di `FieldPlot[]` viene fornito come una stringa che specifica il tipo di grafico del contorno. I valori possibili sono *Potential*, *Field* e *EnergyDensity*.

Il campo elettrico delle due cariche è generato da:

```
FieldPlot[charges, "Field"];
```



```
FieldPlot[charges, "EnergyDensity"];
```

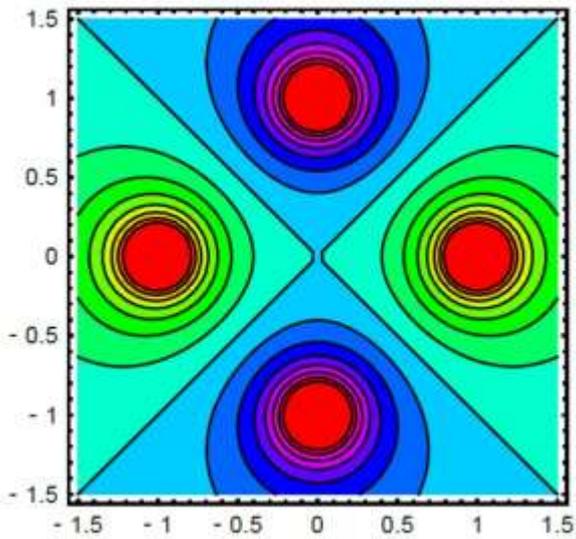


Poiché la generazione di grafici di campo è molto flessibile, siamo in grado di esaminare qualsiasi configurazione di cariche nello spazio. Un secondo esempio è dato da una quadrupla costituita da quattro cariche disposte in una configurazione spaziale. Le posizioni e la forza delle cariche sono definite da:

`quadrupole = {{-1, 0, 0, -1}, {1, 0, 0, -1}, {0, 0, 1, 1}, {0, 0, -1, 1}}`

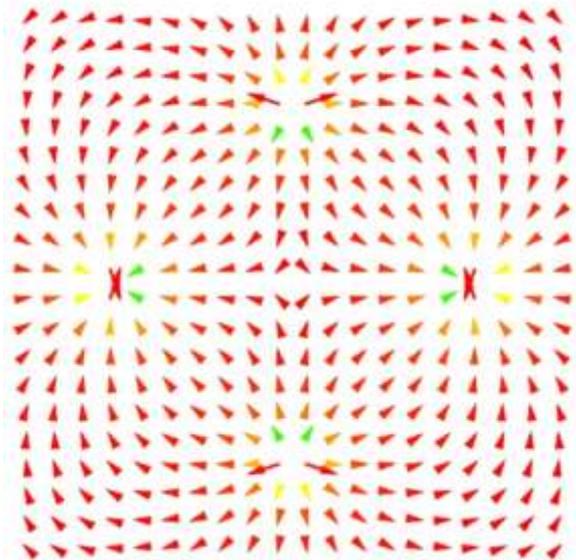
Il potenziale è

`FieldPlot[quadrupole, "Potential"];`

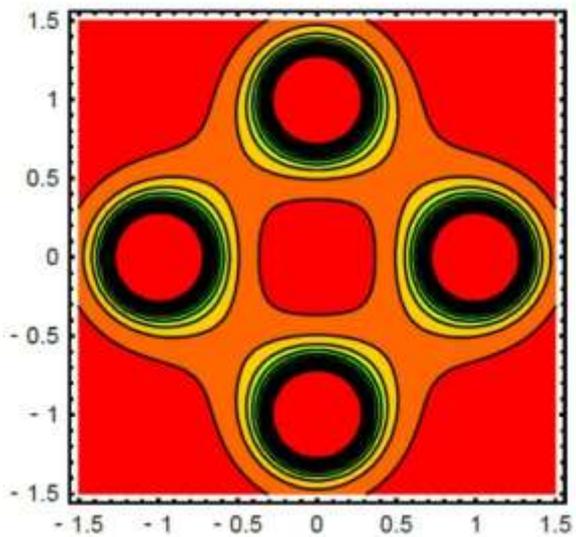


Le linee di campo nel piano (x, z) con $y = 0$ sono:

`FieldPlot[quadrupole, "Field"];`



`FieldPlot[quadrupole, "EnergyDensity"];`



4.3 Problema al contorno dell'elettrostatica

Nella sezione precedente, abbiamo discusso la disposizione delle cariche discrete. Il problema è stato risolto mediante l'equazione di Poisson per il caso generale. Abbiamo derivato la soluzione per il potenziale utilizzando

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho \quad (4.3.10)$$

L'equazione (4.3.10) si riduce all'equazione di Laplace se nello spazio non sono presenti cariche:

$$\Delta\Phi = 0 \quad (4.3.11)$$

L'equazione di Laplace è un tipo generale di equazione applicabile a molte diverse teorie della fisica, come la teoria del continuo, la gravitazione, l'idrodinamica, la termodinamica e la fisica statistica. In questa sezione, usiamo entrambe le equazioni di Poisson e Laplace (4.3.10) e (4.3.11) per descrivere i fenomeni elettrostatici. Mostriamo che le Eq. (4.3.10) e (4.3.11) sono risolvibili mediante l'uso della funzione di Green. Se conosciamo la funzione di Green dell'equazione, siamo in grado di considerare problemi generali al contorno. Un problema al bordo è definito come segue: per un certo volume V , la superficie di questo volume, V , possiede un potenziale elettrico specifico. Il problema è determinare il potenziale elettrico all'interno del volume dato il valore sulla superficie. Questo tipo di problema al contorno elettrostatico è chiamato problema del valore al contorno di Dirichlet. Secondo l'Eq. (4.3.10), ci sono cariche all'interno del volume V . La distribuzione o densità di queste cariche è indicata con (ρ) . Il problema matematico è trovare soluzioni per l'Eq. (4.3.10) o (4.3.11) una volta che conosciamo la distribuzione delle cariche e il potenziale elettrico sulla superficie del dominio.

La funzione di Green ci permette di semplificare la soluzione del problema. Nel nostro problema, dobbiamo risolvere l'equazione di Poisson (4.3.10) sotto certe restrizioni. La funzione di Green relativa al problema di Poisson è definita da

$$\Delta G(\bar{x}, \bar{x}') = -4\pi\mu\delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad (4.3.12)$$

sotto la specifica condizione al contorno

$$G(\bar{x}, \bar{x}')|_{\partial V} = 0 \quad \text{con} \quad \bar{x}' \in \partial V \quad (4.3.13)$$

sulla superficie ∂V del volume V .

Nella sezione precedente, abbiamo discusso la funzione di Green per uno spazio infinitamente esteso e abbiamo scoperto che la funzione di Green è rappresentata da $G(\bar{x}, \bar{x}') = 1/|\bar{x} - \bar{x}'|$. Il presente problema è più complicato di quello discusso in precedenza. Dobbiamo soddisfare le condizioni al contorno per un dominio finito nello spazio.

Per la nostra discussione, assumiamo che la funzione di Green esista e che possiamo usarla per risolvere il problema della frontiera. La dimostrazione di questa ipotesi è data da Arfken [4.1]. La connessione tra la funzione di Green e la soluzione del problema di frontiera è derivata usando il teorema di Gauss. La prima formula di Green

$$\int_V \text{div} \bar{A} d^3x = \int_{\partial V} \bar{A} d^2\bar{f} \quad (4.3.14)$$

insieme a un'appropriata rappresentazione del campo vettoriale $\vec{A} = \Phi \cdot \nabla G - \nabla \Phi \cdot G$ si ottiene la seconda formula di Green:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \Phi \cdot \Delta G - \Delta \Phi \cdot G \quad (4.3.15)$$

Usando il teorema integrale di Gauss nella forma dell'Eq. (4.3.14), troviamo:

$$\int_V (\Phi \cdot \Delta G - \Delta \Phi \cdot G) d^3x = \int_{\partial V} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d^2\bar{f} \quad (4.3.16)$$

dove $\partial/\partial n = \vec{n} \cdot \nabla$ è il gradiente normale. Se usiamo le relazioni (4.3.10), (4.3.12) e (4.3.13) nell'Eq. (4.3.16), possiamo derivare il potenziale dai due integrali:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \Phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} d^2\bar{f}' \quad (4.3.17)$$

Un confronto tra le eq. (4.3.17) e (4.2.3) rivelano che il potenziale totale nel problema di Dirichlet dipende da una parte di volume (coerente con l'Eq. (4.2.3) e anche da una parte di superficie. Il potenziale nella posizione x è costituito da un termine di volume contenente le cariche e di un termine di superficie determinato dal potenziale elettrico $\Phi(\vec{x}')$. Il potenziale $\Phi(\vec{x}')$ utilizzato nel termine di superficie è noto come condizione al contorno.

Se non ci sono cariche nel volume presente, la soluzione (4.3.17) si riduce a

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \Phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} d^2\bar{f}' \quad (4.3.18)$$

Per il caso privo di carica, il potenziale elettrico in una posizione \vec{x} all'interno del volume V è completamente determinato dal potenziale sulla superficie $\Phi(\vec{x}')$. Siamo in grado di derivare le Eq. (4.3.17) e (4.3.18) a condizione che la funzione di Green $G(\vec{x}, \vec{x}')$ si annulli sulla superficie di V . In altre parole, assumiamo che il potenziale di superficie sia una condizione al contorno. Questo tipo di condizione al contorno è chiamata condizione al contorno di Dirichlet. Un secondo tipo è la cosiddetta condizione al contorno di von Neumann, che specifica la derivata normale del potenziale elettrostatico $\partial\Phi/\partial n$ sulla superficie. Un terzo tipo utilizzato nella teoria del potenziale è una miscela di condizioni al contorno di Dirichlet e von Neumann. Nel seguito ci limiteremo alle sole condizioni al contorno di Dirichlet.

Se diamo un'occhiata più da vicino alle soluzioni (4.3.17) e (4.3.18) del nostro problema ai limiti, osserviamo che la funzione di Green come incognita determina la soluzione del nostro problema. In altre parole, abbiamo risolto il problema al contorno in una forma che contiene una funzione incognita definita dalla relazione (4.3.12) e dalla condizione al contorno (4.3.13). Il problema centrale è trovare una rappresentazione esplicita della funzione di Green. Un modo per affrontare questo è introdurre uno sviluppo di autofunzioni [4.2]. Questa procedura si applica sempre se le coordinate sono separabili. Lo sviluppo in autofunzione della funzione di Green si basa sull'analogia tra un problema agli autovalori e le equazioni (4.3.10) e (4.3.11) per il potenziale.

Il problema agli autovalori relativo all'equazione (4.3.10) è dato da:

$$\Delta\Psi + (4\pi\rho + \lambda)\Psi = 0 \quad (4.3.19)$$

Per una discussione dettagliata della connessione, vedere [4.2]. Supponiamo che le soluzioni Ψ dell'Eq. (4.3.19) soddisfano le condizioni al contorno di Dirichlet. In questo caso, le soluzioni regolari dell'Eq.

(4.3.12) si verificano solo se parametro $\lambda = \lambda_n$ assume determinati valori discreti. Le λ_n 's sono gli autovalori dell'Eq. (4.3.19). Le loro corrispondenti funzioni Ψ_n sono autofunzioni. Le autofunzioni Ψ_n sono ortogonali e soddisfano:

$$\int_{\partial V} \Psi_m^*(\bar{x}) \Psi_n(\bar{x}) d^3x = \delta_{mn} \quad (4.3.20)$$

Gli autovalori dell'Eq. (4.3.19) può essere discreto o continuo. In analogia con l'Eq. (4.3.12), la funzione di Green deve soddisfare l'equazione:

$$\Delta_x G(\bar{x}, \bar{x}') + (4\mu\rho + \lambda)G(\bar{x}, \bar{x}') = -4\pi\delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad (4.3.21)$$

dove λ è diverso dagli autovalori λ_n . Un'espansione della funzione di Green rispetto alle autofunzioni del relativo problema agli autovalori è possibile se la funzione di Green soddisfa le stesse condizioni al contorno. Sostituendo con uno della funzione di Green:

$$G(\bar{x}, \bar{x}') = \sum_n a_n(\bar{x}') \Psi_n(\bar{x}) \quad (4.3.22)$$

nell'Eq. (4.3.21), otteniamo

$$\sum_m a_m(\bar{x}') (\lambda - \lambda_m) \Psi_m(\bar{x}) = -4\pi\delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad (4.3.23)$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'Eq. (4.3.23) per $\Psi_n^*(\bar{x})$ e integrando il risultato sull'intero volume si ottengono i coefficienti di dilatazione $a_m(\bar{x}')$. L'uso della relazione ortogonale (4.3.20) semplifica la somma. I coefficienti di dilatazione sono definiti da:

$$a_m(\bar{x}') = 4\pi \frac{\Psi_n^*(\bar{x}')}{\lambda_n - \lambda} \quad (4.3.24)$$

Con la relazione (4.3.24) si ottiene la rappresentazione della funzione di Green:

$$G(\bar{x}, \bar{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\Psi_n^*(\bar{x}') \Psi_n(\bar{x})}{\lambda_n - \lambda} \quad (4.3.25)$$

Finora le nostre considerazioni hanno assunto uno spettro discreto di autovalori. Per una distribuzione continua di autovalori λ_n , dobbiamo sostituire la somma nell'Eq. (4.3.25) con integrale sugli autovalori.

Utilizzando la rappresentazione della funzione di Green (4.3.25), possiamo riscrivere la soluzione del potenziale (4.3.17) e (4.3.18) nella forma:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{x}') &= \int_V 4\pi \sum_n \frac{\Psi_n^*(\bar{x}') \Psi_n(\bar{x})}{\lambda_n - \lambda} \rho(\bar{x}') d^3x - \int_{\partial V} \Phi(\bar{x}') \sum_n \frac{\Psi_n(\bar{x})}{\lambda_n - \lambda} \frac{\partial \Psi_n^*(\bar{x}')}{\partial n'} d^2\bar{f}' \quad (4.3.26) \\ &= 4\pi \sum_n \frac{\Psi_n(\bar{x}')}{\lambda_n - \lambda} \int_V \Psi_n^*(\bar{x}') \rho(\bar{x}') d^3x - \sum_n \frac{\Psi_n(\bar{x}')}{\lambda_n - \lambda} \int_{\partial V} \Phi(\bar{x}') \frac{\partial \Psi_n^*(\bar{x}')}{\partial n'} d^2\bar{f}' \end{aligned}$$

Se conosciamo le autofunzioni e gli autovalori del problema, possiamo rappresentare il potenziale con:

$$\Phi(\bar{x}') = \sum_n (c_n - d_n) \Psi_n(\bar{x}) \quad (4.3.27)$$

dove c_n 's e d_n 's sono coefficienti di espansione definiti da:

$$c_n = \frac{4\pi}{\lambda_n - \lambda} \int_V \Psi_n^*(\bar{x}') \rho(\bar{x}') d^3x' \quad (4.3.28)$$

e

$$d_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \int_{\partial V} \Phi(\bar{x}') \frac{\partial \Psi_n^*(\bar{x}')}{\partial n'} d^2\bar{f}' \quad (4.3.29)$$

Per il caso di assenza di cariche $\rho = 0$, troviamo:

$$\Phi(\bar{x}) = - \sum_n \frac{\Psi_n(\bar{x})}{\lambda_n - \lambda} \int_{\partial V} \Phi(\bar{x}') \frac{\partial \Psi_n^*(\bar{x}')}{\partial n'} d^2\bar{f}' \quad (4.3.30)$$

che si reduce a:

$$\Phi(\bar{x}) = - \sum_n d_n \Psi_n(\bar{x}) \quad (4.3.31)$$

Le incognite di questa rappresentazione sono le autofunzioni Ψ_n e i coefficienti dello sviluppo c_n e d_n . Esaminando uno specifico problema planare, mostriamo come vengono calcolate queste incognite. Per semplificare, assumiamo che sul piano non siano distribuite cariche.

Il problema in oggetto esamina in una sezione di un disco in cui i confini hanno valori potenziali fissi $\Phi(r, \varphi = 0) = 0$, $\Phi(r, \varphi = \alpha) = 0$, $\Phi(r = R, \varphi) = \Phi_0(\varphi)$. La forma specifica del dominio e i valori limite sono riportati nella figura 4.3.5.

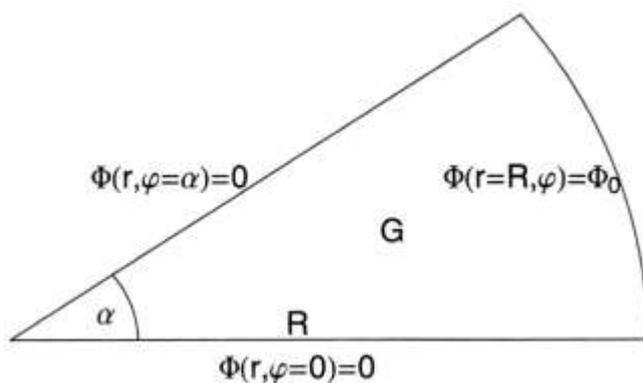


Figura 4.3.5 - Condizioni al contorno su un segmento di disco. Il dominio G è senza cariche.

Il dominio G è privo di cariche e il potenziale $\Phi(r, \varphi)$ è regolare e finito per $r \rightarrow 0$. Per risolvere il problema in modo efficiente, scegliamo coordinate che riflettano la geometria del nostro problema. In questo caso, sono coordinate cilindriche piane. Poiché G è privo di cariche, assume la forma dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche piane:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4.3.32)$$

Quando si deriva la soluzione, si assume che le coordinate siano separate. Se usiamo l'ipotesi di separare le coordinate, siamo in grado di esprimere il potenziale elettrico come $\Phi(r, \varphi) = g(r) \cdot h(\varphi)$. Sostituendo questa espressione nell'Eq. (4.3.32), otteniamo

$$\frac{1}{g(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) = - \frac{1}{h(\varphi)} \frac{\partial^2 h(\varphi)}{\partial \varphi^2} = v^2 \quad (4.3.33)$$

dove v è una costante. Separando entrambe le equazioni, otteniamo due equazioni differenziali ordinarie che determinano g e h . Le g e h rappresentano le autofunzioni della funzione di Green:

$$\frac{r}{g(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr} \right) = v^2 \quad (4.3.34)$$

$$\frac{1}{h(\varphi)} \frac{d^2 h(\varphi)}{d\varphi^2} = -v^2 \quad (4.3.35)$$

Le autofunzioni della parte radiale del potenziale sono:

$$g_v(r) = a_v r^v + b_v r^{-v} \quad (4.3.36)$$

La parte angolare delle autofunzioni definite nell'Eq. (4.3.35) è data da:

$$h_v(\varphi) = A_v \sin(v\varphi) + B_v \cos(v\varphi) \quad (4.3.37)$$

Le soluzioni (4.3.36) e (4.3.37) contengono quattro costanti a_v, b_v, A_v, B_v per ogni autovalore v . Queste costanti devono soddisfare le condizioni al contorno e la condizione di regolarità in $r = 0$.

Esaminiamo prima la parte radiale della soluzione nel dominio G . Troviamo che per $\varphi = 0$, la relazione:

$$\Phi(r, \varphi = 0) = g(r)h(\varphi = 0) = 0 \quad (4.3.38)$$

ha bisogno di essere soddisfatta. Dalla condizione (4.3.38), segue che $h(\varphi = 0) = B_v = 0$. Dalla condizione al contorno a $\varphi = \alpha$ otteniamo la condizione:

$$\Phi(r, \varphi = \alpha) = g(r)h(\varphi = \alpha) = 0 \quad (4.3.39)$$

che risulta in $h(\alpha) = A_v \sin(v\alpha) = 0$. Di conseguenza, otteniamo $v = n\pi/\alpha$ con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. La parte angolare della soluzione si riduce così a:

$$h_n(\varphi) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right) \quad (4.3.40)$$

Dalla condizione di regolarità ($r \rightarrow 0, \varphi < \infty$), segue da:

$$\Phi(r, \varphi) = h_v(\varphi)(a_v r^v + b_v r^{-v}) \quad (4.3.41)$$

che $b_v = 0$. La soluzione del potenziale è quindi rappresentata da:

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n r^{n\pi/\alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right) \quad (4.3.42)$$

dove $d_n = a_n A_n$. L'espressione (4.3.42) contiene i coefficienti incogniti d_n , che dobbiamo determinare per trovare le loro rappresentazioni esplicite. I valori per d_n sono determinati applicando la condizione al contorno sul cerchio $\Phi(r = R, \varphi) = \Phi_0(\varphi)$. Se prendiamo in considerazione la relazione di ortogonalità per le funzioni trigonometriche:

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right) \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) d\varphi = \delta_{nm} \quad (4.3.43)$$

siamo in grado di ricavare dalla condizione al contorno del cerchio una rappresentazione di d_n come:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \Phi_0(\varphi) \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right) d\varphi &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m R^{m\pi/\alpha} \int_0^\alpha \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right) \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) d\varphi = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m R^{m\pi/\alpha} \frac{\alpha}{2} \delta_{nm} = \frac{\alpha}{2} R^{n\pi/\alpha} d_n \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

o in forma esplicita,

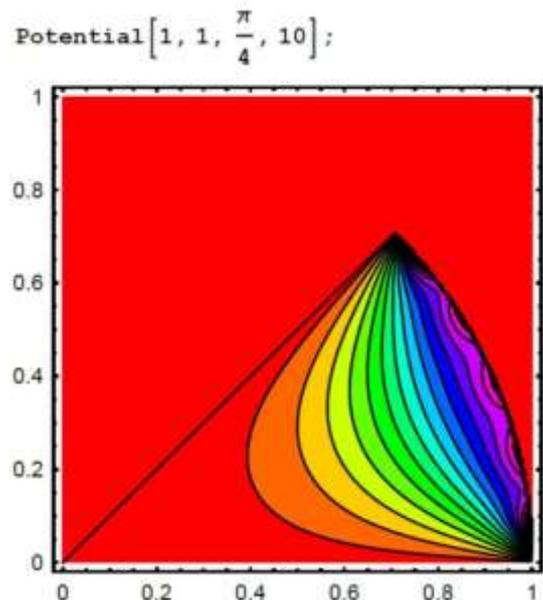
$$d_n = R^{-n\pi/\alpha} \frac{\alpha}{2} \int_0^\alpha \Phi_0(\varphi) \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right) d\varphi \quad (4.3.45)$$

La rappresentazione di d_n mediante l'integrale (4.3.45) include la condizione al contorno e contiene solo parametri noti. Quindi, possiamo determinare il valore numerico dei d_n 's, se conosciamo la condizione al contorno e se specifichiamo l'indice m dell'espansione nell'Eq. (4.3.42). I valori di d_n sono, tuttavia, definiti solo se l'integrale nell'Eq. (4.2.45) converge. La forma specifica della funzione di Green è derivabile se confrontiamo la rappresentazione della soluzione (4.3.42) con la definizione della funzione di Green.

Con le considerazioni teoriche di cui sopra, è ora necessaria una rappresentazione esplicita della soluzione. Specificando i parametri geometrici del problema, il raggio R del segmento, l'angolo α , il valore del potenziale lungo il bordo del disco e l'Eq. (4.3.42), possiamo calcolare il potenziale nel dominio G . Le grandezze centrali dell'espansione (4.3.42) sono i coefficienti d_n . Per rendere disponibili questi fattori, definiamo la somma (4.3.42) e l'integrale (4.3.45) in **Potential[]**, funzione del pacchetto **BoundaryProblem** (vedi Sezione 4.6.2 per i dettagli).

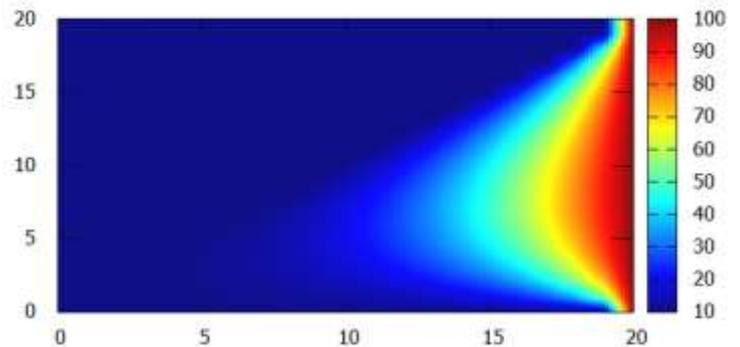
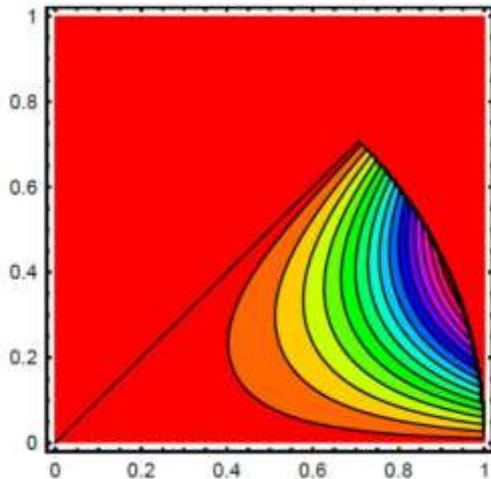
Definiamo le relazioni (4.3.42) e (4.3.45) per controllare l'accuratezza del calcolo utilizzando un indice di sommatoria superiore n (si veda anche la definizione della funzione **Potential[]** nella Sezione 4.6.2). Un esempio del potenziale per i parametri $R = 1, \alpha = \pi/4, \Phi_0(\varphi) = 1$ è dato nella Figura 4.3.6. La sequenza di chiamata di **Potential[]** assume la forma **Potential[f[x], R, alpha, n]**.

Figura 4.3.6 - Contour plot del potenziale nel dominio G . Le condizioni al contorno e i parametri geometrici sono $\Phi_0(\varphi) = 1, R = 1, \alpha = \frac{\pi}{4}, n = 10$.



Il risultato mostra un'approssimazione del potenziale fino all'ordine 10. Le linee di contorno mostrano che l'approssimazione mostra alcune oscillazioni al bordo del dominio. La qualità dell'approssimazione può essere verificata aumentando l'ordine di approssimazione. L'aumento della qualità è mostrato nella seguente sequenza di grafici (Figura 4.3.7):

```
p1 = Table[Potential[1, 1,  $\frac{\pi}{4}$ , i], {i, 1, 20, 2}];
```



Stesso problema risolto per interpolazione su una mesh 2D. VBA con Gnuplot per la grafica.

Figura 4.3.7 - Sequenza di **contour plot** del potenziale nel dominio G . Condizioni al contorno e parametri geometrici sono $R = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\Phi_0(\varphi) = 1$, $n \in [1, 20, 2]$.

A questo punto, dovrebbe essere menzionata una parola di cautela. L'approssimazione del potenziale mostra che la procedura è sensibile nell'ordine di approssimazione. Il tipo di calcolo è anche sensibile alle condizioni al contorno, che viene dato come primo argomento nella funzione **Potential[]**. Sebbene il potenziale calcolato mostri il comportamento previsto, non è sempre possibile calcolare il potenziale per un ordine di approssimazione ragionevole per condizioni al contorno arbitrarie. Questa mancanza è dovuta al calcolo degli integrali nella procedura. Tuttavia, il lettore dovrebbe sperimentare la funzione e testare i limiti del metodo per farsi un'idea dell'applicabilità. Un esempio con una condizione al contorno spazialmente variabile sul bordo è presentato nella Figura 4.3.8.

```
Potential[2 + Sin[7  $\phi$ ], 1,  $\frac{\pi}{4}$ , 20];
```

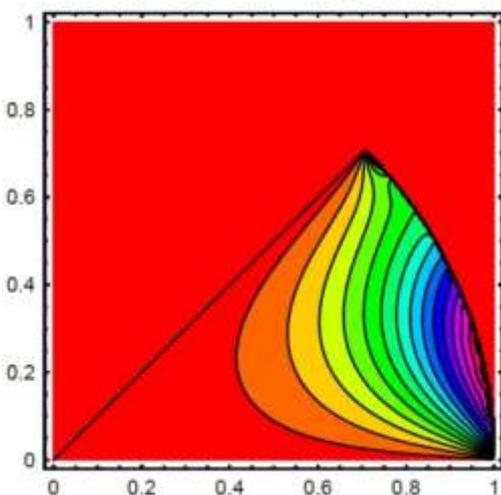


Figura 4.3.8 - **Contour plot** del potenziale nel dominio G . Condizioni al contorno e parametri geometrici sono $\Phi_0(\varphi) = 2 + \sin(7\varphi)$, $R = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $n = 10$

4.4 Two Ions in the Penning Trap

Lo studio delle proprietà spettroscopiche dei singoli ioni richiede che uno o due ioni siano intrappolati in una cavità. Al giorno d'oggi, gli ioni possono essere separati e immagazzinati con successo mediante trappole ioniche. Per intrappolare gli ioni vengono utilizzate due tecniche. Il primo metodo utilizza un campo elettrico dinamico, mentre il secondo metodo utilizza campi elettrici e magnetici statici. La trappola dinamica è stata originariamente inventata da Paul [4.3]. La trappola statica si basa sul lavoro di Penning [4.4]. Entrambe le trappole utilizzano una combinazione di campi elettrici e magnetici per confinare gli ioni in un certo volume nello spazio. Due paraboloidi collegati ad una sorgente continua determinano il tipo di campo elettrico in cui sono intrappolati gli ioni. La forma dei paraboloidi a sua volta determina il campo all'interno della trappola. Poiché il moto degli ioni nella trappola di Paul è molto complicato, restringiamo il nostro studio alla trappola di Penning.

Nella nostra discussione sulla trappola di Penning, si presume che la forma dei campi di quadrupolo determinata dalle forme dei paraboloidi sia:

$$\Phi = \frac{U_0}{r_0^2 + 2z_0^2} (x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (4.4.46)$$

dove U_0 è la forza della sorgente e r_0 e z_0 sono le estensioni radiale e assiale della trappola (vedi Figura 4.4.9). La forma del potenziale è una conseguenza dell'equazione di Laplace $\nabla^2\Phi = 0$. La forma funzionale data del potenziale è creata sperimentalmente da pareti conduttrici collegate a una batteria in corrente continua. La forza che agisce su una carica ionica q nella trappola è data da:

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\nabla\Phi \quad (4.4.47)$$

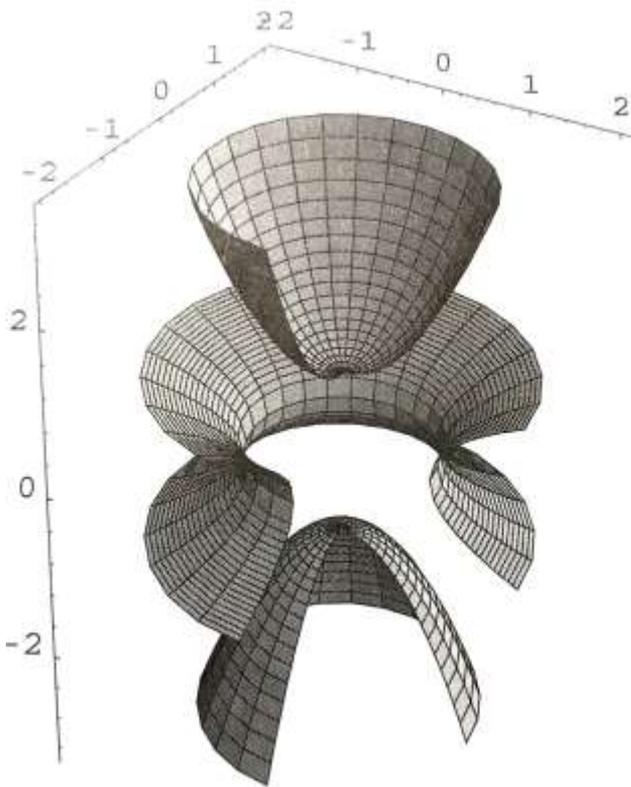


Figura 4.4.9 - Sezione trasversale della trappola di Penning. I paraboloidi sono posizionati su potenziali costanti. Un campo magnetico costante è sovrapposto nella direzione verticale z (non mostrato). Gli ioni si muovono al centro della trappola.

Dalla forma funzionale del campo elettrico \vec{E} della trappola:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\frac{U_0}{r_0^2 + 2z_0^2} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -2Z \end{pmatrix} = -\frac{U_0}{r_0^2 + 2z_0^2} (\vec{x} - 3\vec{e}_z) \quad (4.4.48)$$

rileviamo un cambiamento di segno nelle coordinate. Questa instabilità consente agli ioni di sfuggire alla trappola. Per impedire la fuga dalla trappola nella direzione z , Paul e collaboratori hanno utilizzato un campo variabile ad alta frequenza, e Penning e collaboratori hanno utilizzato un campo magnetico permanente $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$

In una trappola statica le forze agenti su ciascuno dei due ioni sono determinate dalla forza elettromagnetica dei campi esterni e dalla forza repulsiva dell'interazione coulombiana delle cariche. I campi esterni sono costituiti dal campo magnetico statico lungo l'asse z e dal campo elettrico quadrupolare della trappola. L'interazione coulombiana delle due particelle è governata principalmente dalle cariche trasportate dalle particelle. La forza totale su ciascuna particella è una combinazione delle forze di trappola e di Coulomb.

Poiché abbiamo un sistema contenente solo poche particelle, possiamo usare la teoria di Newton (vedi paragrafo 2.4) per scrivere le equazioni del moto nella forma:

$$m\vec{x}'' = (\vec{F})_i^T + (\vec{F})_i^{Coul} \quad i = 1,2 \quad (4.4.49)$$

Nell'equazione (4.4.49) la forza di trappola $(\vec{F})_i^T$ denota la forza di Lorentz di una particella nel campo elettromagnetico data da:

$$(\vec{F})_i^T = q(\vec{E})_i + q(\vec{v}_i \times \vec{B}) \quad (4.4.50)$$

Poiché il campo magnetico \vec{B} è un campo costante lungo la direzione z :

$$\vec{B} = B_0\vec{e}_z \quad (4.4.51)$$

la forza di trappola totale sull' i -esimo ione è data da:

$$(\vec{F})_i^T = -\frac{2U_0}{r_0^2 + 2z_0^2} (\vec{x} - 3z_i\vec{e}_z) + q(\vec{x}_i \times \vec{B}) \quad (4.4.52)$$

Le forze di Coulomb tra il primo e il secondo ione sono:

$$(\vec{F})_{12}^{Coul} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad (4.4.53)$$

$$(\vec{F})_{21}^{Coul} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} \quad (4.4.54)$$

Le forme esplicite delle equazioni del moto sono quindi:

$$m\vec{x}''_1 = -\frac{2U_0}{r_0^2 + 2z_0^2} (\vec{x}_1 - 3z_1\vec{e}_z) + q(\vec{x}_1 \times \vec{B}) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad (4.4.55)$$

$$(4.4.56)$$

$$m\ddot{\vec{x}}_2 = -\frac{2U_0}{r_0^2 + 2z_0^2}(\vec{x}_2 - 3z_2\vec{e}_z) + q(\vec{x}_2 \times \vec{B}) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}$$

Le due equazioni del moto (4.4.55) e (4.4.56) sono equazioni differenziali ordinarie accoppiate del secondo ordine. Possono essere disaccoppiati introducendo coordinate relative e del centro di massa:

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2; \quad \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2); \quad (4.4.57)$$

Utilizzando le eq. (4.4.57) in (4.4.55) e (4.4.56), possiamo descrivere il moto dei due ioni nel centro di massa e in coordinate relative. Le due equazioni trasformate sono:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{2U_0}{m(r_0^2 + 2z_0^2)}(\vec{R} - 3Z\vec{e}_z) + \frac{qB_0}{m}(\dot{\vec{R}} \times \vec{e}_z) \quad (4.4.58)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{2U_0}{m(r_0^2 + 2z_0^2)}(\vec{r} - 3z\vec{e}_z) + \frac{qB_0}{m}(\dot{\vec{r}} \times \vec{e}_z) + \frac{q^2}{2\pi m\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (4.4.59)$$

Se assumiamo che i due ioni portino una carica negativa $q < 0$ e che il potenziale dc U_0 sui paraboloidi sia positivo ($U_0 > 0$), allora possiamo introdurre due frequenze caratteristiche e una carica scalata:

$$\omega_0^2 = \frac{2U_0}{m(r_0^2 + 2z_0^2)} \quad (4.4.60)$$

$$\omega_c = \frac{|q|B_0}{m} \quad (4.4.61)$$

$$Q^2 = \frac{q^2}{2\pi m\epsilon_0} \quad (4.4.62)$$

La costante ω_0 denota la frequenza delle oscillazioni lungo la direzione z . ω_c è la frequenza del ciclotrone (cioè la frequenza con cui gli ioni ruotano attorno al campo magnetico). Q rappresenta la carica scalata. Usando queste costanti nelle equazioni del moto (4.4.58) e (4.4.59), otteniamo un sistema semplificato di equazioni contenente solo tre costanti:

$$\ddot{\vec{R}} = \omega_0^2(\vec{R} - 3Z\vec{e}_z) - \omega_c(\dot{\vec{R}} \times \vec{e}_z) \quad (4.4.63)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \omega_0^2(\vec{r} - 3z\vec{e}_z) - \omega_c(\dot{\vec{r}} \times \vec{e}_z) + Q^2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (4.4.64)$$

Nelle seguenti sottosezioni, discutiamo i due diversi tipi di moto risultanti da queste equazioni.

4.4.1 Il moto del centro di massa

Il moto del centro di massa è determinato dall'Eq. (4.4.63). Scrivendo le equazioni del moto nelle coordinate cartesiane X, Y, Z , otteniamo un sistema di equazioni accoppiate:

$$X'' - \omega_0^2 X + \omega_c Y' = 0 \quad (4.4.65)$$

$$Y'' - \omega_0^2 Y - \omega_c X' = 0 \quad (4.4.66)$$

$$Z'' + 2\omega_0^2 Z = 0 \quad (4.4.67)$$

Le equazioni del moto per le componenti X e Y sono accoppiate attraverso il prodotto incrociato. La componente Z del moto è completamente disaccoppiata dalle coordinate X e Y . L'ultima di queste tre equazioni è equivalente ad un oscillatore armonico con frequenza $\sqrt{2}\omega_0$. Quindi, conosciamo immediatamente la soluzione della coordinata Z data da:

$$Z(t) = A \cos(\sqrt{2}\omega_0 t + B) \quad (4.4.68)$$

Le costanti arbitrarie A e B sono legate alle condizioni iniziali del moto da $Z(t=0) = Z_0$ e $Z'(t=0) = Z'_0$. Pertanto, $A = Z_0^2 + Z_0'^2 / 2\omega_0^2$; e $B = Z_0' / \sqrt{2}\omega_0 Z_0$.

Una rappresentazione della soluzione delle restanti due equazioni (4.4.65) e (4.4.66) segue combinando le due coordinate X e Y con una trasformazione complessa della forma $\mathcal{Y} = X + iY$. Applicando questa trasformazione alle due equazioni, essa fornisce la semplice rappresentazione:

$$\dot{\mathcal{Y}} - \omega_0^2 - i\omega_c \dot{\mathcal{Y}} = 0 \quad (4.4.69)$$

Se assumiamo che le soluzioni dell'Eq. (4.4.69) sono funzioni armoniche del tipo $\mathcal{Y} = e^{i\omega t}$, si ottiene il corrispondente polinomio caratteristico:

$$\omega(\omega_c - \omega) - \omega_0^2 = 0 \quad (4.4.70)$$

Le due soluzioni di questa equazione quadratica sono date dalle frequenze ω_1 e ω_2 :

$$\omega_1 = \frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (4.4.71)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (4.4.72)$$

Le due frequenze sono combinazioni della frequenza del ciclotrone ω_c e della frequenza assiale ω_0 . La soluzione generale delle Eq. (4.4.65) e (4.4.66) è quindi data da:

$$X(t) = B_r \cos(\omega_1 t) + B_i \cos(\omega_1 t) + A_r \cos(\omega_2 t) + A_i \cos(\omega_2 t) \quad (4.4.73)$$

$$Y(t) = A_r \cos(\omega_2 t) + A_i \cos(\omega_2 t) + B_r \cos(\omega_1 t) + B_i \cos(\omega_1 t) \quad (4.4.74)$$

$$Z(t) = A \cos(\sqrt{2}\omega_0 t + B) \quad (4.4.68)$$

Le costanti di integrazione A_r, A_i, B_r, B_i sono legate alle condizioni iniziali X_0, Y_0, X'_0, Y'_0 dalle relazioni:

$$A_r = \frac{Y'_0 - \omega_1 X_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (4.4.75)$$

$$A_i = \frac{X'_0 - \omega_1 Y_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (4.4.76)$$

$$B_r = \frac{Y'_0 - \omega_2 X_0}{\omega_1 - \omega_2} \quad (4.4.77)$$

$$B_i = \frac{X'_0 - \omega_2 Y_0}{\omega_1 - \omega_2} \quad (4.4.78)$$

Un caso particolare delle soluzioni (4.4.73) e (4.4.74) si ottiene se assumiamo che il centro di massa si trovi inizialmente nell'origine del sistema di coordinate $X_0 = Y_0 = 0$. Otteniamo da (4.4.75) $A_r = -B_r$ e $A_i = -B_i$. La soluzione prende quindi la forma:

$$X(t) = A_r \sin\left(\frac{\omega_c}{2}t\right) \sin\left(\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) - A_i \cos\left(\frac{\omega_c}{2}t\right) \sin\left(\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) \quad (4.4.79)$$

$$Y(t) = A_i \sin\left(\frac{\omega_c}{2}t\right) \sin\left(\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) - A_r \cos\left(\frac{\omega_c}{2}t\right) \sin\left(\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) \quad (4.4.80)$$

$$Z'' + 2\omega_0^2 Z = 0 \quad (4.4.67)$$

Le soluzioni di cui sopra mostrano che il moto del centro di massa nel piano (X, Y) è governato da due frequenze. La prima frequenza è la metà della frequenza del ciclotrone ω_c e la seconda frequenza è una combinazione della frequenza assiale e della frequenza del ciclotrone data da: $\sqrt{(\omega_c/2)^2 - \omega_0^2}$. Un grafico del moto nelle coordinate del centro di massa è riportato nella Figura 4.4.10. Il moto tridimensionale del centro di massa è governato da tre frequenze. La frequenza assiale $\sqrt{2}\omega_0$ determina la velocità di oscillazione del centro di massa lungo l'asse z . La frequenza dimezzata del ciclotrone $\omega_c/2$ governa la rotazione delle particelle attorno alle linee magnetiche.

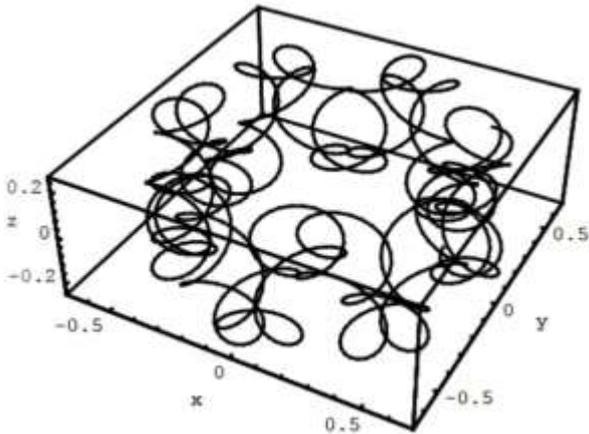


Figura 4.4.10 - Moto del centro di massa nello spazio per $t \in [0, 100]$. Le condizioni iniziali sono $X_0 = 0,5 = Y_0$, $\dot{X}'_0 = 0,1 = \dot{Y}'_0$. La frequenza del ciclotrone è fissata a $\omega_c = 5$.

4.4.2 Moto relativo degli ioni

Il moto relativo dei due ioni è governato dall'Eq. (4.4.64)

$$\vec{r}'' = \omega_0^2(\vec{r} - 3z\vec{e}_z) - \omega_c(\vec{F}' \times \vec{e}_z) + Q^2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (4.4.81)$$

Le coordinate cilindriche sono il sistema di coordinate appropriato che fornisce una descrizione efficiente del moto relativo delle particelle. La posizione r della relativa particella è data in coordinate cilindriche dalla rappresentazione:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + \zeta \vec{e}_z \quad (4.4.82)$$

dove \vec{e}_ρ ed \vec{e}_z rappresentano rispettivamente i vettori unitari nelle direzioni radiale e assiale.

Utilizzando queste coordinate nell'equazione del moto (4.4.81) si ottiene la seguente rappresentazione:

$$(\rho'' - \rho\varphi'^2)\vec{e}_\rho + (2\rho'\varphi' + \rho\varphi'')\vec{e}_\varphi + \zeta''\vec{e}_z - \omega_0^2(\rho\vec{e}_\rho - 2\zeta\vec{e}_z) + \omega_c(-\rho'\vec{e}_\varphi + \rho\varphi'\vec{e}_\rho) = \frac{Q^2(\rho\vec{e}_\rho + \zeta\vec{e}_z)}{(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^3} \quad (4.4.83)$$

Separando ciascuna direzione coordinata, possiamo dividere l'Eq. (4.4.83) in un sistema di equazioni per le coordinate ρ, φ, ζ :

$$\rho'' - \rho\varphi'^2 - \omega_0^2\rho + \omega_c\rho\varphi' = \frac{Q^2\rho}{(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^3} \quad (4.4.84)$$

$$2\rho'\varphi' + \rho\varphi'' - \omega_c\rho = 0 \quad (4.4.85)$$

$$\zeta'' + 2\omega_0^2\zeta = \frac{Q^2\rho}{(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^3} \quad (4.4.86)$$

Moltiplicando l'Eq. (4.4.85) per la coordinata radiale e integrando il risultato, possiamo ricavare un integrale del moto. Questo integrale del moto è dato da un momento angolare esteso contenente la frequenza di ciclotrone ed è quindi connesso con il campo magnetico. La quantità conservata è data da:

$$l_B = \rho^2\varphi' - \frac{\omega_c}{2}\rho^2 \quad (4.4.87)$$

L'integrale del moto (4.4.87) elimina la dipendenza da φ nell'Eq. (4.4.84). L'eliminazione di φ riduce il sistema di equazioni (4.4.84) e (4.4.86) a:

$$\rho'' + \left(\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_0^2\right)\rho - \frac{l_B}{\rho^3} = \frac{Q^2\rho}{(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^3} \quad (4.4.88)$$

$$\zeta'' + 2\omega_0^2\zeta = \frac{Q^2\rho}{(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^3} \quad (4.4.89)$$

Questo sistema di equazioni contiene una moltitudine di parametri. Il nostro obiettivo è quello di ridurre questi parametri scalando opportunamente le coordinate temporali e spaziali. Se consideriamo positiva l'espressione $\beta = \omega_c/2^2 = \omega_0^2 > 0$, il tempo viene scalato con $\tau = \beta t$. Le coordinate radiali e assiali e sono scalate dal fattore $d = (Q/B)^{3/2}$. Introducendo le abbreviazioni $v^2 = (l_B/\beta)^2$ e $\lambda^2 = (\sqrt{2}\omega_0^2/\beta)^2$ si semplifica il sistema di equazioni (4.4.88) e (4.4.89) in questo modo:

$$\rho'' + \rho - \frac{v^2}{\rho^3} = \frac{\rho}{(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^3} \quad (4.4.90)$$

$$\zeta'' + \lambda^2\zeta = \frac{\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^3} \quad (4.4.91)$$

contenente solo due parametri v e λ . La gestione delle Eq. (4.4.90) e (4.4.91) è più semplice della rappresentazione a quattro parametri nelle equazioni (4.4.88) e (4.4.89). Si noti che le eq. (4.4.90) e (4.4.91) sono equivalenti alle equazioni secolari della trappola di Paul. Entrambi i sistemi di equazioni sono derivati da una lagrangiana data da:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\rho'^2 + \zeta'^2) - \left(\frac{1}{2}(\rho^2 + 2\lambda^2\zeta^2) + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} + \frac{v^2}{2\rho^2} \right) \quad (4.4.92)$$

Le equazioni (4.4.90) e (4.4.91) formano un sistema di equazioni accoppiato altamente non lineare che può essere risolto analiticamente solo per una data scelta speciale di parametri v e λ [4.5]. Se vogliamo scegliere i parametri, dobbiamo integrare numericamente le equazioni. *Mathematica* supporta le integrazioni numeriche e usiamo questa proprietà per trovare soluzioni numeriche per le Eq. (4.4.90) e (4.4.91). Il pacchetto **Penning**, il cui listato è fornito nella Sezione 4.6.3, contiene la funzione necessaria **PenningI[]** per integrare le Eq. (4.4.90) e (4.4.91). La funzione **PenningI[]** fornisce anche una rappresentazione grafica del potenziale e del percorso della relativa particella. Un esempio di un tipico percorso nel potenziale è dato nella Figura 4.4.11. I parametri e di questa figura sono stati scelti in modo che il moto della relativa particella sia regolare. La Figura 4.4.12 mostra un percorso per i parametri v e λ dove è presente un movimento caotico.

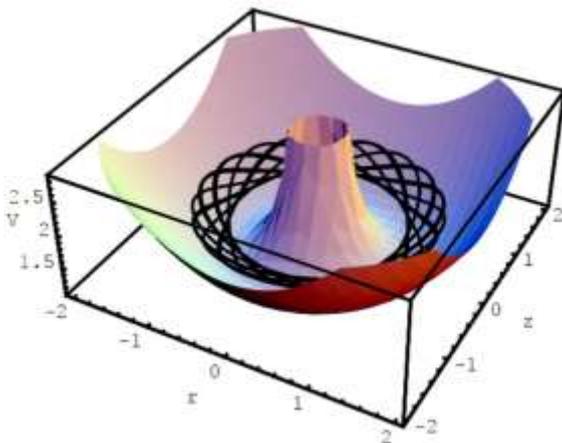


Figura 4.4.11 - Moto relativo in una trappola di Penning per $\lambda = 1$ e $v = 0$. L'andamento della particella è sovrapposto al potenziale effettivo. L'integrazione numerica si estende su $t \in [0, 100]$. Le condizioni iniziali sono $\rho_0 = 1.1$; $\zeta_0 = 0.5$; $\dot{\rho}_0 = 0.0$; $E = 2.0$.

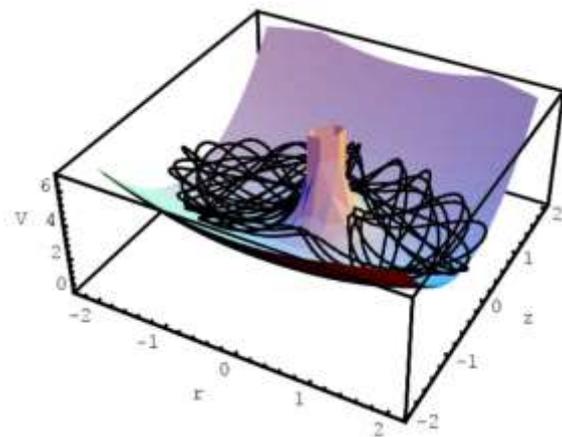
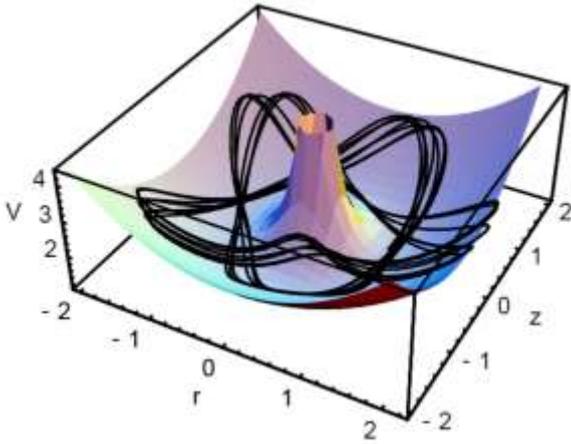


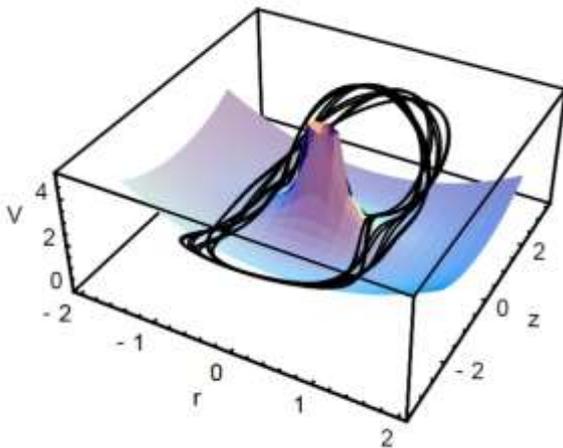
Figura 4.4.12 - Moto relativo in una trappola di Penning per $\lambda = 1.75$ e $v = 0$. L'andamento della particella è sovrapposto al potenziale effettivo. L'integrazione numerica si estende su $t \in [0, 100]$. Le condizioni iniziali sono $\rho_0 = 1.0$; $\zeta_0 = 0.0$; $\dot{\rho}_0 = 0.0$; $E = 3.0$.

I grafici per diverse condizioni iniziali e parametri possono essere generate ad esempio da:

```
Penning[1.0, 0, 3, 0, 1.1, 100];
```

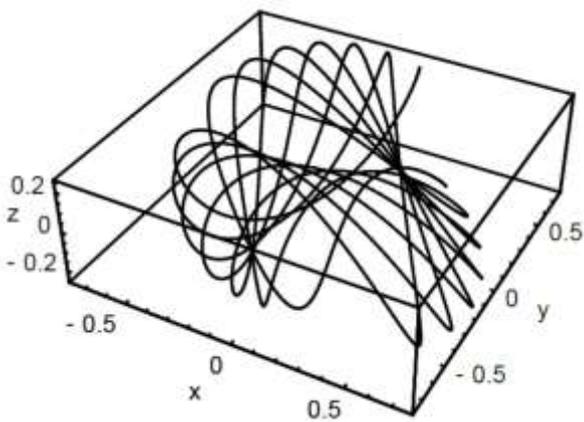


```
Penning[1.0, 0.1, 3.6, 0, 100];
```



Il moto del centro di massa è accessibile mediante la funzione **PenningCMPlot[]**:

```
PenningCMPlot[0.1, 0.2, 0.01, 0.01, 2.1];
```



4.5 Esercizi

- 1) - Creare alcune immagini per una disposizione quadrupolare delle cariche utilizzando il pacchetto **PointCharge**'. Scegli la posizione delle cariche nel piano di rappresentazione della sezione potenziale. Quali modifiche sono necessarie se la scelta delle coordinate per le cariche è al di fuori del piano di rappresentazione? Eseguire alcuni esperimenti con un numero maggiore di cariche.
- 2) - Esaminare il potenziale elettrico di un segmento di disco in diverse condizioni al contorno utilizzando il pacchetto **BoundaryProblem**' (ad esempio, $\Phi_0 = \sin(\varphi)$ oppure $\Phi_0 = \varphi$). Quali cambiamenti si verificano nel potenziale se cambiamo l'angolo? Esaminare l'influenza dell'indice di sommatoria superiore N sull'accuratezza della soluzione.
- 3) - Studiare le proprietà dinamiche di due ioni in una trappola di Penning per quanto segue:
 - a) Un momento angolare nullo ($\nu = 0$) e diversi rapporti di frequenza λ . Quali valori λ determinano un moto caotico e un moto regolare delle particelle?
 - b) Trova le soluzioni per $\nu \neq 0$; $\lambda = 1$; e anche $\lambda = 2$.
 - c) Esaminare la combinazione dei parametri $\nu = 0$ e $\lambda = \frac{1}{2}$
- 4) - Sviluppare una funzione *Mathematica* per combinare le coordinate relative e quelle del centro di massa per una rappresentazione del moto nello spazio reale per il problema dei due ioni di una trappola di Penning.
- 5) - Riesaminare il formalismo della funzione di Green e discutere il problema di un contorno rettangolare con un lato recante una distribuzione di carica costante. Gli altri tre lati sono fissati al potenziale di terra.
- 6) - Esaminare un insieme di tre particelle in una trappola di Penning.
- 7) - Discutere il moto di due particelle in una trappola di Penning per $\nu \neq 0$ e λ arbitrario.

4.6 Pacchetti e programmi

4.6.1 Cariche puntiformi

Pacchetto per la generazione di campi, potenziali e densità di energia.

(vedi F:\PIGHIN\PIGHIN_sito\Lavori\Campi\scanCampi1\PointCharges-ok\PointCharge1.pdf)

4.6.2 Problema al contorno

Il seguente pacchetto contiene le principali fasi di calcolo per determinare i coefficienti dello sviluppo nella rappresentazione in serie armonica del potenziale.

(vedi F:\PIGHIN\PIGHIN_sito\Lavori\Campi\scanCampi1\PointCharges-ok\color-mapped.xlsm)

4.6.3 Penning Trap

Questo pacchetto integra le equazioni del moto per la trappola di Penning.

(vedi F:\PIGHIN\PIGHIN_sito\Lavori\Campi\scanCampi1\PointCharges-ok\PenningTrap.m)