

1969 – appunti di

Campi elettromagnetici 4

*modi TM – Pointing – modi TE –
guida rettangolare – modi TM – campo H
campo E – modo TE_{10} – cavità
fattore di merito “ q ” – perturbazioni*

Modi TM

61

Il componente di campo magnetico secondo z [$H_z \equiv 0$]

$$\nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0 \quad \text{non dà informazione}$$

$$\nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0 \quad \text{dove } E_z = E_z(x, y)$$

troveremo che solo per un insieme discreto di K_c
∃ la soluzione

* Supponiamo dato il contorno di aver trovato K_c e $E_z(x, y)$
vediamo come utilizzare le informazioni ottenute

noto E_z possiamo sostituire in quelle date da Poisson:
(non già semplificate per $H_z = 0$)

$$E_x = - \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$E_y = - \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_x = - \frac{K^2}{K_c^2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_y = \frac{K^2}{K_c^2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

ora posso ricavare la frequenza.

γ è dato da $\gamma^2 = K_c^2 - K^2$
 $\uparrow$
 trovato

$\frac{E_x}{H_y}$ non dipende da x, y [una volta fissata la geometria]

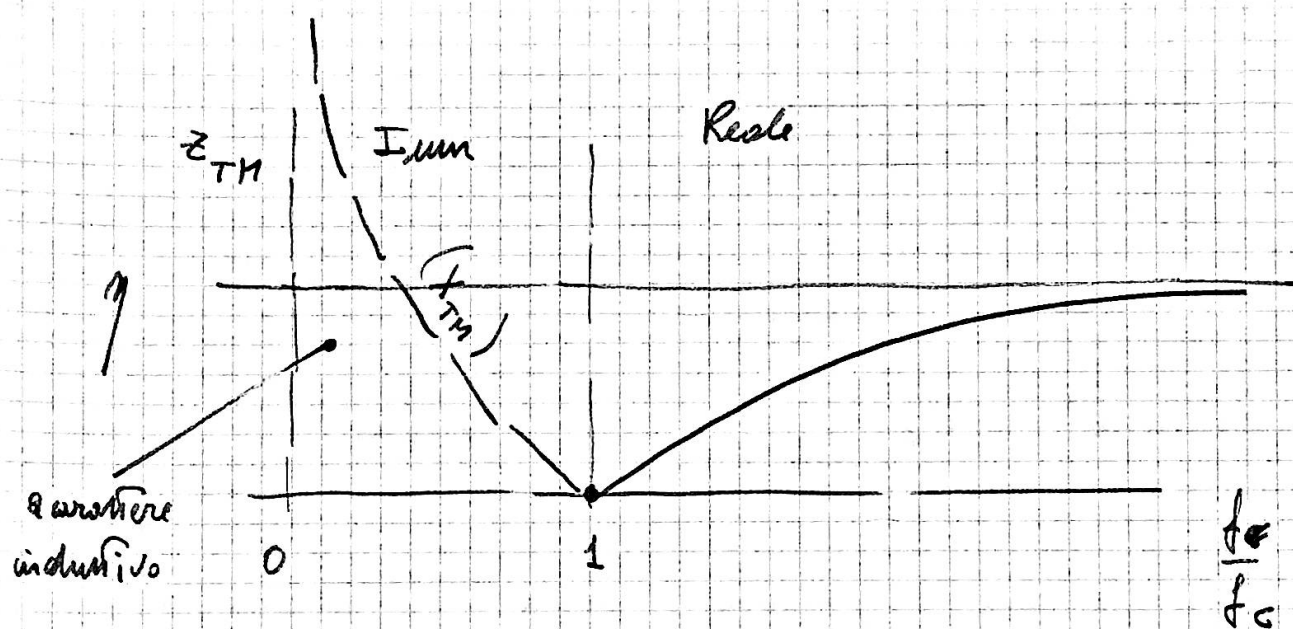
$$\begin{cases} \frac{E_x}{H_y} = -\frac{\gamma}{K^2} j\omega\mu = Z_{TM} \\ \frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{K^2} j\omega\mu \end{cases} \quad \square$$

- Z_{TM} è uno dei possibili in quanto c'è in corrispondenza di un certo K_c (non c'è Z_{TM} che dipende dalle caratteristiche del mezzo)

$$Z_{TM} = -\frac{jK \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}{K^2} j\omega\mu = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} \omega\mu =$$

$$= \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



all' infinito tende ad un modo TEM

per $0 < f < f_c$ c'è attenuazione dovuta a condizioni geometriche - Il generatore immette una certa energia: il bilancio netto è nullo

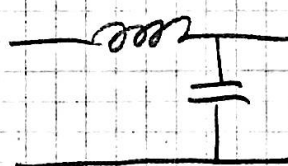
Sopra f_c la potenza che entra non ritorna e si propaga lungo la guida d'onda -

Per $f = f_c$ si ha un cortocircuito

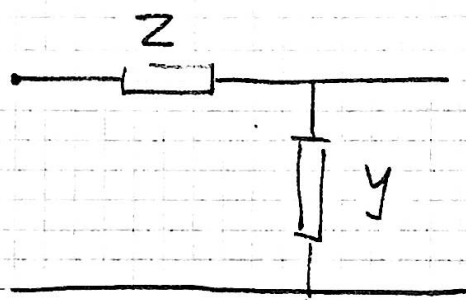
Dalle $\square$ si scopre che H e E totali sono $\perp$

in polarizzazione H_y e E_x in fase temporale

equivalente del modo TEM



o lo



possiamo definire $z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ $\gamma = \sqrt{ZY}$

rovesciando le due portiamo trovare l'equivalente
per il modo TM

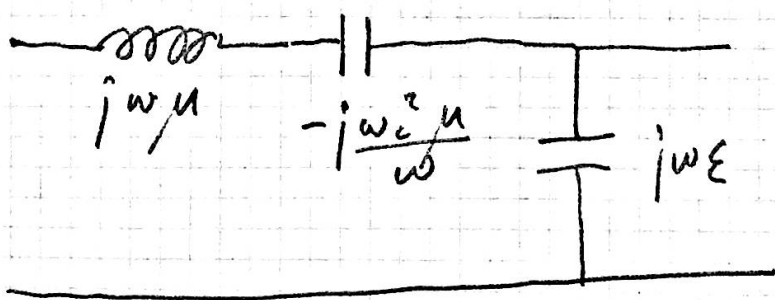
$$Z = z_0 \gamma = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} jK \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

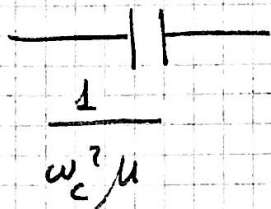
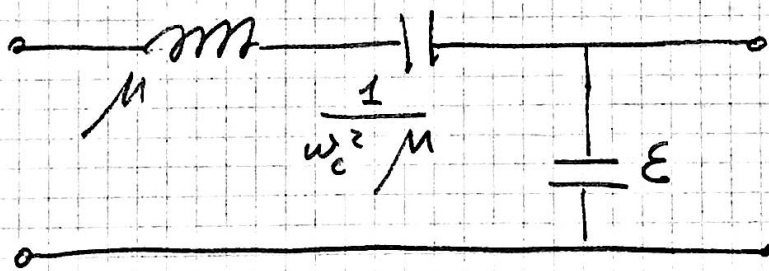
$$Y = \frac{\gamma}{z_0} = jK \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} / \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

• quindi $Y = \frac{jK}{\eta} = j \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} = j\omega \epsilon$

quindi Y è una capacità (per unità di
lunghezza)

• $Z = jK \eta \left[1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \right] = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} - j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\omega_c^2}{\omega^2} =$
 $= j\omega \mu - j \frac{\omega_c^2 \mu}{\omega}$





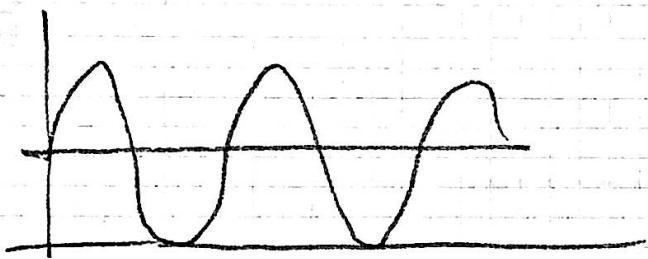
dipende non solo dal mezzo (μ, ϵ)
ma anche dalla geometria del
sistema : ω_c

per ω grande prevale l'induttore μ come
reattanza $\rightarrow$ abbiamo nel caso TEM

Vettore di Poynting

devo fare il prodotto vettore dei vettori veri.

- Nella direzione di propagazione, E che è lungo z
non dà contributo $\rightarrow$ pensiamo solo E_t H_t
- E_t H_t sono $\perp$ $\rightarrow$ basta fare il prodotto
inoltre sono temporalmente in fase $\rightarrow$ tutto è
come in un resistore.



quindi $\frac{E_t H_t}{2}$ è la potenza media

transistante -

NB localmente Poynting va bene lo stesso

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_{TM}$$

$$\frac{E_y}{H_x} = -Z_{TM}$$

quindi $\frac{E_t}{H_t} = Z_{TM} \rightarrow$

$$\frac{E_t H_t}{2} = \frac{Z_{TM} H_t^2}{2} = \frac{E_t^2}{2 Z_{TM}}$$

$$H_t^2 = H_x^2 + H_y^2 = \left[-\frac{K^2}{K_c^2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{K^2}{K_c^2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right]^2 =$$

$$= -\left(\frac{K}{K_c}\right)^4 \frac{1}{\omega^2 \mu^2} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)^2 \right]$$

modulo di $\left| \nabla_{xy} E_z \right|^2$

Consideriamo

$$E_z \nabla_{xy} E_z$$

67

facciamo il flusso in un volume cilindrico con due
facce distanti dz / ∇ occupano tutto lo
spazio che ci interessa

col Teorema della divergenza il flusso è

$$\frac{\partial E_z}{\partial n}$$

$$E_z(\delta) \equiv 0$$

$$\int_V \nabla \cdot [E_z \nabla_{xy} E_z] dV = \int_S (E_z \nabla_{xy} E_z) \cdot \vec{n} dS$$

usale la formula

$$\nabla \cdot (E E) = E \nabla \cdot E + E \nabla E$$

applicando a

$$\nabla \cdot (a \nabla b) = a \nabla \cdot \nabla b + \nabla b \cdot \nabla a = 0$$

è ~~già~~ noto $|\nabla_{xy} E_z|^2$

rimane $E_z \nabla_{xy}^2 E_z = -K_c^2 E_z^2$

8-4-68

Modi TE

$$E_x = \frac{K^2}{j\omega \epsilon K_c^2} H_{z,y}$$

$$E_y = - \frac{K^2}{j\omega \epsilon K_c^2} H_{z,x}$$

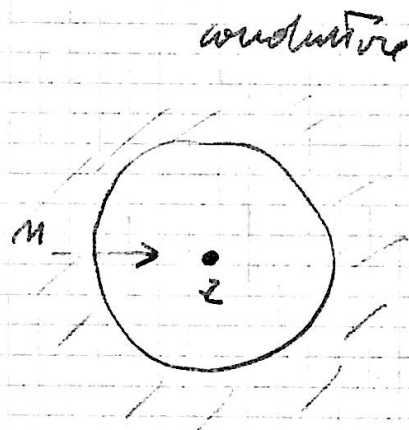
$$E_z = 0$$

$$H_x = - \frac{r}{K_c^2} H_{z,x}$$

$$H_y = - \frac{r}{K_c^2} H_{z,y}$$

$$\nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0 \quad *$$

la condizione al contorno è $H_{z,n} = 0$



$$\gamma = \alpha + j\beta$$

da * si trovano ∞ soluzioni $H_z(r,\theta)$ autofunzioni
 K_c autovalori

$$\gamma = \alpha + j\beta = jK \sqrt{1 - \left(\frac{K_c}{K}\right)^2}$$

f_c frequenza per cui $K_c = K = 2\pi f_c \sqrt{\epsilon\mu}$

$$\rightarrow f_c = \frac{K_c}{2\pi \sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$Z_{TE} = \frac{E_T}{H_T} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} =$$

$$= \mp \frac{K^2}{j\omega\epsilon K_c^2} \sqrt{H_{z,y}^2 + H_{z,x}^2} \frac{K_c^2}{j} \frac{1}{\sqrt{H_{z,y}^2 + H_{z,x}^2}} =$$

$$= \mp \frac{K^2}{j\omega\epsilon \cancel{K} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \mp \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\epsilon \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

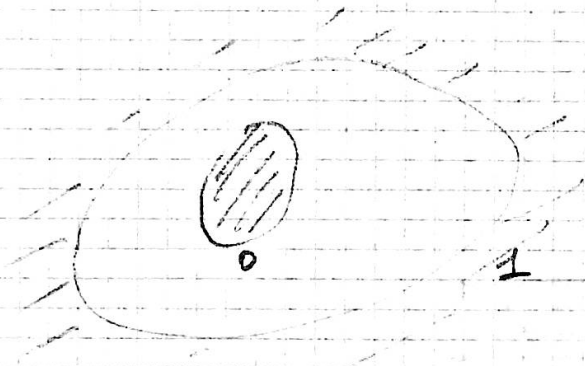
Pensiamo ad una linea ipotesica che sia equivalente al campo

impedenza d'onda (TEM) η

" caratteristica

$$\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ho una linea conosciuta μ e geometria
 voglio R_0 ...



TE M

lungo potenziale 1, 0

1) applico $\nabla \varphi = 0$

2) capacità $C = \epsilon \int_{\partial} \leftarrow$ ottenuto dal calcolo precedente

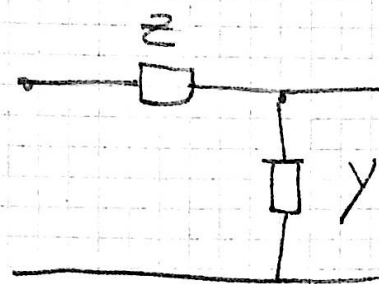
3) $\gamma = jK$

4) $L = \frac{\epsilon \mu}{C}$

5) $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Poiché schematizziamo con una linea

ho $\gamma = \sqrt{ZY}$
 $Z_{TE} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$

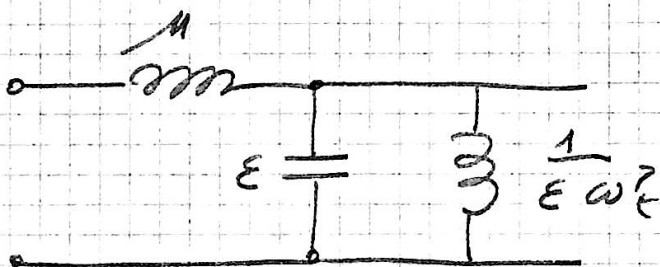


$$\bullet \quad Z = \gamma Z_{TE} = jK\eta = j\omega\mu \quad 71$$

$$\bullet \quad Y = \frac{\gamma}{Z_{TE}} = \frac{jK}{\eta} \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right] = j\omega\epsilon \left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right] =$$

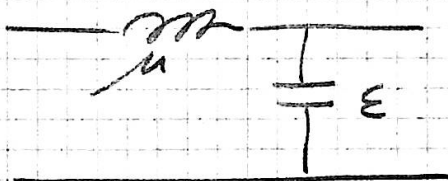
$$= j\omega\epsilon - \frac{j\omega\epsilon\omega_c^2}{\omega^2} = j\omega\epsilon + \frac{\epsilon\omega_c^2}{j\omega}$$

allora la cella elementare e'



nel caso TEM $f_c = 0 \Rightarrow$

la cella diventa



lungo $L = \mu \quad C = \epsilon \quad L_c = \frac{1}{\epsilon\omega_c^2}$

$$\text{per } f = f_c \rightarrow Z_{TE} \rightarrow \infty$$

$$\gamma \rightarrow 0$$

si ha risonanza per $\epsilon < \frac{1}{\epsilon\omega_c^2}$

$$E_x = \frac{k^2}{j\omega\epsilon k_c^2} \left(-\frac{k_c^2}{\gamma} \right) H_y = - \frac{k^2}{j\omega\epsilon k_c \sqrt{1 + \left(\frac{k_c}{\gamma}\right)^2}} H_y =$$

$$= \boxed{Z_{TE} H_y = E_x}$$

analogamente

$$\boxed{E_y = -Z_{TE} H_x}$$

calcoliamo la potenza

oltre f_c

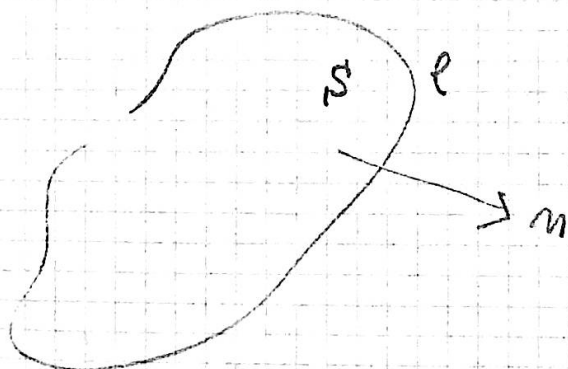
$$Z_{TE} = Z_{TE}^*$$

$$W_T = \int \frac{E_T H_T^*}{Z} dS = \int \frac{E_T F_{ET}^*}{Z Z_{TE}^*} dS =$$

$$= \frac{1}{2Z_{TE}} \int \left| \frac{k^2}{j\omega k_c^2 \epsilon} \right|^2 (\text{grad}_{xy} H_z)^2 dS \quad *$$

ma $\int (\text{grad}_{xy} H_z)^2 dS = \int k_c^2 H_z^2 dS$

infatti



$$\square \quad (\text{grad}_{xy} H_z) \times \vec{n} =$$

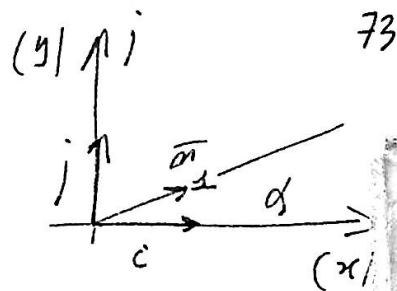
$$= \left(i \frac{\partial H_z}{\partial x} + j \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \times \vec{n} =$$

$$= \frac{\partial H_z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial H_z}{\partial y} \sin \alpha$$

$$\text{ma} \quad \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial n} = H_{z,x} \cos \alpha + H_{z,y} \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{grad}_{xy} H_z) \times \vec{n} = \underbrace{\frac{\partial H_z}{\partial n}}_{\text{perché è zero}} = 0$$

delle condizioni al contorno.



$$\begin{aligned}
 & \int \operatorname{div}_{xy} (H_z \operatorname{grad}_{xy} H_z) dS = \\
 & = \int H_z \underbrace{\operatorname{grad}_{xy} H_z \times \vec{n}}_{\frac{dH_z}{dn} = 0} dS ; \quad \square \\
 & \Rightarrow \int (\operatorname{grad}_{xy} H_z)^2 dS + \int H_z \nabla_{xy}^2 H_z dS = 0
 \end{aligned}$$

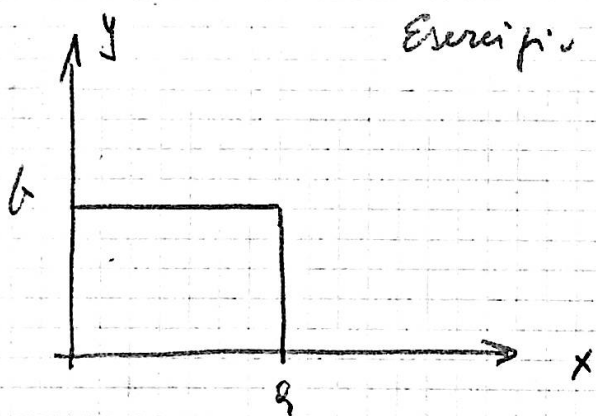
al pnto del laplaciano medio $-K_c^2 H_z$
 continuo è lo

Ripensando

$$\begin{aligned}
 * & = \frac{K_c^4}{2 Z_{TE} K_c^4 \omega^2 \epsilon^2} \int H_z^2 dS = \\
 & = \frac{\omega^4 \epsilon^2 \mu^2}{2 \eta K_c^2 \omega^2 \epsilon^2} \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right] \int H_z^2 dS =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\omega^2 \mu^2}{2 \eta K_c^2} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2} \int H_z^2 dS = W_T$$

Cio' in generale - Studiamo il caso
 di guida rettangolare -



Esercizio in TM

$$\nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0$$

$$H_z = 0$$

$E_z = 0$ nel contorno

$$E_z = A(x) B(y)$$

supponiamo

$$A_{,xx} B + A B_{,yy} + K_c^2 AB = 0$$

parte che dipende da x

$$\frac{A_{,xx}}{A} + \frac{B_{,yy}}{B} = -K_c^2 = -(K_x^2 + K_y^2)$$

ne segue
~~separato~~

$$\frac{A_{,xx}}{A} = -K_x^2$$

$$\frac{B_{,yy}}{B} = -K_y^2$$

qui $A = C_1 \cos K_x x + C_2 \sin K_x x$

il contorno dice

$x=0$ il caso E_z e' nullo

$$A(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$x=a$

$$A(a) = 0 \Rightarrow K_x \cdot a = m\pi$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

analogaemente

$$K_y b = n\pi$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

77

quindi

$$E_z = C \sin K_x x \sin K_y y$$

$$1^a \text{ uscita}$$

$$K_{c,m,n}^2 = \left(m\pi \frac{1}{a}\right)^2 + \left(n\pi \frac{1}{b}\right)^2$$

$$2^a \text{ uscita}$$

ma

$$f_{c,m,n} = \frac{K_{c,m,n}}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}}$$

$\Rightarrow$

se

$$m=0$$

$$n=0$$

$$f_c = 0$$

per cui

nessuno

$$f_{c,m,n} = \frac{K_{c,m,n}}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}}$$

□

cioè il modo m,n per $m=0=n$ ha $f_c=0$

$$\rightarrow E_z = 0 \quad (\text{perché qui } K_x=0, K_y=0)$$

per $m=0$ o $n=0$ il campo $E_z=0$

frequenza taglio minima è $f_{c,1,1}$

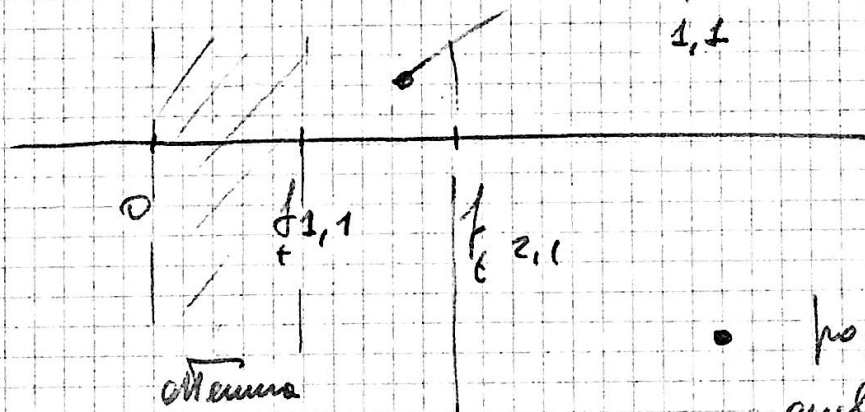
cioè quello del modo più basso

frequency

Amuzioni
gratue

$$u \quad a > b$$

Atterraggio a Ver Lufi. Franco
1,1



Atmosfera
zione per
Integ.

- polifazione
cavalca per 2,1

$$\nabla_{xy} H_2 + K_c^2 H_2 = 0$$

$$M_2 = AB$$

$$K_c^2 = K_x^2 + K_y^2$$

È stato identico fino alle condizioni al contorno

per e' $H_{e,n} = 0$

in verticillate

$$A_n(n=0) = 0$$

$$A_{1,x} = -C_1 K_x \sin K_x x + C_2 K_x \cos K_x x;$$

79.

quindi

$$H_2 = H_0 \cos K_x x \cos K_y y$$

1° uscita

qui K_x è uguale (ma è un caso) 2° uscita

forse " "

□

ma cambiamo il discorso sui modi

qui per $m=0$ $n=0$ $H_2 = \cos x$

il modo più basso è

$$f_{t,4,0} = \frac{\pi}{8} \frac{1}{2a \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{2a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

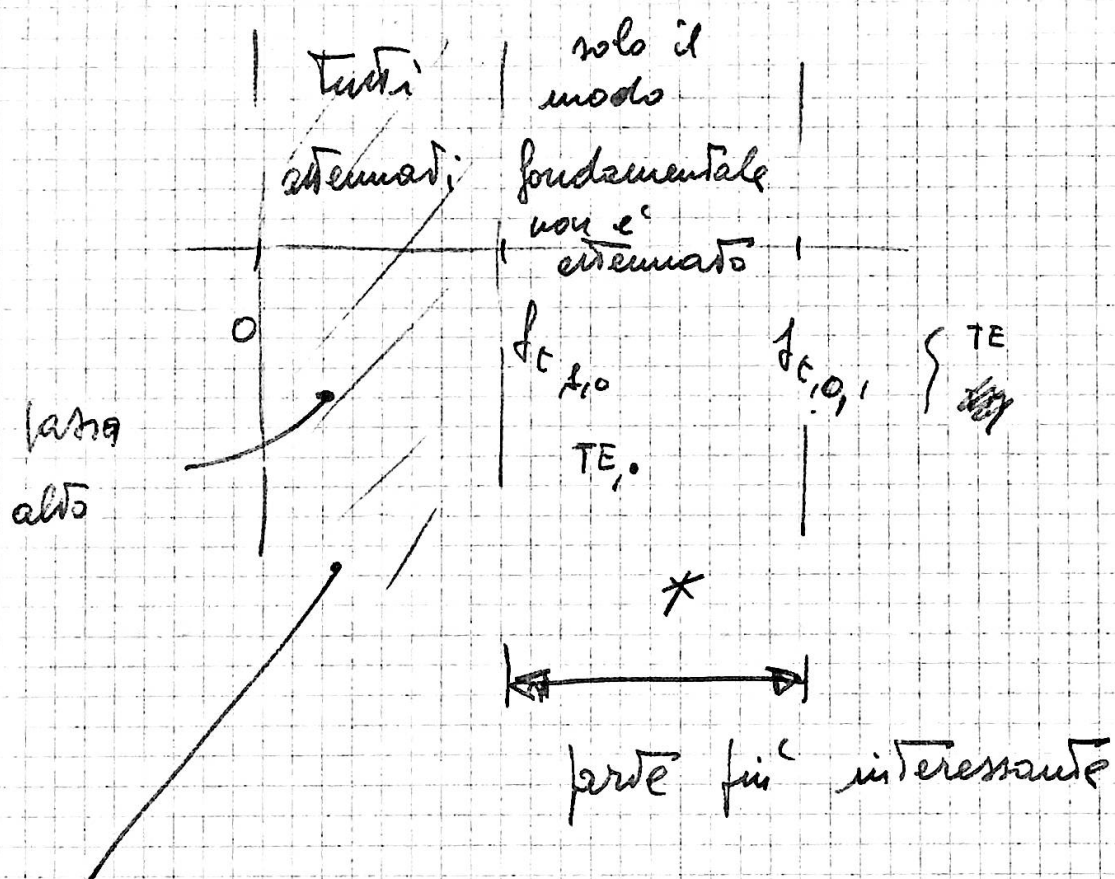
[è il più basso
di quello di TM]

Domanda: ci può essere TEM?

no

quindi quella vista è la più bassa frequenza
in gioco:

modo fondamentale



NB questa e' attenuazione reattiva (cioe' va avanti e indietro fino a esaurirsi per le perdite resistive)

* qui invece si dissipa.

19-5-69

Radiazione

propagazione non guidata ma nello spazio libero

ipotesi: • $\vec{J}$ effetti che introduciamo

(21)
81

- $\vec{J}$ uno vettore come il vettore $\mu_0 \vec{E}_0$
- $\vec{J}$ conduttori in nessun luogo

[si può studiare il caso di un semiconduttore]

[polarizzazione nei mezzi ionizzati]

Si usano i potenziali

ricordo

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

dove

$$\vec{B} = \nabla \wedge \bar{A}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

se ρ sono solo le cariche associate a $\vec{J}$
mi basta considerare solo $\bar{A}$

Riteniamo assegnate $\vec{J}$

in forma generale

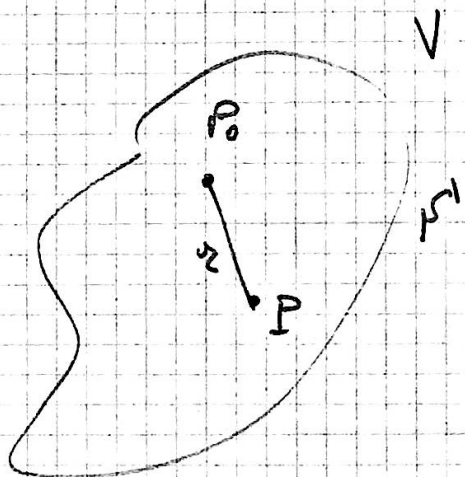
$$\boxed{\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = h} \quad * \quad h \text{ noto}$$

(22)

f può essere A_x, A_y, A_z

$$f = f(P, t), \quad h = h(P, t)$$

Verifichiamo l'integrale generale di *



$$e^c \quad 4\pi f(P_0, t) = - \int_V \frac{h(P, t^*)}{r} dV +$$

$$+ \int_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} f(P, t^*) + \left[\frac{1}{r^2} f(P, t^*) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} f(P, t^*) \right] \frac{\partial n}{\partial r} \right\} dS$$

$$t^* = t - \frac{r}{v} \quad \text{Tempo ritardato}$$

$\frac{r}{v}$ Tempo per andare da P a P_0

h è la sorgente di campo $\Rightarrow$ il primo ⁽²³⁾ 83
integrale è $\neq 0$ se ci sono sorgenti in V

Il secondo integrale contiene ϕ e derivate
sul contorno S quindi il contributo
~~dei generatori esterni~~ dei generatori esterni si riduce
a sapere $\phi(P_S, t)$ e $\phi'(P_S, t) \quad \forall t$

Questo è in forma esatta il principio di
Huygens che dice che un'onda è creata
da un precedente fronte d'onda (m/s)

NB nel secondo integrale c'è sempre t^*
cioè in P_0 il campo dovuto alla superficie arriva
dopo t^*

Noi studiamo il caso in cui fuori non c'è
nulla che ci interessi

Se S molto lontana il 2° integrale
non dà contributo se non dopo un
tempo grandissimo

(24)

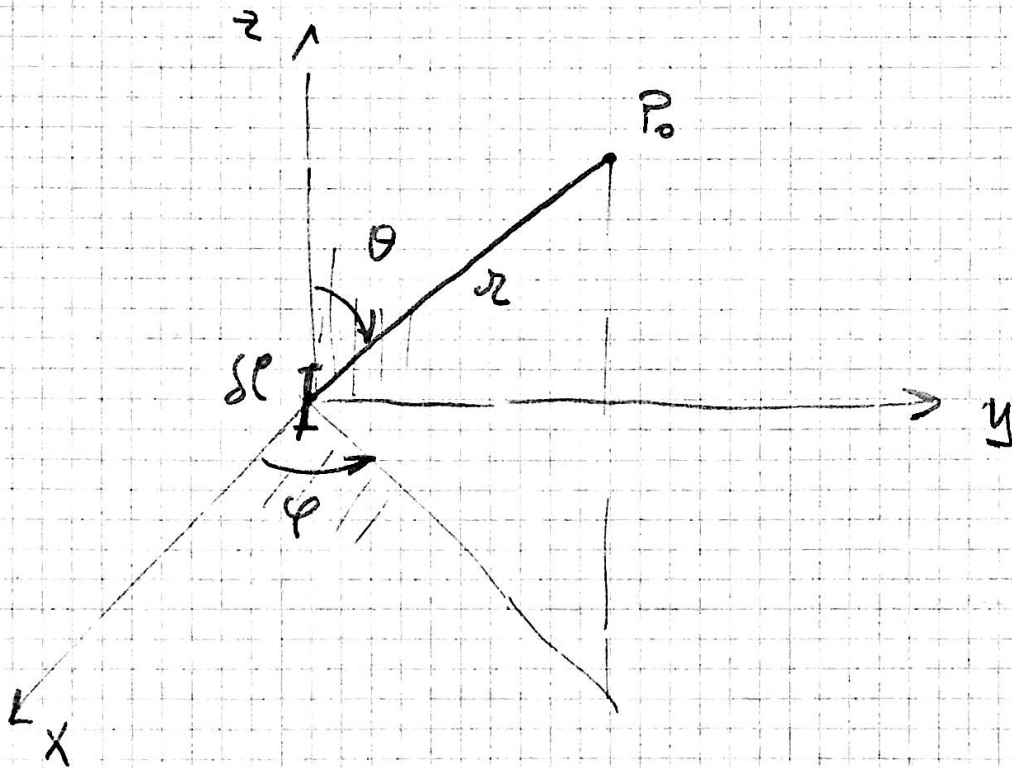
Supponiamo un radiatore di corrente
~~alla~~ piccolo [un'antenna e' una Σ di tanti $d\ell$]

$$d\ell = I \quad \omega$$

la densità di corrente varia in un certo modo
 ad es.



poiché l'elemento è noto supponiamo $J \cos$
in modulo e fase



considero solo $4\pi \int (P_0, \epsilon) = - \int_V \frac{q(P, \epsilon^*)}{r} dW$

qui $J_x = J_y = 0$

quindi $A_x = A_y = 0$

$$A_z = A$$

[a rigore e' un δA]

per la relazione
tra δl e r
 $\delta \approx \omega r$

$$A(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{-\mu J_z(0, t^*)}{r} dS dl =$$

$$= \left(\frac{\mu \delta l}{4\pi} \frac{I e^{j\omega t} e^{-j2\pi \frac{r}{\lambda}}}{r} \right)$$

$$I(t) = I e^{j\omega t}$$

$$I(t^*) = I e^{j\omega t - j\omega \frac{r}{v}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$v = \lambda f$$

$$I(t^*) = I e^{j\omega t} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}}$$

non dipende dal po in esame $= \alpha \Rightarrow$

$$A = A_z = \alpha \frac{e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}}}{r}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \wedge \vec{A}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$$

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$H_z = 0$$

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} =$$

$$\text{ma } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

quindi $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{y}{r} \frac{\partial A}{\partial r}$$

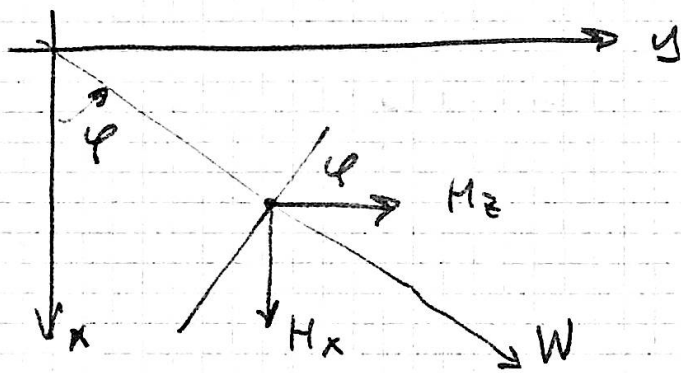
analogamente

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{x}{r} \frac{\partial A}{\partial r}$$

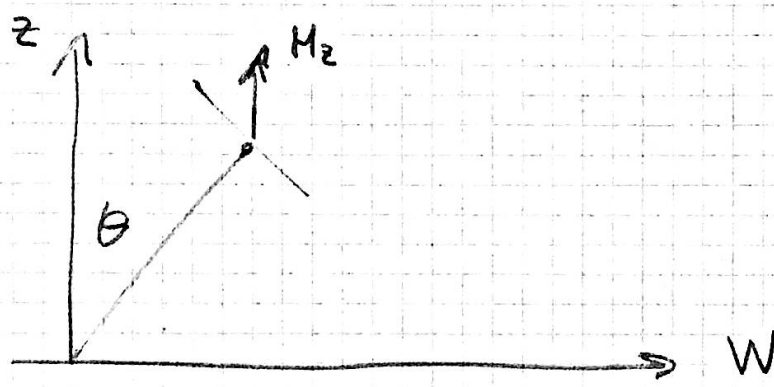
$$\frac{\partial A}{\partial z} = \alpha \frac{-j \frac{2\pi}{\lambda} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} z} - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} z}}{z^2} = \quad (27) \quad 87$$

$$= \alpha e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} z} \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} - \frac{1}{z^2} \right) =$$

$$= \boxed{A \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{1}{z} \right) = \frac{\partial A}{\partial z}}$$



$$\boxed{H_\varphi = -H_x \sin \varphi + H_y \cos \varphi}$$



$$\boxed{H_\theta = -H_z \sin \theta + \cos \theta [H_x \cos \varphi + H_y \sin \varphi]}$$

$$H_z = H_z \cos \Theta + \sin \Theta [H_x \cos \varphi + H_y \sin \varphi]$$

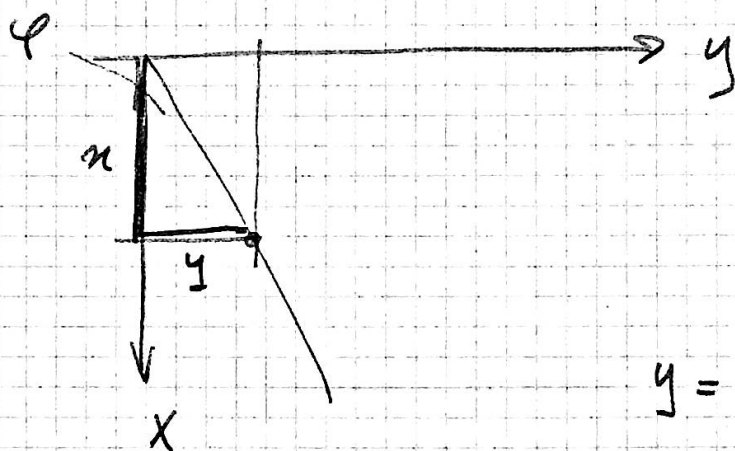
(28)

$$H_x \propto y$$

$$H_y \propto n \text{ con } n \text{ costante}$$

dentro la parentesi ho

$$[y \cos \varphi - n \sin \varphi]$$



$$y = n \operatorname{tg} \varphi$$

$$y \cos \varphi - n \sin \varphi = 0$$

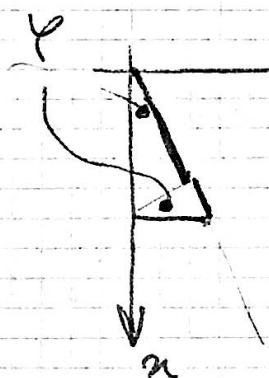
quindi

$$H_\Theta = 0$$

$$H_z = 0$$

perciò il campo E tg a circonferenza
nel piano $z = \text{cost}$

$$H|_{\varphi} = - \left[\frac{1}{\mu r} \alpha e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{1}{r} \right) (y \sin \varphi + x \cos \varphi) \right] \quad (29) 89$$



$$\rightarrow \left\{ y \sin \varphi + x \cos \varphi = r \sin \Theta \right\}$$

$$H|_{\varphi} = H = + \frac{1}{\mu r} \alpha e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \left(\frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) \sin \Theta$$

$$d = \frac{I d\varphi \mu e^{j\omega t}}{4\pi}$$

$$H|_{\varphi} = H = \frac{I}{4\pi r} e^{j\left[\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right]} \left(\frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) d\varphi \sin \Theta$$

$r \cos \alpha$

$$\boxed{r \ll \lambda}$$

$r \gg \lambda$

molto vicino al
radiatore

qui si aveva $j \frac{2\pi}{\lambda}$ e ho un contributo

uguale a quello del caso stazionario

(a parte $e^{j\omega t}$)

Se $r \ll \lambda$ $\frac{2\pi r}{\lambda}$ è piccolo $\Rightarrow$ (30)

$$wE - \frac{2\pi r}{\lambda} \approx wE$$

e allora abbiamo proprio la H di Laplace

basandosi solo $\frac{2\pi r}{\lambda}$ abbastanza vicino alla

antenna segue Laplace ma tiene conto del
ritardo dovuto alla propagazione (ritardo di
fase)

$$r \gg \lambda$$

il campo a grande distanza è in
quadratura temporale con la corrente ritardata
 $\frac{1}{2}$ del tempo di propagazione

Vicino al radiatore H_p decresce come
 $\frac{1}{r^2}$, a grandi distanze come $\frac{1}{r}$

H_p non dipende da φ

M_p è max nel piano esimulato

(32/91)

Nell'origine è come un campo sferico
distanza è come un campo cilindrico

Calcoliamo E

$$\nabla \wedge \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad [\text{diel}]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$E = \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{1}{\mu z} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} \quad ?$$

$$E_x = \frac{1}{j\omega \epsilon \mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\pi}{z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = B \frac{\partial A}{\partial z}$$

(32)

$$H_0 = 0$$

quint.

$$M_\theta = M_z = 0$$

$$H_2 = 0$$

$$(\nabla_{\perp} H)_{\theta} = \frac{1}{r} \left[\cancel{\frac{1}{\sin \theta}} \frac{\partial H r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r H_{\varphi})}{\partial r} \right]$$

$$X_1 = \frac{1}{j\omega E} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{4H} \left(-\frac{2H}{1} \right) \text{ (crossed out)} =$$

$$E_{\theta} = \frac{-1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \left\{ \frac{I}{4\pi} \sin\theta e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \left[-\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + j \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

$$E_{\theta} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{I \sin\theta}{4\pi r} e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \left[j \frac{2\pi}{\lambda} + \frac{1}{r^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right]$$

$$E_r = \frac{2\cos\theta}{j\omega\epsilon} \frac{I}{4\pi r^2} e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \left(\frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

E_r decade con r^3 per r piccolo
 " r^2 " " grande

cioè decade più rapidamente di H_{θ}

E_{θ} a grande distanza va come $\frac{1}{r}$

infatti $\frac{2\pi}{\lambda} + \frac{1}{r^2} \rightarrow 0$

• allora il modo diventa TEM a grande distanza

• A distanza il modo è TM [$H_r = 0$]

r direzione di polarizzazione

E_r va a zero prima dell'altro

Calcolo il vettore di Poynting

(34)

secondo z

e' dato da $H_y \cdot E_z$

a piccola distanza ^{for} H_y ed ^{quadr.} E_z sono

Tempralmente in quadratura con V e I

in un iplo reattivo $\Rightarrow$ il sistema non
irradia [il sistema $\ll 1$] energia
entra e esce dentro 0.

($\uparrow$ infatti quando uno e max l'altro e nullo e poi vice...)

a grande distanza

sono entrambi in quadratura e tutti
in anticipo

sembrerebbe che vicino non esce energia
lontano si;

~~vicino il vettore di Poynting e' piccolo~~ ~~per~~
~~il campo~~ vicino la parte in quadratura
e grande $\int S \, ds = P_{\text{tot}}$

lontano la parte in fase e' grande ~~per~~ e'
dominante $\int S \, ds = P_{\text{tot}}$

quindi i conti tornano

(35) 95

A grande distanza

prodotti dei moduli
verche' sono in quadratura
(doppio potenza media)

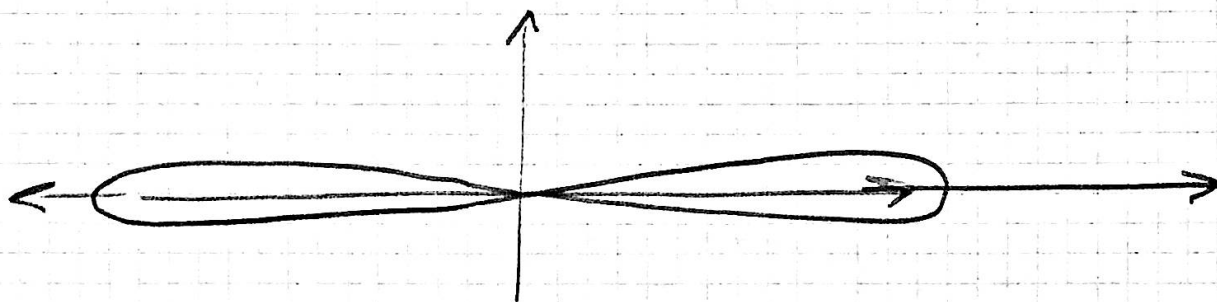
$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{I^2 |SP|^2 \sin^2 \theta}{(4\pi r^2)^2} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{2\pi}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon} (ISP)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2 \lambda^3} = \frac{(ISP)^2}{4\pi\epsilon} \frac{\sin^2 \theta}{(2\lambda)^2}$$

$$P = \frac{\eta (ISP)^2}{4} \frac{\sin^2 \theta}{(2\lambda)^2}$$

da' la distribuzione

graficando P a $2\pi\omega t$ ho



si vede che le antenne irradiano in pratica
solo nel piano equatoriale

21-5-68

TE₁₀

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$E_x = 0$$

$$E_z = 0$$

$$E_y = \frac{k^2}{j\omega\epsilon K_c^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$H_y = 0$$

$$H_x = \frac{\gamma}{K_c^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$E_y = -j \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \frac{H_0 \pi}{\omega \epsilon a} \sin \frac{\pi x}{a} =$$

$$= -j \frac{f}{f_c} \frac{H_0 \pi}{2\pi \epsilon a f_c} \sin \frac{\pi x}{a} =$$

$$\text{note } \begin{cases} \lambda_g = 2a \\ \lambda_c f_c = v \end{cases}$$

$$\rightarrow 2a f_c = v$$

$$= -j \frac{f}{f_c} \frac{H_0}{\sqrt{\epsilon}} \sin \frac{\pi x}{a} = -j \frac{f}{f_c} \eta H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \quad 97$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{TE}}$$

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

$$H_x = +j \frac{f}{f_c} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

ma $\frac{f}{f_c} = \frac{1}{2a}$

quindi

$$H_x = +j \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

Se vogliamo che il vettore di Poynting vada
verso $z +$ e cambiamo i segni per x in H_x

Vediamo di riportarci nel tempo

sempre avevamo eliminato $e^{-\gamma z} e^{i\omega t}$

indi si prende la parte Re

$$\text{ed ora } H_z(x, y, z, t) = \text{Re} \left(H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-\gamma z} e^{i\omega t} \right) =$$

$$= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \text{Re} e^{i(\omega t - \beta z)} = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{f}{f_c} \right) \eta H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i \frac{\pi}{2} + j \omega t - j \beta z} \right] =$$

$$= \left(\frac{f}{f_c} \right) \eta H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z) = E_y$$

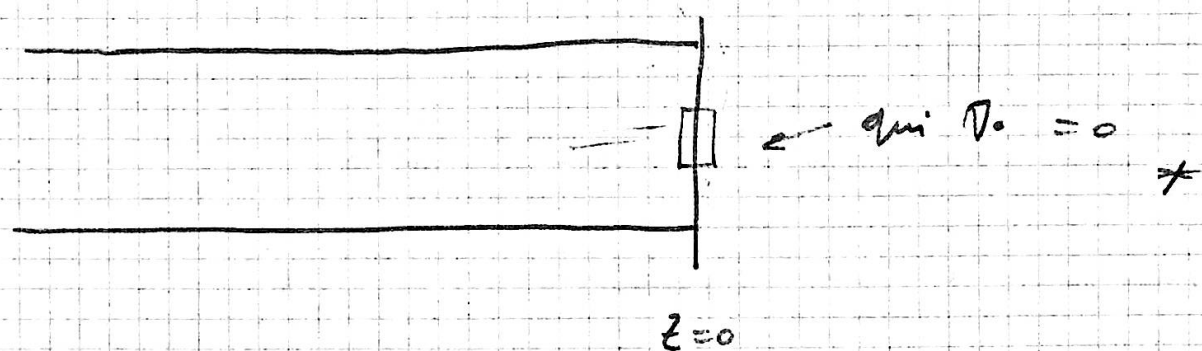
$$H_x = - \sqrt{\left(\frac{f}{f_c} \right)^2 - 1} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z)$$

si trova in guide rettangolari
e ad alta frequenza.

Cavità

guide rett.

chiusa



ci sarà anche la riflessione

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-\gamma z} + H'_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{\gamma z}$$

con la * $H_{z,x}(z=0) = 0$

quindi $H_0 = -H_0'$

99

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \left(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z} \right) =$$

$$= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \left(-j \sin \beta z - j \sin \beta z \right) =$$

$$= -2j H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \beta z$$

è analoga alla H_z del TE_{10}

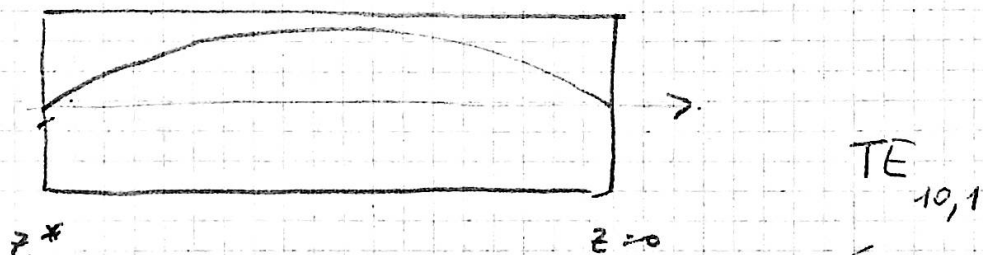
ritorniamo nel tempo

$$H_z = -2H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \beta z \sin \omega t$$

è del "tipo" onda stazionaria

$$\beta z^* = K\pi \quad (K=0, 1, 2, \dots)$$

Che succede se mettiamo una parete in
un z^* tutto rimane identico



perché abbiamo il 1° modo

Prendiamo un parallelepipedo e applichiamo
Maxwell -

$$\nabla^2 A + K_c^2 A = 0$$

facciamo una separazione di var. in 3 dimensioni

$$0 = \frac{d^2 A(x)}{dx^2} + K_x^2 A(x)$$

ciascuna ottenuta da ∇

$$A = A(x) A(y) A(z)$$

Trovati gli autovalori K non sappiamo trovare
delle frequenze caratteristiche dello nostro cavi.

$$K_c^2 = K_x^2 + K_y^2$$

più

qui avremo

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$$

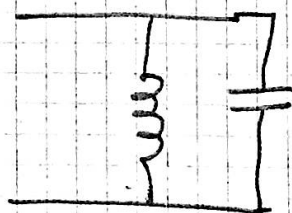
$$K^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

si ha una triplice infinità di frequenze

qui non $\exists$ più una coordinata privilegiata

è l'analogo esatto alle dte frequenze di

un LC per esempio



abbiamo definito un risonatore

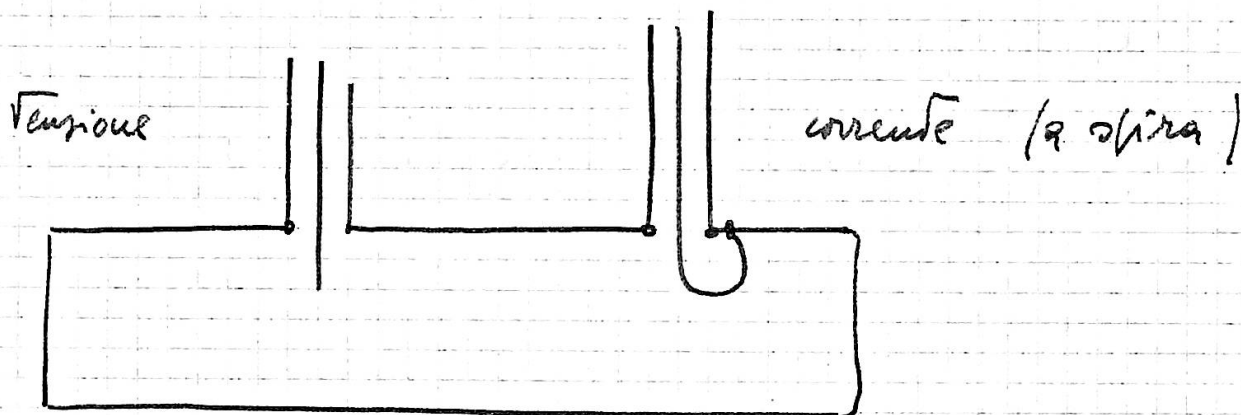
101

Trovare f^* è facile

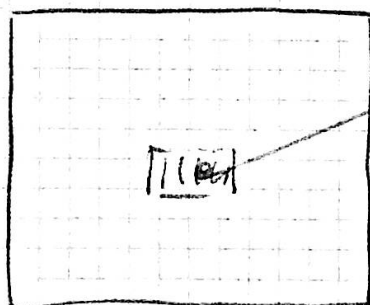
difficile è trovare il circuito equivalente

più difficile sistemi di collegamento fra le guide e
la cavità e l'esterno

Eccitazioni : in tensione , in corrente



Si tratta di trovare un campo che soddisfi
le condizioni al contorno ma che in un po
non soddisfa -

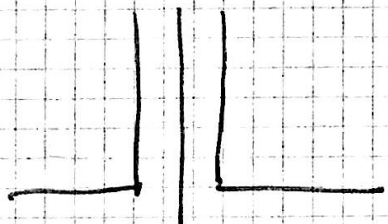


qui il campo è imposto
→ mi serve opportuna
condizione

$$c_1 A(x) + c_2 A(y) + c_3 A(z)$$

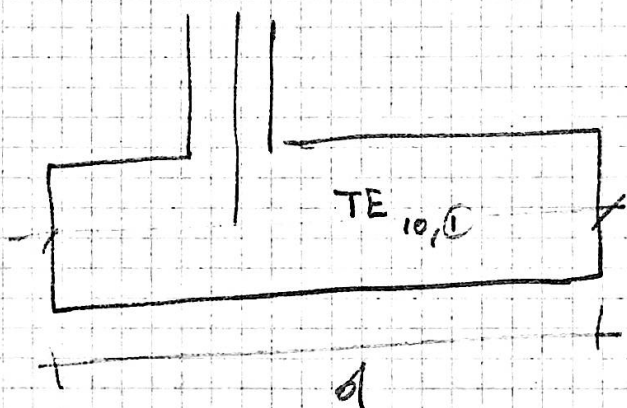
da un po' di vista tecnico

Con un cavo coassiale suppongo che arriva un TEM



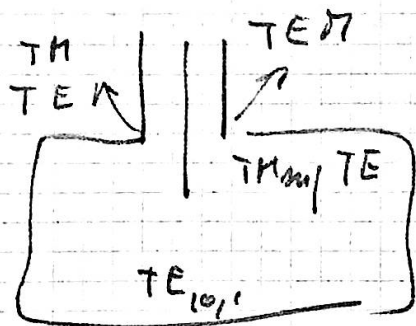
sull. di esse vicini ad una frequenza dello
cavità: sarà eccitato quel modo che da quella
particolare frequenza -

Siamo in presenza di una tipica discontinuità

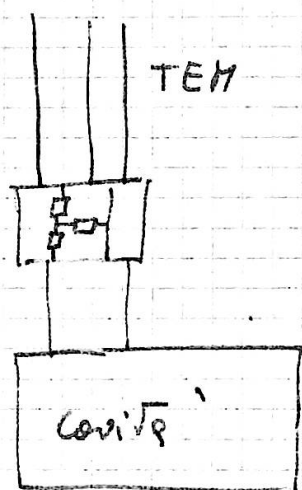


$$\beta a = \pi$$

nascono modi superiori perché le condizioni
al contorno dei due modi (del cavo e della cavità)
possono funzionare



Si pensa come ad un doppio bipolo interposto.



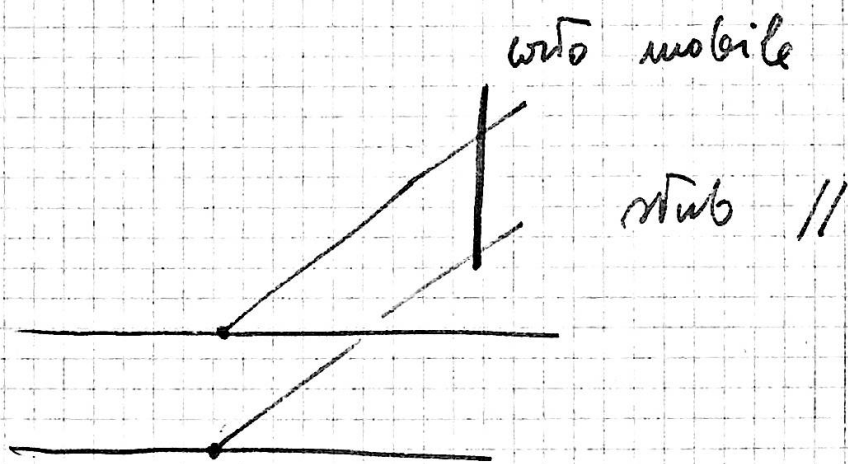
-) interesse per l'adattamento (questo doppio bipolo a due n.c. è adattamento)
-) problema frequenza risonanza dal pto di vista del calcolo di segnale da una cavità.
Per es. si può usare la cavità come filtro

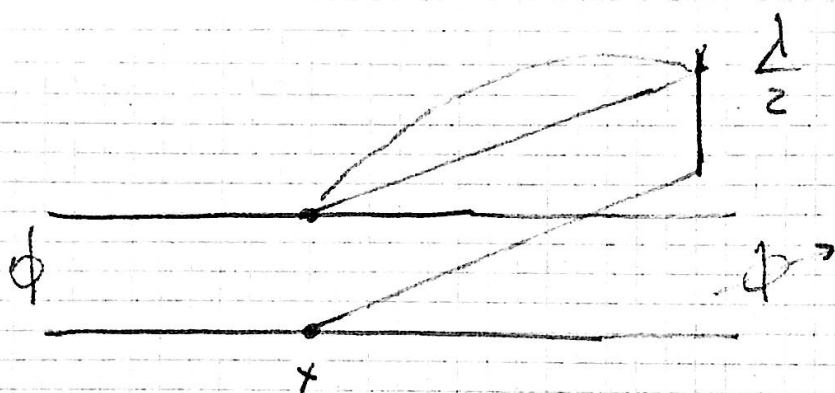
$$Q = \frac{\text{potenzione risonanza} \times \text{energia max immagazzinata}}{\text{potenza media dissipata}}$$

calculus of in an case particular



$$\frac{\omega_0 \frac{1}{2} C V_m^2}{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{R}} = \omega_0 C R = \frac{R}{\omega_0 L}$$



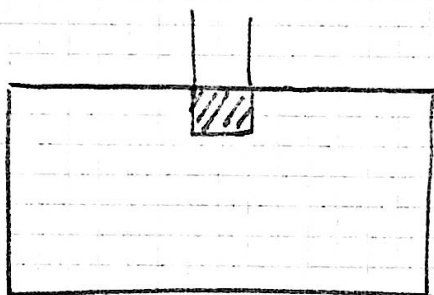


105

in questo caso in x non c'è tensione

Perturbazioni cavità

cerchiamo un ω_0 dove E è max e li mettiamo in cavità (vite)



c'è una diminuzione di

$$\Delta U_E \propto \frac{E^2 \Delta V_0}{\pi}$$

volume vite

amplitude / temp max

la vite serve per accordare
trimmer

$$\Delta U_H = \frac{\partial U_H}{\partial f} \Delta f$$

la frequenza di accordo è quella cercata

$$V_E = V_H$$