

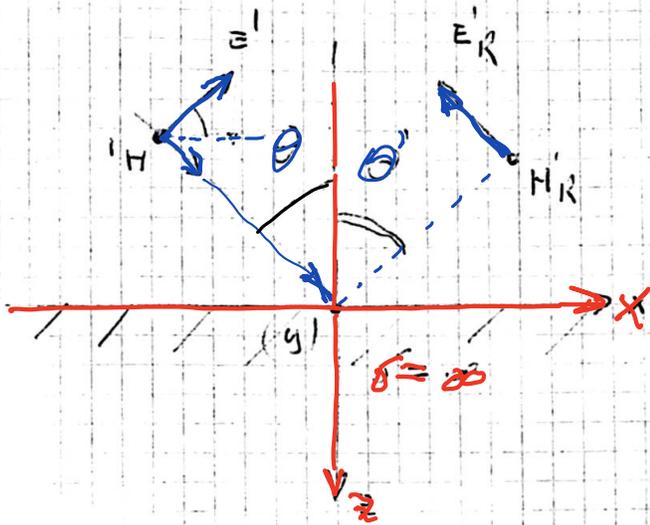
*1969 – appunti di*

*Campi elettromagnetici 3  
teoria delle Linee*

*propagazione – rifless. - radiaz.  
quadrupolo equiv. – impedenza –  
velocità gruppo, fase – Pointing  
modi TM, TEM, TE, TE<sub>10</sub> – cavità*

14-4-68

(2)



angoli non normali

Incidenza non normale

Il conto lo possiamo fare solo con l'angolo delle condizioni al contorno

valore  $\frac{dx}{dt} = 0$

$$E' \cos \theta - E'R \cos \theta' = 0$$

valida per  $z = 0$

$$E' \sin \theta + E'R \sin \theta' = \frac{\int \Sigma}{\epsilon}$$

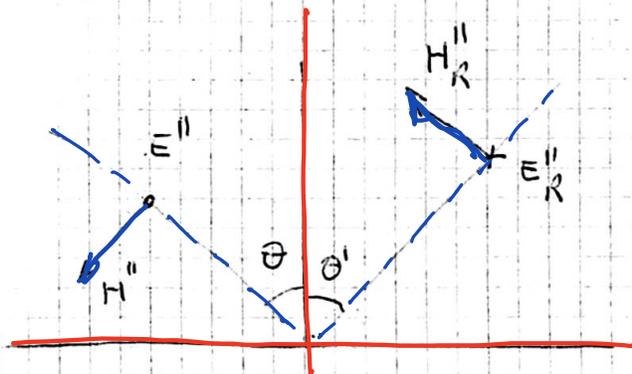
densità cariche superficiali

$$H' + H'R = \frac{E'}{\eta} - \frac{E'R}{\eta} =$$

$\eta$  ←  $\eta$  impedenza caratteristica

$$= \int \Sigma \quad \text{corrente superficiale}$$

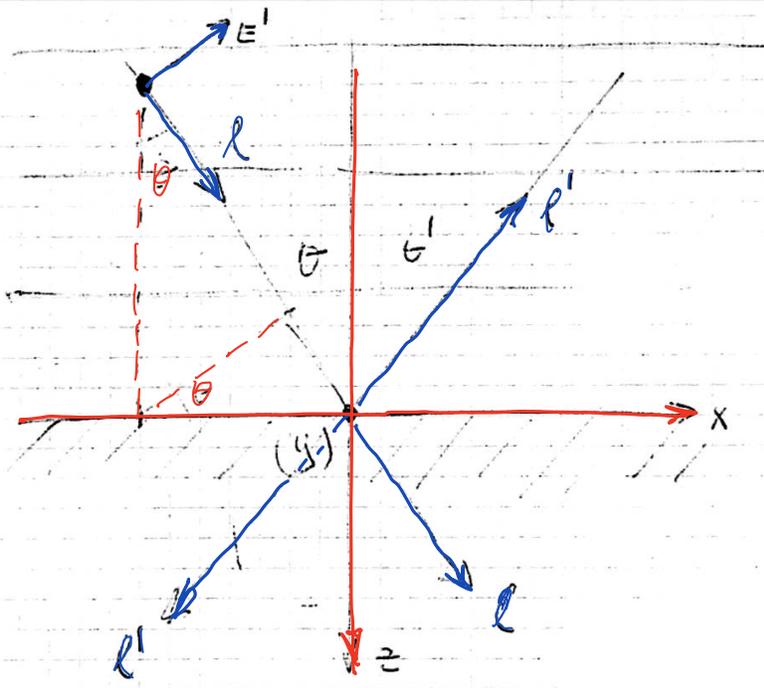
Si può pensare ad un altro caso



$$E'' - E''R = 0$$

$$E'' \cos \theta + E''R \cos \theta' = \eta \int \Sigma''$$

$$E'' \sin \theta - E''R \sin \theta' = 0$$



In un dielettrico  
 $k = \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

Possiamo scrivere il campo come  
 (metodo simbolico)

$$E' e^{-j\beta z} + E'' e^{j\beta z}$$

quanto vale l in relazione a z e x?

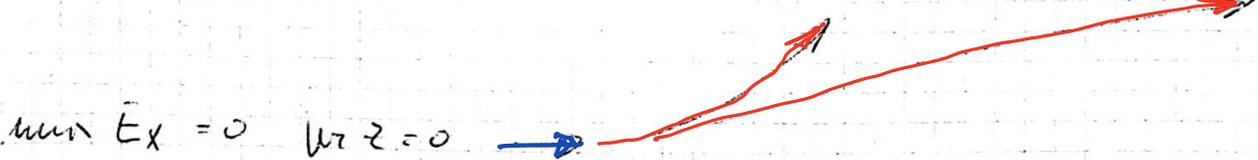
$$l = x \sin \theta + z \cos \theta < 0$$

quindi il campo lo scriviamo \* in base

$$l = -x \sin \theta + z \cos \theta$$

Per intero

$$E' \cos \theta e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} = E'' \cos \theta e^{j\beta(-x \sin \theta + z \cos \theta)}$$



(perché è una superficie conduttrice)

bisogna lungo l'asse x

questa equazione deve essere soddisfatta  $\forall x$ ,  
ciò implica che  $\Theta = \Theta'$  e sostituendo nei

moduli  $E' = E'_{\beta}$  ; a tempo tutto lo

$$\vec{E}_x(x, z) = E' \cos \Theta e^{-j\beta(x \sin \Theta + z \cos \Theta)} + E' \cos \Theta e^{j\beta(x \sin \Theta + z \cos \Theta)}$$

considerando

$$E' \cos \Theta e^{-j\beta x \sin \Theta} \begin{pmatrix} e^{-j\beta z \cos \Theta} & e^{j\beta z \cos \Theta} \\ -z & -z \end{pmatrix}$$

||

$$-z j \sin(\beta z \cos \Theta)$$

quindi

$$E' \cos \Theta (-z j \sin(\beta z \cos \Theta)) e^{-j\beta x \sin \Theta}$$

Se vogliamo l'espressione nel tempo moltiplichiamo per  $e^{j\omega t}$   
(ricorda che  $E'$  è un vettore)

$$E_x = +z E' \cos \Theta \sin(\beta z \cos \Theta) \sin(\omega t - \beta x \sin \Theta + \varphi_1)$$

$$\Rightarrow z \neq 0 \quad \forall t \quad \forall x \quad E_x = 0 ?$$

$$\sin(\beta z \cos \Theta) = 0 \Rightarrow \beta z \cos \Theta = k\pi$$

( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

$$1) \quad \beta z \cos \theta = k \pi$$

(4) 98

la prima distanza è  $d = \frac{\pi}{\beta \cos \theta}$

2) Def. velocità di fase del campo  $x$  lungo l'asse  $x$

analizziamo  $\sin(\omega t - \beta x \cos \theta + \varphi_0)$

definiamo velocità di fase  $v_f = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{\beta \cos \theta}$

nel caso di onde piane

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

qui la velocità  $v_f$  è sempre superiore alla velocità della luce in quel mezzo

$$d = \frac{\pi}{\omega \cos \theta} \quad \text{ma } v = d f \rightarrow d = \frac{v}{2 \cos \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{d}{2d}$$

continuando nella definizione

$$v_f = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2d}\right)^2}}$$

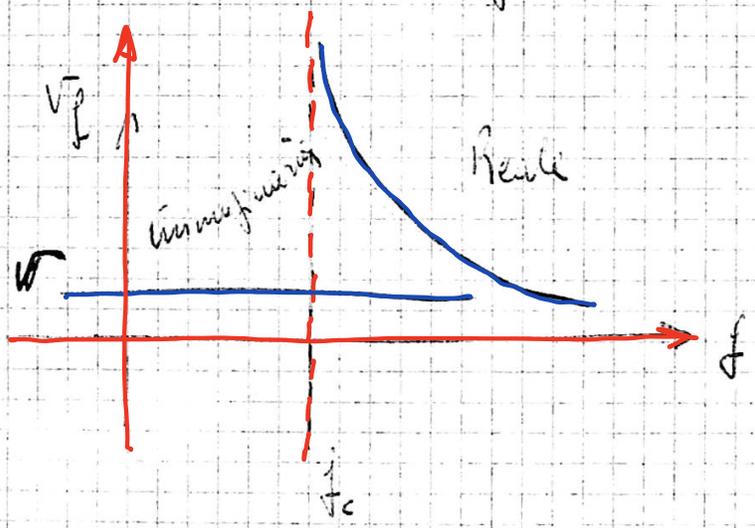
quindi  $\sqrt{f} = \sqrt{f} (\neq)$

$\alpha \quad \lambda = \frac{z d}{c} \quad \sqrt{f} \rightarrow \infty$

$\Gamma = \frac{z}{f_c} \lambda_c \rightarrow \frac{f}{f_c} = \frac{v}{z d}$

perciò  $f < f_c \rightarrow \lambda > \lambda_c$

se qui sostituiamo in  $\hat{\sigma}_p$  abbiamo un  $\hat{\sigma}$  immaginario



la costante di proporzionalità è anche una costante del mezzo -

per altri campi sono:

$$E_z = -2 E' \sin \theta \cos(\beta z \cos \theta) \cos(\omega t - \beta x \sin \theta + \varphi')$$

$$H_y = 2 \frac{E'}{\eta} \cos(\beta z \cos \theta) \cos(\omega t - \beta x \sin \theta + \varphi')$$

con  $\eta$  costante del secondo mezzo figura

$$E_y = 2 E'' \sin(\beta z \cos \theta) \sin(\omega t - \beta x \sin \theta)$$

$$H_x = -\frac{2 E''}{\eta} \cos \theta \cos(\beta z \cos \theta) \cos(\omega t - \beta x \sin \theta)$$

$$H_z = 2 \sin \theta E'' \frac{1}{\eta} \cos(\beta z \cos \theta) \sin(\omega t - \beta x \sin \theta)$$

Consideriamo

equazione di Maxwell

(6)

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$\vec{A}$  vettore generico

1) Trasformazione di  $\vec{A}(x, y, z, t)$  in seno

$$\vec{A}(x, y, z) \quad \left( \text{Fourier, metodo simbolico, ...} \right)$$

l'equazione diventa

$$\nabla^2 \vec{A} = \left( \frac{j\omega}{v} \right)^2 \vec{A} \quad \text{in seno} \quad \nabla^2 \vec{A} + K^2 \vec{A} = 0$$

$$K = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

2) Consideriamo un sistema di propagazione **cilindrico** e uno dei tre assi e' la direzione di propagazione (di solito  $z$ ) [in linea  $x$ ]

Allora nella  $\odot$  si puo' fare una separazione di variabili:

dire cilindrica significa avere  $f_1(x, y)$   $f_2(z)$  sostituendo in  $\odot$  si

$$\vec{A}(x, y, z) = \vec{A}(x, y) e^{j\beta z}$$

da cui

$$\nabla_{xy}^2 \vec{A} + (K^2 + \beta^2) \vec{A} = 0$$

e' dovuto al  $\nabla^2$  ancora noto  
non alle derivate  $z^2$ , infatti si  
e' nullo  $\nabla_{xy}^2$  e non  $\nabla_{xyz}^2$ ;  $\nabla_z^2$  e' finito

come addendo

$$\beta = \alpha + j\beta$$

perche'  $K = \alpha + j\beta$

(nelle onde fisse  $\gamma = j\kappa = j\beta$ )

(7)

qui è molto più generale -

di solito si pone  $K_c^2 = K^2 + \gamma^2$

3) Possiamo risolvere le equazioni di Maxwell con queste semplificazioni - Con queste riduciamo le componenti in funzione delle altre due e quindi mettiamo

$A_z \{ E_z, H_z \}$  | non ottenere tutte le altre componenti

non risolvere altro  $\nabla_{xy}^2 \bar{A}_z + K_c^2 \bar{A}_z = 0$

Distinguiamo TEM  $\begin{cases} E_z = 0 \\ H_z = 0 \end{cases}$

o di TM  $\begin{cases} H_z = 0 \end{cases}$

o di TE  $\begin{cases} E_z = 0 \end{cases}$

Per ogni modo modo  $a_m(x, y, z, t)$

per

$$\bar{A}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x, y, z, t)$$

16-4-69

Premetto alcune formule

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = j\omega \epsilon E_z$$

per il dielettrico

$$1) H_{z,y} + \gamma H_y = j\omega \epsilon E_x$$

$$2) -H_{z,x} - \gamma H_x = j\omega \epsilon E_y$$

$$3) H_{y,x} - H_{x,y} = j\omega \epsilon E_z$$

campo cilindrico

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}$$

$$4) E_{z,y} + \gamma E_y = -j\omega \mu H_x$$

$$5) -E_{z,x} - \gamma E_x = -j\omega \mu H_y$$

$$6) E_{y,x} - E_{x,y} = -j\omega \mu H_z$$

$$7) E_x = \frac{k^2}{k_c^2} \left[ \frac{1}{j\omega \epsilon} H_{z,y} - \frac{\gamma}{k^2} E_{z,x} \right]$$

si ricavano dalle precedenti

$$8) H_x = \frac{k^2}{k_c^2} \left[ -\frac{1}{j\omega \mu} E_{z,y} - \frac{\gamma}{k^2} H_{z,x} \right]$$

Se voglio ricavare  $E_x$  elimino  $H_y$  tra 4) e 1)

$$9) E_y = \frac{k^2}{k_c^2} \left[ -\frac{1}{j\omega \epsilon} H_{z,x} - \frac{\gamma}{k^2} E_{z,y} \right]$$

$$10) H_y = \frac{k^2}{k_c^2} \left[ \frac{1}{j\omega \mu} E_{z,x} - \frac{\gamma}{k^2} H_{z,y} \right]$$

ho le componenti  $E_x$   $E_y$   $H_x$   $H_y$  in funzione di  $H_z$   $E_z$

CAMPI TM

ho allora  $E_z = 0$   $H_z = 0$

dalle ultime 4 equazioni in parentesi  $[\ ] = 0$

9

Una possibilità di avere  $E_x \neq 0$  e' che sia  $K_c^2 = 0$

ovvero infatti la indeterminazione  $\frac{0}{0}$

allora ho (per avere campo)

$$K_c^2 = 0 \quad j^2 + K^2 = 0$$

cioe'

$$j = jK$$

cond. di propagazione

con Maxwell  $[ \text{la } z) \text{ e la } 5)]$

ho

$$z) -jH_x = j\omega\epsilon E_y$$

$$5) -jE_x = -j\omega\mu H_y$$

ostituendo il  $j$  trovato ho

$$-jK H_x = j\omega\epsilon E_y$$

cioe' poiche'  $K = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  ho

$$E_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_x = -\eta H_x$$

e con analoghi passaggi l'altra e'

$$E_x = \eta H_y \quad \text{cioe' le equazioni delle onde piane}$$

Come posso ora trovare  $E_x$   $H_x$   $E_y$   $H_y$  ... ?

$$\text{lo faccio con } \nabla^2 \vec{A} + K^2 \vec{A} = 0$$

in cui ho  $K_c^2 = 0$

~~$$\nabla_{xy}^2 \vec{A} + K_c^2 \vec{A} = 0$$~~

allora

$$\nabla_{xy}^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla_{xy}^2 \vec{H} = 0$$

mi campi statici in cond.

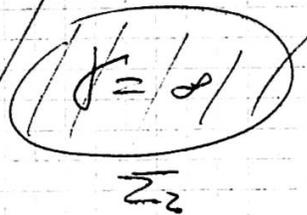
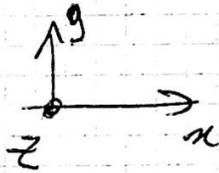
$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = 0$$

ho eq. simili a quelle dei campi statici

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \vec{0}$$

$$\nabla(\text{div } \vec{E}) = \nabla(\underbrace{\text{div } \vec{E}}_0) - \underbrace{\nabla^2 \vec{E}}_0 \Rightarrow$$

Considero 2 conduttori (condensatore a vuoto) (condensatore a vuoto)



risolvo le eq. <sup>mi</sup> nella zona dielettrica imponendo le condizioni al contorno -

So che sui  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  ho  $E_t = 0$

Questo non basta ancora perché ho ancora una costante moltiplicativa arbitraria. Infatti se la distribuzione di  $E$  soddisfa anche  $\nabla \cdot E$  soddisfa.

Bisogna allora conoscere la carica su un conduttore, questo per conoscere  $E$  -

Devi allora anche l'equazione -

$$\int E_n d\Sigma = \pm \frac{Q}{\epsilon} *$$

$$A_t = \frac{E_n}{\eta} \quad \leftarrow \text{verso}$$

quindi in modulo

Considero il vettore ausiliario

$$\vec{A} = \frac{\vec{E} \epsilon}{\eta} \quad \leftarrow \text{verso di } \vec{E}$$

$$A_t = \frac{E_n}{\eta}$$

otengo quello  
di fondo fisico

$E$  ha  $\text{div}$  e  $\text{rot}$  nulli nel dielettrico

allora nel calcolo vettoriale ho

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

$$\text{rot } \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0$$

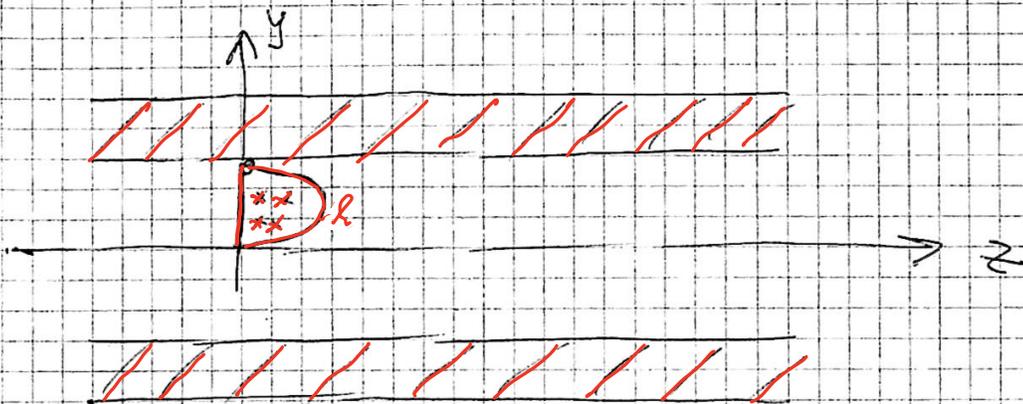
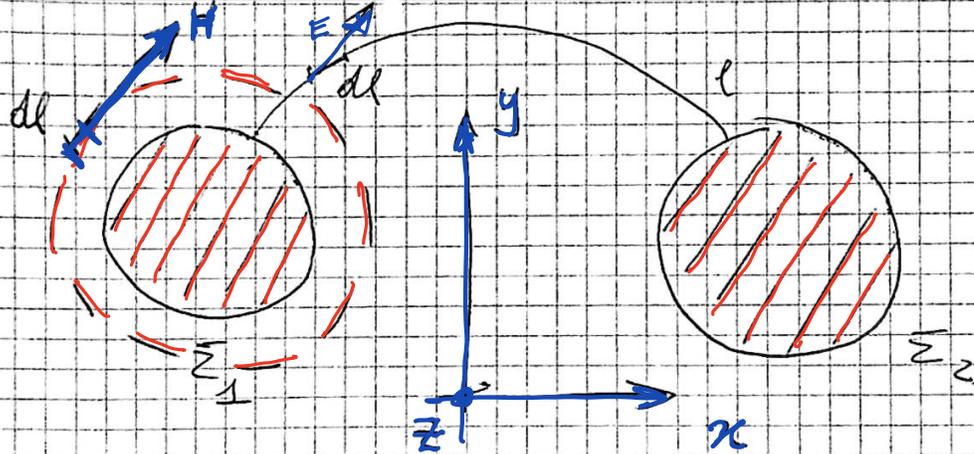
$$A_n = 0$$

da  $E_t = 0$

a questo si può arrivare solo pensando che  $\vec{A} = -\vec{H}$  e applicando il teorema di Gauss

e l'ultima condizione è

$$\int A_t d\Sigma = \mp \frac{Q}{\epsilon \eta} *$$



Integro  $E$  da 1 a 2 lungo  $l$

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{non dipende dal percorso}$$

fintanto  $z$  sia costante

**NB**  $\vec{E}$  ha circolazione nulla sul piano  $xy$   
 cioè non è se la linea è la un piano ad  
 un altro. Se percorro una linea e si vede che  
 abbiamo campo magnetico e tutto cambia -

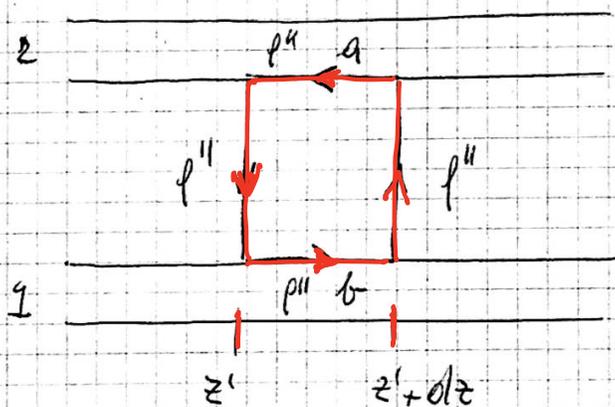
Analogamente si può definire la corrente -

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

La descrizione del sistema non dipende da  $\omega$  perché

$$K_c^2 = K^2 + V^2 = 0$$

ricaviamo le equazioni della linea



$$V(z) = \int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$V(z+dz) = \int_1(z+dz)^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$V(z+dz) - V(z) = \int_{z \rightarrow z+dz} \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad \text{opp}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial z} dz + V(z) - V(z) = dV$$

$$dV = \int \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad \text{eguale al flusso di } H$$

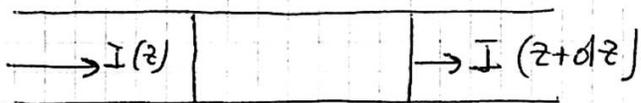
$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \frac{d\varphi}{dt}$$

$$dV = j\omega L I dz$$

$$L = \varphi$$

L per unità di lunghezza

In modo duale ricavò un'altra equazione



$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$I(z+dz) - I(z) = dI$  deve essere uguale alla corrente

$$dI = \int_{\text{mp. lat}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S} = \frac{dQ}{dt}$$

$$dI = j\omega Q dz = j\omega C V dz$$

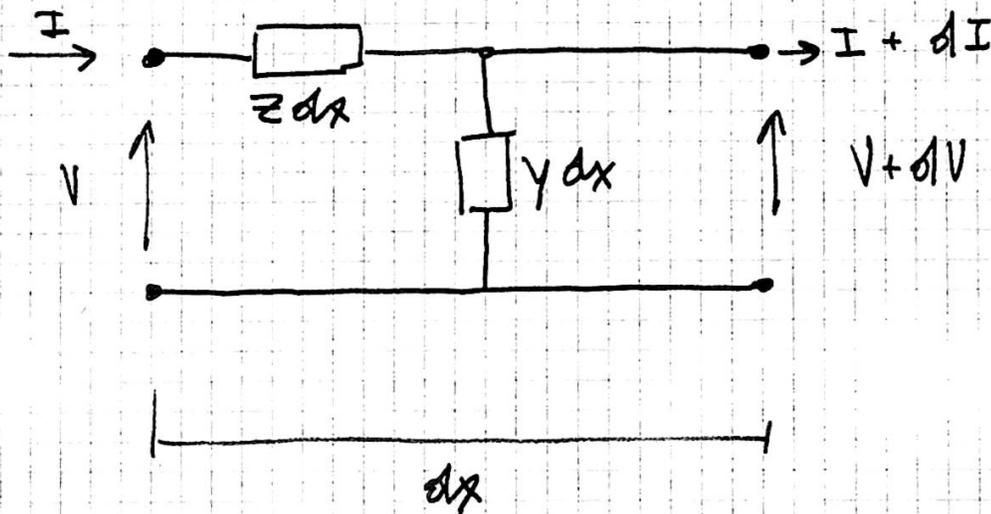
le due equazioni della linea sono dunque

$$\begin{cases} dV = -j\omega L I dz \\ dI = j\omega C V dz \end{cases}$$

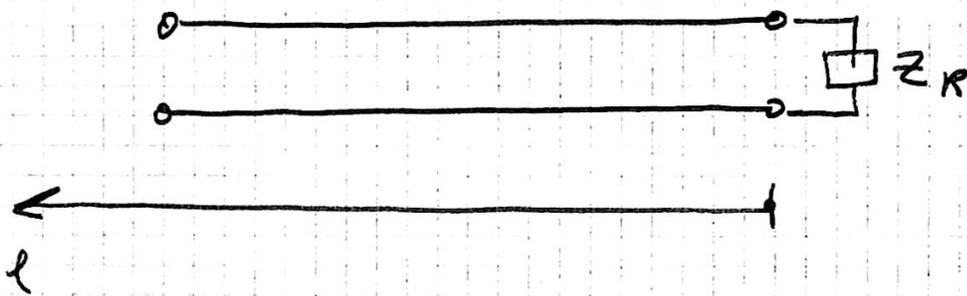
le ipotesi in cui sono valide sono

- 1)  $\epsilon = \infty$  nei conduttori
- 2) mezzi dielettrici o no perfetti  $\eta \rightarrow \eta_c$   $\epsilon \rightarrow \epsilon_c$
- 3) modi TM TE esauviti

una qualsiasi rete può essere con generalizzata  
con un salto logico



si considera l'asse partente dall'utilizzatore



Ricordiamo alcune equazioni

$$dV = -Z I dx$$

$$V_{,x} = -Z I$$

$$dI = -Y V dx$$

$$I_{,x} = -Y V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{,xx} = -Z I_{,x} = +Z Y V \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{,xx} = \phantom{-Z I_{,x}} = Z Y I \end{array} \right.$$

soluzione di queste equazioni sono

$$\begin{cases} V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} \\ I = I_1 e^{-\gamma x} + I_2 e^{\gamma x} \end{cases}$$

$$\gamma = \sqrt{ZY}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

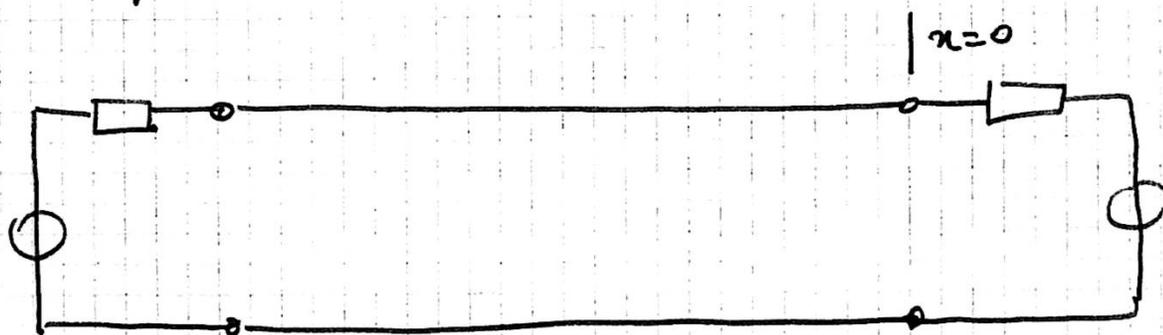
4 incognite  $V_1, V_2, I_1, I_2$

Sfruttando  $V, x = -Z I$

$$\gamma V_1 e^{-\gamma x} + \gamma V_2 e^{\gamma x} = -Z I_1 e^{-\gamma x} + I_2 Z e^{\gamma x}$$

$$V_1 = Z_0 I_1 \quad V_2 = -Z_0 I_2 \quad \text{in incognite}$$

altre due equazioni sono dovute alle relazioni delle porte



abbiamo così risolto il problema

$$Z_r = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_1 + V_2}{I_1 + I_2} = \frac{V_1 + V_2}{I_1 - I_2} Z_0$$

$$\frac{z_r}{z_0} = \frac{1 + \frac{V_2}{V_1}}{1 - \frac{V_2}{V_1}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_r - z_0}{z_r + z_0} \quad *$$

$V_1$  incidente

$V_2$  riflessa

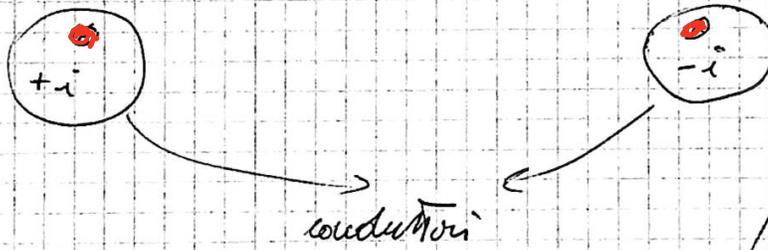
se  $z_r = z_0$  non c'è riflessione.

nelle seguenti ipotesi la \* vale anche nel dominio del tempo

1) linee senza perdite  $z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  (reale)

2) carico resistivo  $z_r$  reale

le ultime due condizioni al contorno di campo magnetico in regione con



17

Si può andare a rimpicciare le conoscenze del campo statico.

Ad esempio con  $C$  (capacità tra i due elementi) sono possibili nei modi TEM

Da  $\vec{E}$  con  $\vec{A} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{C}}{\mu}$  trovo  $\vec{H}$

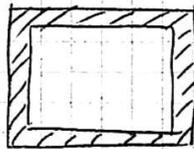
$\vec{H} = -\vec{A}$

Perché per, come conseguenza di questo discorso  $LC = \epsilon \mu$

( $L, C$  per unità di lunghezza), trovo anche  $L$

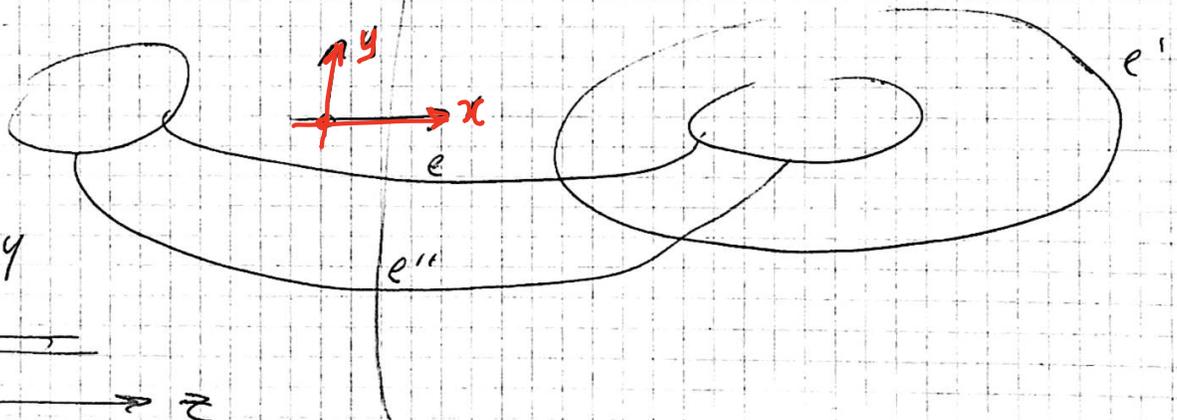
Definisco tensione e corrente per il modo TEM

Si può dimostrare che a un filo due conduttori separati non può avere un modo TEM.



Si può vedere semplicemente che in TEM sono fare tutto con certe proprietà. Allora mi si vogliono 2 conduttori

Per non averlo, bisogna che la guida sia semplicemente connessa intorno da ai due conduttori



Considero

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Per eq. in vista ( $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ ) ho due se la linea confinata 1 e 2 il valore dell'integrale non dipende dalla particolare linea -

Per il campo magnetico

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

è costante. Ovvero che la dipendenza dalle frequenze è tutta in

$$f^2 + k^2 = 0$$

Allora tutte le proprietà viste non dipendono ( $\sigma = \infty$  per ipotesi) dalla  $f$ .

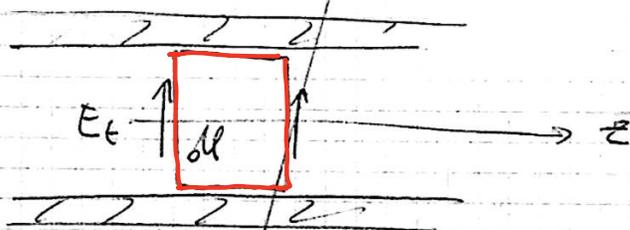
$H_0$

non considero il segno

$$V = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_C E_t dl$$

cont. regione per regione

Variabile con  $z$



ho

$$V(z) \text{ e } V(z+dz)$$

$$V(z) = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}(z)$$

$$V(z+dz) = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}(z+dz)$$

derivando

$$V(z) + \frac{dV}{dz} dz - V(z) = dV = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}''' =$$

Maxwell

derivata del flusso

lineari  
sono

$$j\omega L I dz = dz j\omega \int \mu H_{\phi} dl$$

induttanza per unita' di lunghezza

(Nei conduttori  $E_t = 0$ )

No allora

$$dz \int \mu H_{\phi} dl = L I dz$$

dalle def. di induttanza date da Assumi in campo statico

Con ragionamento duale (considerando un tubo con  $\vec{E}$ ) nel conduttore

e gli applico

$$\text{div} (\vec{S} + j\omega \vec{D}) = 0$$

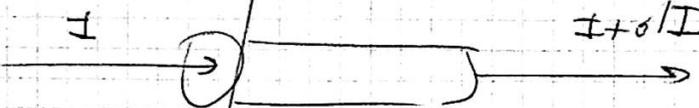
Integrando (otengo come flusso uscente)

$-dI$

$$j\omega \int \vec{D} \cdot d\vec{z}$$

$dQ$  sulle superfici dei conduttori

con



$$\int S_z dz = I$$

$$\int D dz \propto Q = CV$$

Allora Trovo

per unità di lunghezza

(\*)  $dI = j\omega C V dz$

quale con l'altra già vista formerà

eq. lineari

(□)  $dV = j\omega L I dz$

c'è anche quello interno ai conduttori (def. da f)

Le ipotesi sotto cui valgono le (\*) e (□) sono

1) Conduttori perfetti

non occorre dirlo perfetto (si usa  $\epsilon_c$  invece di  $\epsilon$ )

2) la linea va da  $-\infty$  a  $+\infty$

la linea reale comincia a  $z=0$

Quando la filo sono mandare dentro componenti lungo z allora usiamo modi TE e TM da si riconoscono

Se ho caso corto e frequenze alte (10 GHz e' importante tecnicamente) mi possono rimanere i TE e TM

Il TE e TM e' un problema di estrema'

Per ~~che~~ introdurre resistenze del conduttore  $\neq 0$  non posso inserire R nelle (\*) e (□) ma devo provvedere col "metodo delle perturbazioni"

Suppongo cioè il conduttore perfetto - Trovo i campi all'interno dei conduttori con loro conduttività, prendendo come condizioni al contorno i campi nel dielettrico precedentemente trovati (con  $\sigma = \infty$ )

In pratica non si entra nella sostanza dei campi dentro il conduttore ma si cerca ad esempio la potenza dissipata (per unità di lunghezza)

$$P_L = \int S R_s \rightarrow \text{resistenza superficiale}$$

~~21~~

$$\alpha = \frac{P_L}{W_e} \begin{cases} \text{pot. dissipata} \\ \text{pot. trasmessa} \end{cases}$$

21

dove  $R_s = \frac{\rho}{d}$  — costante  
— distanza ottimum

o  $R_s = \frac{\rho}{S(d)}$   
— dist di effetto pelle

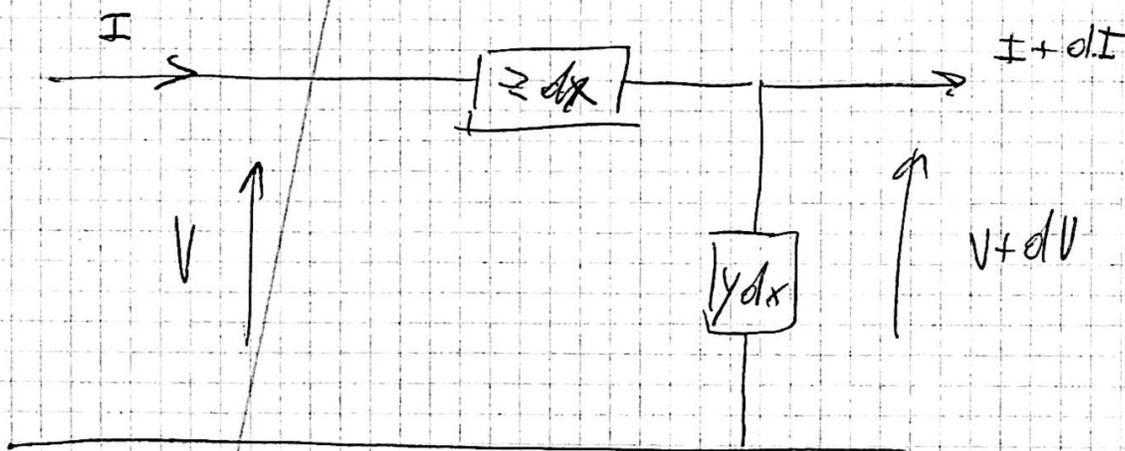
Teoria delle linee

Si generalizzano questi discorsi, togliendo loro il segno fisico che ancora hanno

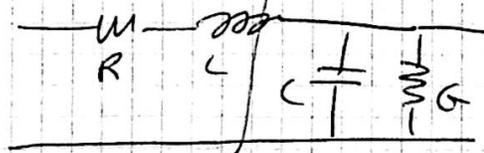
lungo  $j\omega L = Z$

$j\omega C = Y$

Arrivo a linee fatte di celle elementari con:



c'è salto logico delle  $x$  (o) (□) ad una cella elementare cui  
verbi delle (o) (□) sono trovare  
L C G (C'era  $E_c$ ) non  
non R



ora parta da  $z$  e  $y$  generiche funzioni di  $f$  22 (9)

$$1) V_{,x} = zI$$

$$I_{,x} = -yV$$

Il (-) dipende da come è messo l'one  $x$ .

Ho poi:

$$V_{,xx} = zyV$$

$$I_{,xx} = zyI$$

Ho allora

$$V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

*incidente*                      *riflessa*

dove  $\gamma = \sqrt{zy}$

definiamo  $Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}}$

le incognite sono  $V_1$   $V_2$   $I_1$   $I_2$

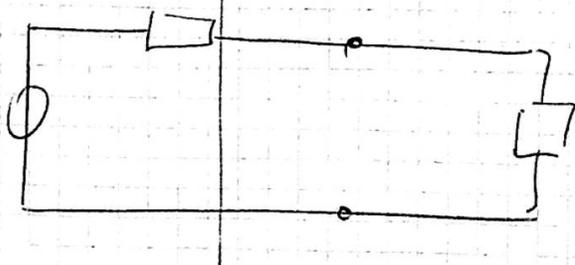
posso ricavare 2 relazioni tra queste 4

le sostituisco nella 1 e con identità  $V_2 e^{-\gamma z}$  ho

$$V_1 = Z_0 I_1$$

$$V_2 = Z_0 I_2$$

altre due mi trovano considerando il doppio bipolo



H<sub>0</sub>

$$Z_R = \frac{V(o)}{I(o)} = \frac{V_1 + V_2}{I_1 + I_2} =$$

$$\frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2} Z_0 = Z_R$$

~~19~~

23

Adesso risolviamo queste ultime nel rapporto  $\frac{V_2}{V_1}$

Trovato

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{V_2(z)}{V_1(z)} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} \end{cases}$$

fondamentale

Supponendo

1) linea senza perdite (L, C)

$$H_0 Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

reale

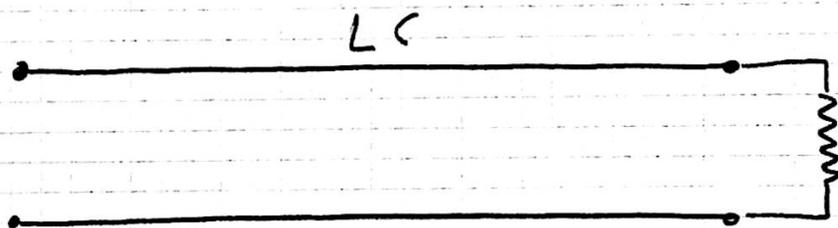
2) carico (Z<sub>R</sub>) resistivo

La (\*) vale anche nel tempo - Interessante per quanto z è distante dall'adattamento ottimo.

17-4-68

(11)

Consideriamo una linea senza perdite caricata su  $R$  24



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R - R_0}{R + R_0}$$

ci sono tre possibilità:

$$\frac{V_2}{V_1} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$R > R_0 \quad (R = \infty)$$

$$R = R_0$$

$$R < R_0 \quad (R = 0)$$

Supponiamo una certa forma d'onda ai morsetti di entrata.

C'è un fronte d'onda che avanza c'è sola onda incidente

$V_1(t)$  la riflessa non esiste.

Ma noi sappiamo che  $V_1 = Z_0 I_1 = R_0 I_1$

da questo pto di vista dalla porta di ingresso qualunque carico ci sia si vede la resistenza  $R_0$ .

Quando raggiunge  $R$  viene riflessa e compare anche l'onda inversa.

Una linea LC può rappresentare un ritardo infatti l'onda a percorrere la linea ci mette un certo tempo

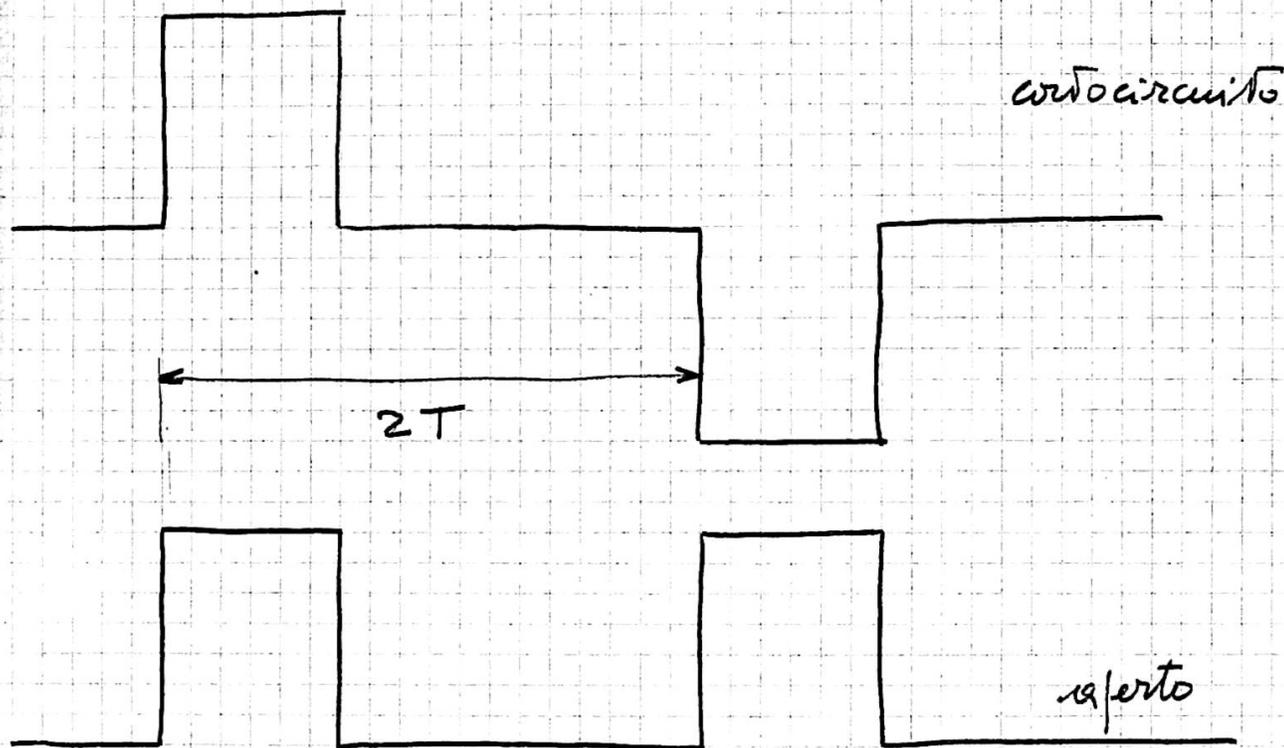
$$T = \frac{l}{v}$$

$l$  lunghezza della linea,  $v$  velocità di propagazione

(12) 25

Il fronte arrivato in fondo se la linea è chiusa su  $R_0$  non si riflette e' come se alla porta 1 vedessimo una linea infinita infatti non ne ritorna.

La seconda possibilita' e' data  $R \neq R_0$  ritorna indietro qualche cosa l'unico problema e' quello di vedere il segno.



ora vediamo che sempre  $V_2 \leq V_1$  molti chiamano coefficiente di riflessione

$$\rho = \frac{V_2}{V_1} \quad \text{coeff. di riflessione}$$

$$\epsilon = \frac{Z_R}{Z_0} \quad (\text{quantita' interessante})$$

hanno particolare interesse le formule che danno  $V_1$  e  $V_2$  in funzione della tensione sul carico

$$V_R = V_1 + V_2$$

ci interessano perché le soluzioni sono esponenziali

$$V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$V_R = V_1 + V_2 \quad V_1 = Z_0 I_1 \quad V_2 = -Z_0 I_2$$

$$I = I_1 e^{-\gamma x} + I_2 e^{\gamma x}$$

$$\begin{cases} V_R = V_1 + V_2 \\ I_R = I_1 + I_2 \end{cases} \quad \begin{cases} V_R = V_1 + V_2 \\ \frac{V_R}{Z_R} = \frac{V_1}{Z_0} - \frac{V_2}{Z_0} \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$V_1 = V_R \frac{Z_R + Z_0}{2 Z_R}$$

$$V_2 = V_R \frac{Z_R - Z_0}{2 Z_R}$$

questo tipo di approccio è molto utile nel dominio del tempo

Ricorda 
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

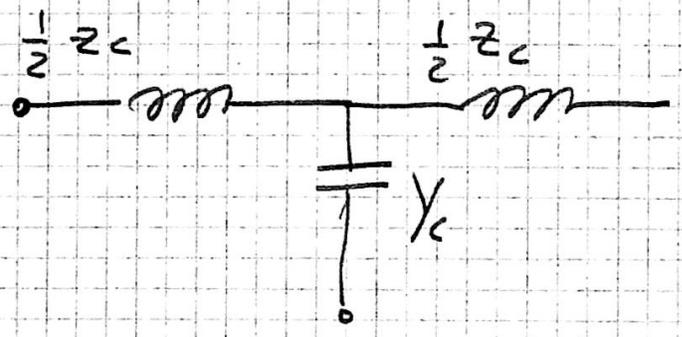
re simmetrico  $A = D$

Consideriamo una linea - Ponendo  $x=l$   
realizziamo un circuito equivalente del sistema.  
La matrice di trasmissione è reciproca

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

è simmetrica poiché  $A=D$

Possiamo allora sostituire un quadrupolo



dove 
$$\frac{z_c}{2} = \frac{z \cdot l}{2} \frac{\sqrt{\frac{B l}{z}}}{\frac{B l}{z}}$$

$$Y_c = Y \cdot \frac{\sin B l}{B l}$$

$z$  elemento longitudinale       $Y$  trasversale

$$B = \frac{\gamma}{j}$$

Per una linea senza perdite

$$B = \beta$$

$$V(x) = V(0) \cos \beta x + j R_0 I(0) \sin \beta x$$

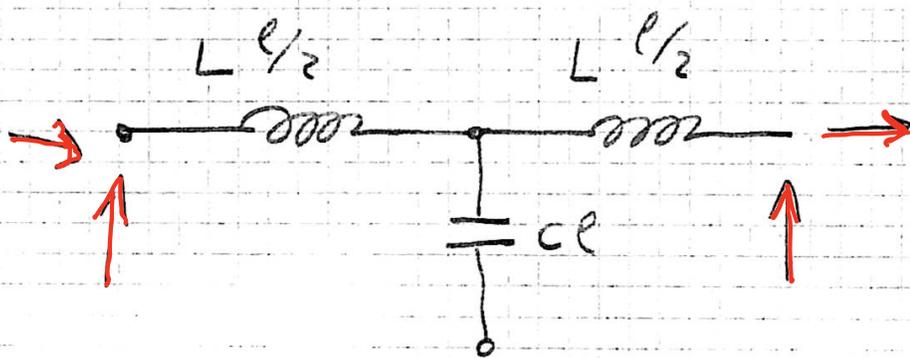
$$I(x) = I(0) \cos \beta x + j \frac{V_0}{R_0} \sin \beta x$$

$$\gamma = j\beta$$

queste hanno grande interesse teorico

Se ora  $\frac{Bl}{z} \approx 10^\circ$  (angolo piccolo)

$$\frac{z_c}{z} = \frac{z_l}{z}$$



Se ragioniamo su linee con  $w$  bassa e le onde sono molto lunghe non ha senso parlare di linea

Per  $x=0$  c'è il carico - linee LC

$$x = \frac{\lambda}{4}$$

$$z\left(\frac{\lambda}{4}\right) \quad \gamma x = j\beta x = j \frac{2\pi}{\lambda} x = j \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{ch } \gamma l & z_0 \text{sh } \gamma l \\ \frac{\text{sh } \gamma l}{z_0} & \text{ch } \gamma l \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

$$\gamma = \sqrt{zy}$$

$$\begin{aligned} B &= -j\gamma \\ &\downarrow \\ \gamma &= jB \end{aligned}$$

$$C = \frac{\text{sh } \gamma l}{z_0} = \frac{j \sin Bl}{\sqrt{\frac{z}{y}} \sqrt{\frac{y}{y}}} = \frac{j \sin Bl}{\gamma} y =$$

$$= \frac{j \sin Bl}{jB} y = \boxed{\frac{\sin Bl}{Bl} y = y_c}$$



$$R_1 = R_2 = \frac{D-1}{C} = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{\operatorname{sh} \gamma l} z_0 =$$

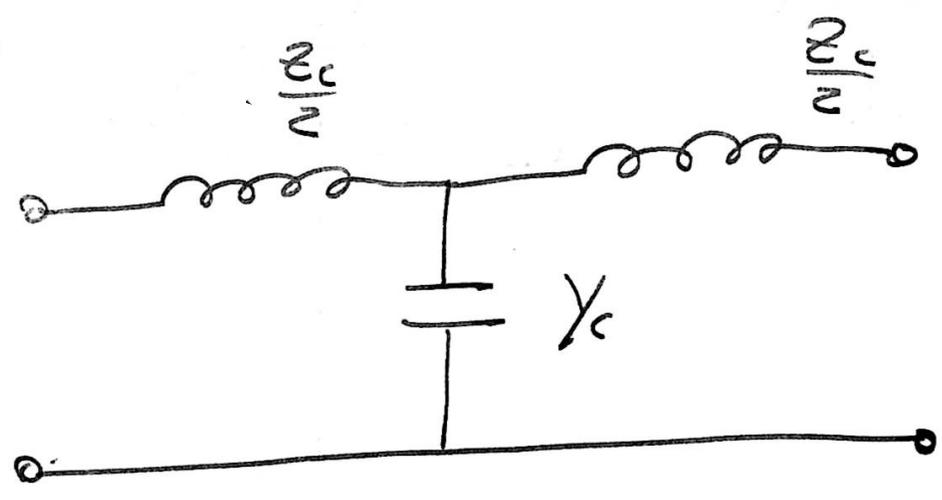
$$= \frac{\cos B l - 1}{j \sin B l} \sqrt{\frac{z'}{Y}} \sqrt{\frac{Z}{z}} = \frac{\cos B l - 1}{j \sin B l} \frac{z}{j B} =$$

$$= \frac{1 - \cos B l}{\sin B l} \frac{z \cdot l}{B \cdot l} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{B l}{z}}{\frac{B l}{z}} \cdot \frac{z l}{z} = \frac{z l}{z}$$

Trigonometria

dove



perché  $Y$  ammettenza capacitiva  
 "  $Z$  impedenza induttiva

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

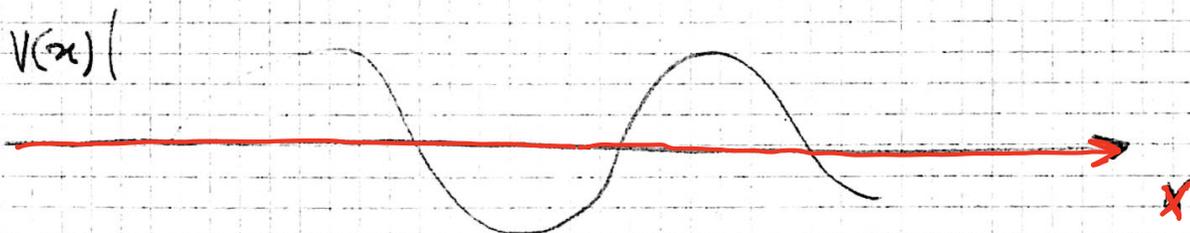
$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$Z\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{V(0) \cdot 0 + j R_0 I(0)}{I(0) \cdot 0 + j \frac{V(0)}{R_0}} = R_0^2 \frac{1}{Z(0)}$$

$$Z\left(\frac{1}{4}\right) Z(0) = Z_0^2$$

dati trasformatori  $\frac{1}{4}$

Supponiamo di avere uno strumento che misura la tensione lungo la linea



Linea LC adattata

$$V = V_1 e^{-i\beta x}$$

$$V(x) = V(0) \cos \beta x$$

Si dice rapporto d'onda stazionario il rapporto tra l'indicazione max e la min di  $V$

$$\sigma = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \geq 1$$

$$V = V_1 e^{i\varphi_1} e^{-i\beta x} + V_2 e^{i\varphi_2} e^{i\beta x}$$

$$V_{\max} = |V_1| + |V_2|$$

$$V_{\min} = |V_1| - |V_2|$$

$$\rho = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\sigma = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

Relazione tra  $\sigma$  e il carico resistivo

$$\frac{Z(0)}{Z_0} = \frac{V_1 e^{-j\alpha} + V_2 e^{j\alpha}}{V_1 e^{-j\alpha} - V_2 e^{j\alpha}} \stackrel{\text{per } \alpha=0}{=} = \frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2}$$

$$R = R_0 \sigma \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma} \quad \text{e} \quad \text{seconda che}$$

$$R > R_0$$

$$R < R_0$$

Manipolando otteniamo

$$V(x) = V(0) \operatorname{ch} \gamma x + z_0 I(0) \operatorname{sh} \gamma x$$

$$I(x) = I(0) \operatorname{ch} \gamma x + \frac{V(0)}{z_0} \operatorname{sh} \gamma x$$

la impedenza alla distanza  $x$  è

$$z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V(0) \operatorname{ch} \gamma x + z_0 I(0) \operatorname{sh} \gamma x}{I(0) \operatorname{ch} \gamma x + \frac{V(0)}{z_0} \operatorname{sh} \gamma x} =$$

$$= \frac{z(0) \operatorname{ch} \gamma x + z_0 \operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{ch} \gamma x + \frac{z(0)}{z_0} \operatorname{sh} \gamma x}$$

$$\frac{z(x)}{z_0} = \frac{z(0) \operatorname{ch} \gamma x + z_0 \operatorname{sh} \gamma x}{z_0 \operatorname{ch} \gamma x + z(0) \operatorname{sh} \gamma x}$$

se la  $z(0) = z_0$   $z(x) = z_0 \quad \forall x$

si ricava

$$\boxed{z(x) \cdot z(x) = z_0^2}$$

caricamento      scarico

Coef. riflessione  $\tilde{\rho} = \rho e^{j\varphi}$   
carico

all'incirca  $\pi$  poniamo def il coeff. di rif. come non come

$\frac{N_2}{V_1}$  ma come  $\frac{V_2 e^{j\gamma x}}{V_1 e^{-j\gamma x}}$

$V = V_1 e^{-j\gamma x} + V_2 e^{j\gamma x}$

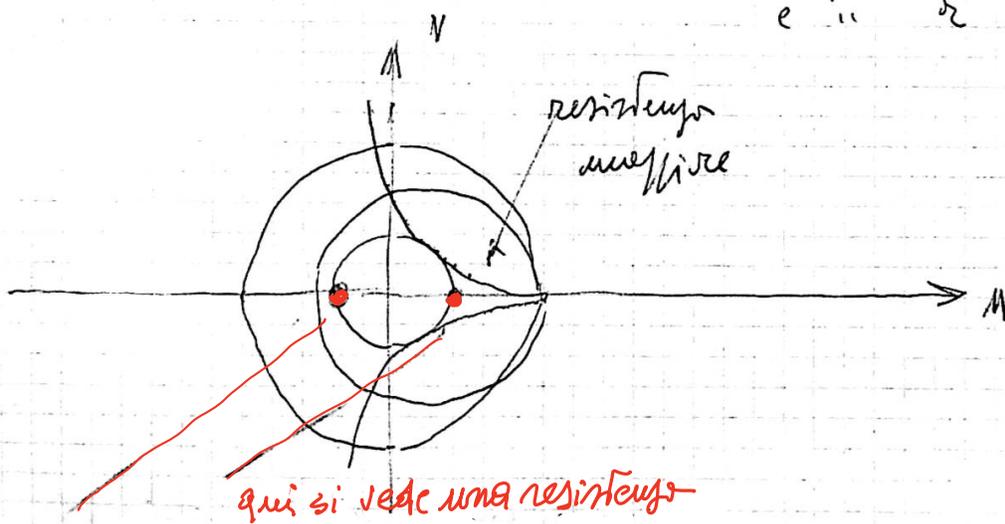
inc' guardando da  $x$  verso il carico vediamo un cerchio  
tale che valgono i discorsi finora fatti

quindi  $\tilde{\rho} = \rho e^{j\varphi} e^{2j\gamma x}$

$2\gamma = 2j\beta x = j4\pi \frac{x}{\lambda}$

quale e' il periodo?

e parte i  
" " coeff. di  
riflessione



$$X = \frac{2V}{(1-V)^2 + V^2}; \quad (1-U)^2 + V^2 = \frac{2}{X} V \quad / \quad 35$$

$$\boxed{(1-U)^2 + \left(V - \frac{1}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2}} \quad V^2 - \frac{2}{X} V$$

$$R = \frac{1-U^2-V^2}{(1-V)^2 + V^2} \quad \Rightarrow \quad (1-U)^2 + V^2 = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} U^2 - \frac{1}{R} V^2$$

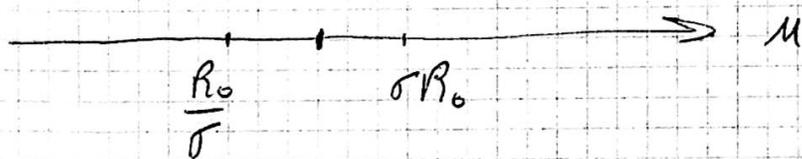
$$\begin{aligned} -V^2 \left(1 + \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R} &= 1 + U^2 - 2U + \frac{1}{R} U^2 \\ &= U^2 \left(1 + \frac{1}{R}\right) - 2U + 1 \end{aligned} \quad \frac{R+1}{R}$$

$$-V^2 + \frac{1}{R+1} = U^2 - 2 \frac{R}{R+1} U + \frac{R}{R+1}$$

$$-V^2 + \frac{1-R}{R+1} = \left(U - \frac{R}{R+1}\right)^2 - \frac{R^2}{(R+1)^2}$$

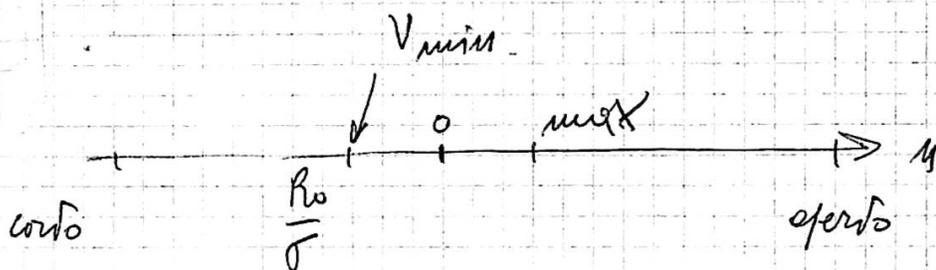
$$\left(V - \frac{R}{R+1}\right)^2 + V^2 = \frac{1-R^2 + R^2}{(R+1)^2} = \frac{1}{(R+1)^2}$$

carico resistivo



$$\sigma > 1$$

caso supponendo



$$V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

se sono in opposizione si ha il min

$$I = \frac{V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}}{R_0}$$

in identiche condizioni e' max

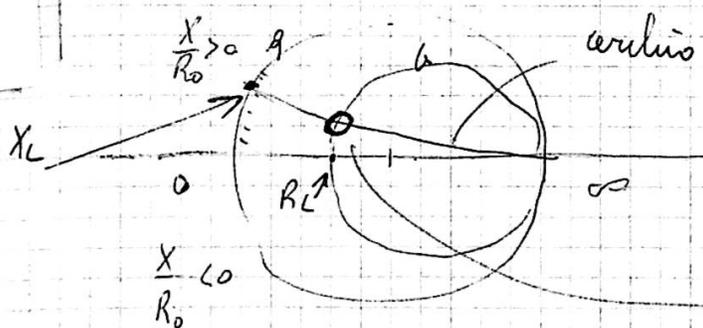
Esempio

linea caricata da  $Z_L$

$$\left( \epsilon = \frac{Z_L}{R_0} = R_L + jX_L \right)$$

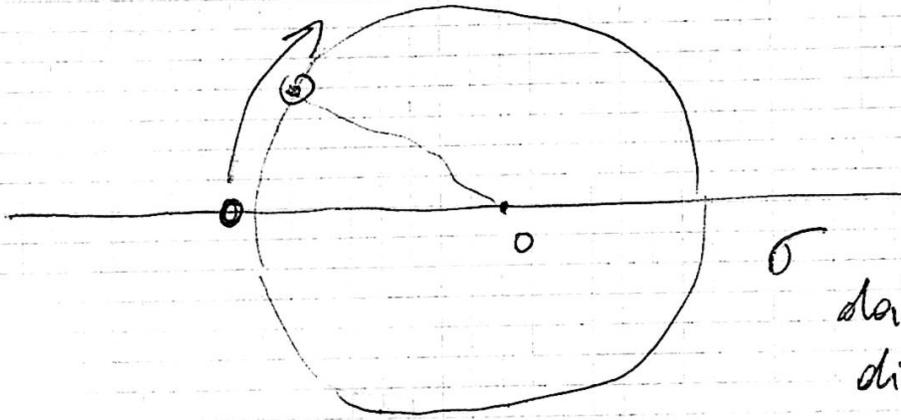
pendo  $\frac{Z_L}{R_0} \Rightarrow R_L + jX_L$

normalizzate



fo di carico

trovato questo  $V_0$  agino con



da' un'idea del disadattamento

raggio : modulo di  $\zeta$



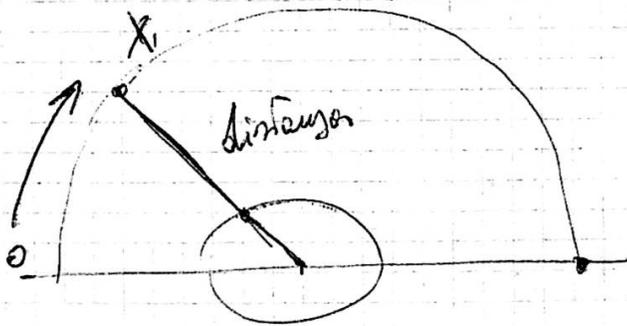
Tensione massima a due distanze  $e'$

dove  $i$  e' il carico ~~che~~  $i$  e' escino zero

\* traccia una retta che passa per il  $V_0$  di carico

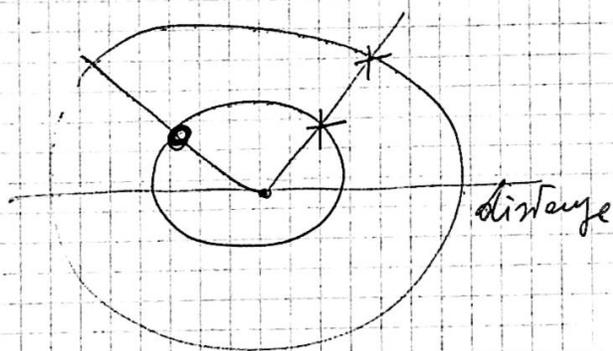
pendice il raggio che parte con zero e va verso il generatore

\* il  $p_0$  max e' l'incrocio con l'axe delle ordinate



Inpendenza alla distanza  $n$

pendo  $\frac{x}{\lambda}$  normalizzate



Trauco una rete e Trovo x

in una linea

$V_{max} = 2V$

$V_{min} = 1V$

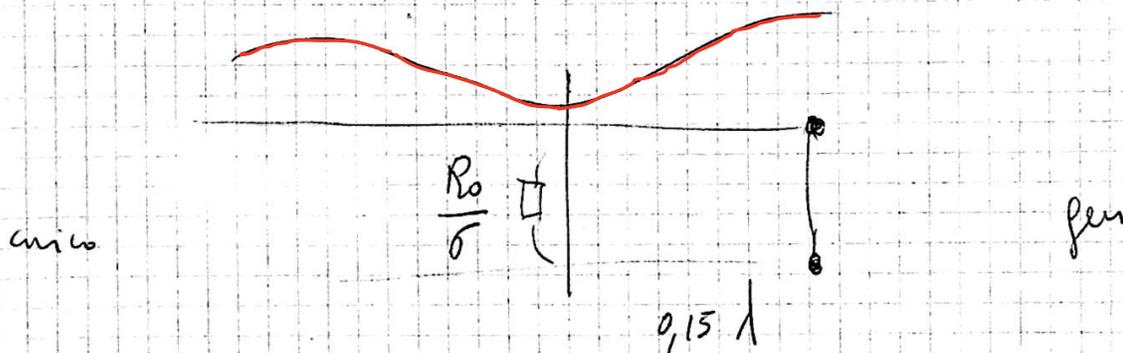
$\alpha_{min}$

9  $0,15 \lambda$  dal minimo verso il generatore, quanto vale l'impedenza della linea presente?

1) trovare  $\sigma$

$$\sigma = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \boxed{2 = \sigma}$$

Tutto ci istua a calcolare una rete



caricata con  $\frac{R_0}{\sigma}$  e lunga  $0,15 \lambda$

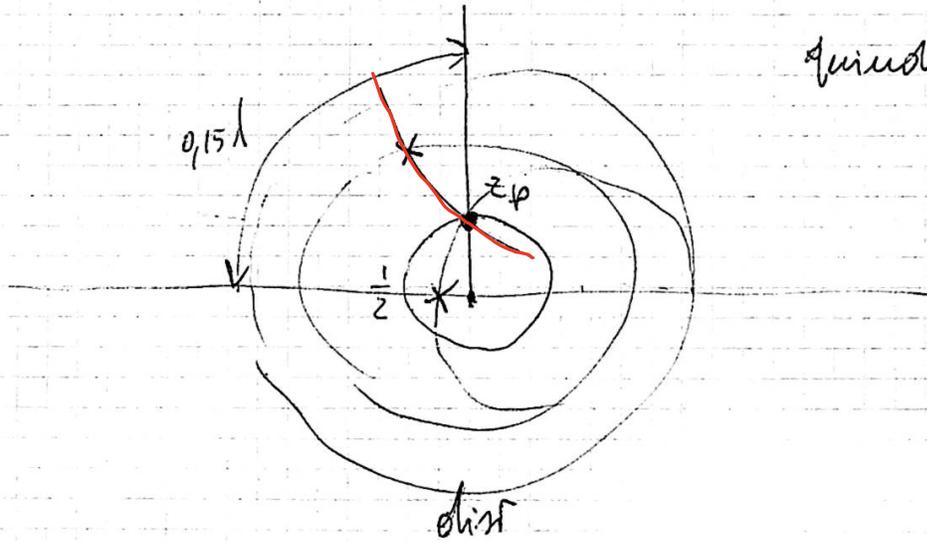
$$z(x) \begin{cases} \text{cosinus} \\ \sin \omega t \\ \frac{A+jB}{C+jD} \end{cases}$$

40

Con la carta si risolve

e' normalizzato

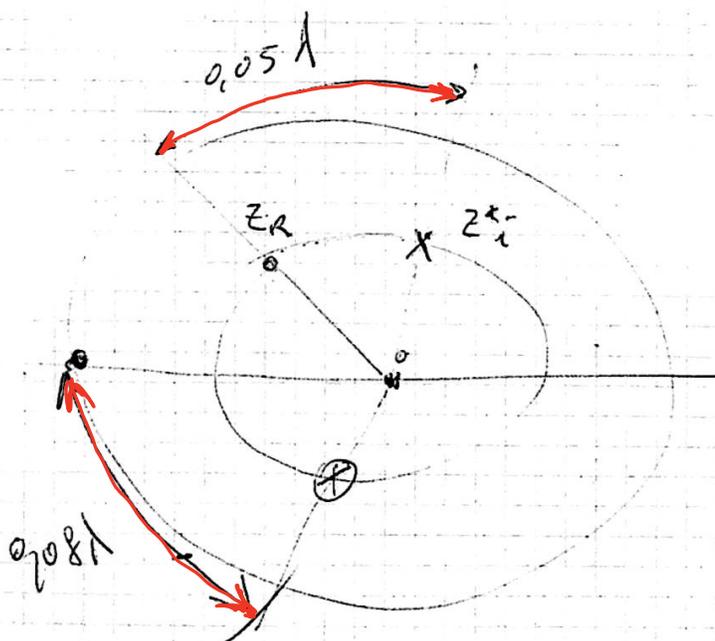
quindi  $R_0 = 1$



secondo conti fie' fatti

$$z_p = 0,998 + j0,970$$

i due dati sono ricavati da X



$$z_R = 0,998 + j0,970$$

Trovare  $z_i$

dopo  $0,05 \lambda$

$$z_i = 1,57 + j0,7$$

dato  $\epsilon'$  il cerchio supplementare di cui  $q = 0,08 \lambda$

41

$$\textcircled{X} \quad Z_A = 0,6 - j 0,38$$

Cavo coassiale conduttore interno  $\phi = 1 \text{ mm}$

$\phi$  interno conduttore esterno  $6 \text{ mm}$

costante dielet. rel. mezzo  $\epsilon' = 2$

lunghezza  $20 \text{ m}$

Un estremo  $\epsilon'$  alimentato da un impulso rettangolare di durata regolabile. L'altro  $\epsilon'$  chiuso su un resistore da  $50 \Omega$

1) durata max impulso / impulso riflesso in ingresso completamente distinto da quello prodotto dallo stesso

A) controllare se si riflette - cioè trovare la resistenza caratteristica. Se  $\epsilon'$   $50 \Omega$  non ritorna -

per il coassiale  $R_0 = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D_e}{D_i}$

inoltre  $LC = \mu \epsilon$

poi con l'ultimo ricavato uno dei due

Prendo i conti  $R_0 = 75 \Omega$

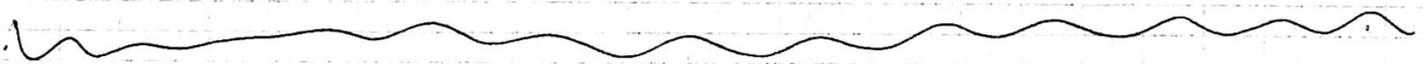
B) Tempo di propagazione dell'impulso al carico

$$t = \frac{l}{v} = 9.4 \mu\text{sec}$$

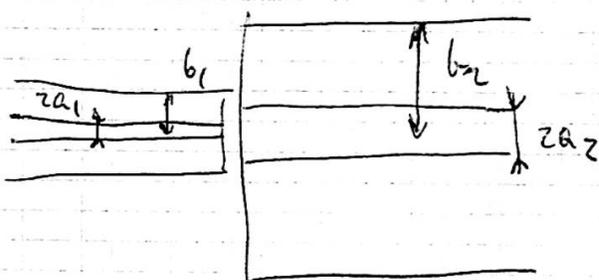
$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

quindi

$$d \leq 2t$$



2 casi speciali in cascata



$$a_1 = 1 \text{ mm}$$

$$a_2 = 2 \text{ mm}$$

$$b_1 = 3 \text{ mm}$$

$$b_2 = 6 \text{ mm}$$

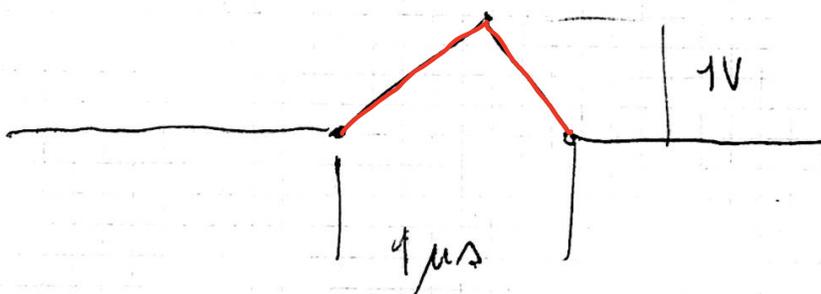
$$\epsilon_1 = 2\epsilon_2$$

$$\mu_1 = 2\mu_2$$

~~Apparecchio~~ linee ideali e modo TEM

la 2<sup>a</sup> linea è aperta

generatore ideale alimenta la prima linea ed è aperto



calcolare la tensione al terminale aperto.

43

Si discute la legittimità delle ipotesi fatte.



1) Hanno la stessa impedenza caratteristica.

La velocità di propagazione può essere diversa  
non esistono riflessioni

2) alla giunzione con l'ipotesi di sistema  
cilindrico - la propagazione non è TEM

30-4-68

Supponiamo che la dipendenza spaziale sia

$$f(x, y, z) \Rightarrow g(x, y) e^{-\gamma z}$$



dielettrico  
cilindrico  
infinite

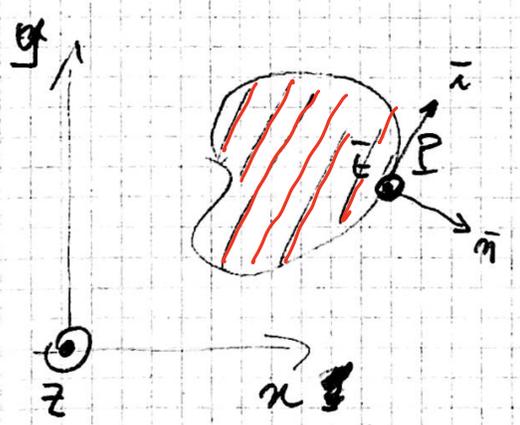
$$* \left\{ \begin{aligned} \nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z &= 0 \\ \nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

teniamo presenti le 7 8 9 10 del 16-4-68

$$K = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v}$$

$$K_c^2 = K^2 - \gamma^2$$

Condizioni al contorno delle \*

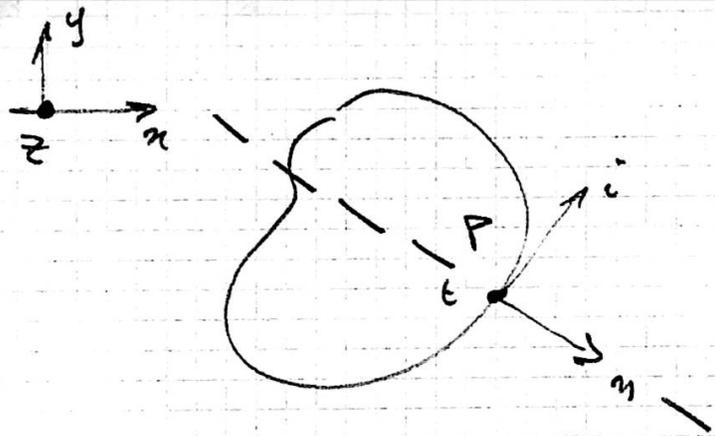


E verso diretto come z

$E_n$  componente lungo n

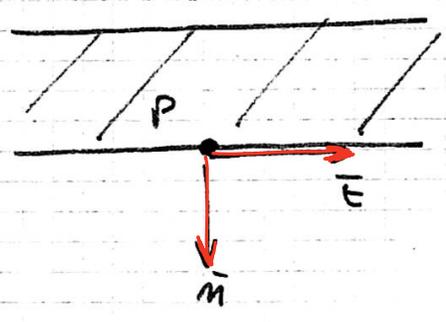
$E_t, H_t$  componenti totali nel piano xy

per la direzione t si usa  $E_z, H_z$



sezione che contiene  $t$  e  $n$

h0



Continuo

$$E_z \equiv 0$$

perché dentro non c'è campo  
allora non c'è nemmeno fuori

NB  $E_z$  componente della componente nel piano tangente

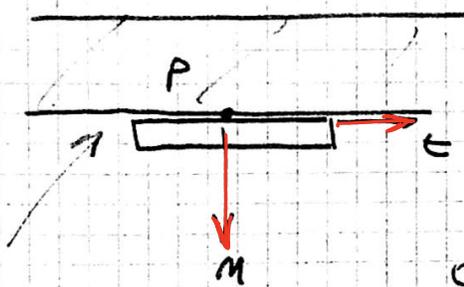
perché  $E_z$  nullo  $\forall z$  h0

$$\frac{\delta E_z}{\delta z} = 0$$

$$\left( \text{anche } \frac{\delta E_z}{\delta i} = 0 \right)$$

per il n vede che  $\frac{\delta H_z}{\delta m} = 0$

in fatti mettiamo una spirale nel piano  $t$  e  $n$



circolando

17

infinitesimo  
di ordine superiore

$$0 = H_z(P) \delta l - [H_z(P + \delta l)] \delta l =$$

$$= H_z(P) \delta l - \left[ H_z(P) + \frac{\partial H_z}{\partial m} \delta l \right] \delta l =$$

$$= \frac{\partial H_z}{\partial m} \delta l^2 = 0 \implies \frac{\partial H_z}{\partial m} = 0$$

la circolazione è nulla perché  $E$  ~~non~~ non dà contributi perché  $E$  è tangente alla spirale



$K_c$  indipendente da  $\omega$  ed è una incognita del problema

$K_c$  è insieme numerabile

$$\nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0$$

$$\nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0$$

• noto  $K_c$  possiamo risolvere le equazioni ottenendo un  $E_z$  u° complesso

• il contorno riguarda condizioni al contorno  $\rightarrow$

$\rightarrow K_c$  non dipende da  $\omega$

$K_c$  dipende dalla geometria del sistema. - 48

$\gamma$  è invece funzione di  $\omega$  perché

$K$  dipende da  $\omega$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

quindi per un certo sistema  $\exists$   $\alpha(\omega)$   
 $\beta(\omega)$

fenomeno di dispersione

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \rightarrow \boxed{v_f = v_f(\omega)}$$

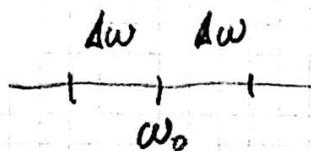
nelle onde piane  $\beta \propto \omega \rightarrow v_f = \text{cost}$

qui invece no

Si introduce la velocità di gruppo

Si trasmettono per esempio treni di onde sinusoidali

Qui il contenuto armonico è compreso in un piccolo intervallo



Sottraiamo la dipendenza da  $x, y$

49

ho  $f(z, t)$

con Fourier

$$f(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$F(\omega)$  spesso complesso

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

$\alpha$   $\delta$  non varia rapidamente con  $\omega$   
nel piccolo intorno  $\delta = \omega t$

allora posso scrivere

$$f(z, t) = K \left[ \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\beta z} d\omega + \dots \right]$$

rende conto di  $\delta$

Supponiamo  $F(\omega) \approx \text{costante} \approx F(\omega_0)$   
dato il piccolo intervallo -

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0} + \dots \Rightarrow$$

$$f(z, t) = K F(\omega_0) \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i \left[ (\omega - \omega_0 + \omega_0)t - \beta(\omega)z - [\omega - \omega_0] \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right]} d\omega$$

$$\omega - \omega_0 = \bar{\omega}$$

$$f(z, t) = K F(\omega_0) e^{i[\omega_0 t - \beta(\omega_0)z]} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{i[\bar{\omega}t - \bar{\omega} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z]} d\bar{\omega} + \dots$$

quintiamo solo l'integrale

$$\frac{1}{i \left[ t - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right]} \int e^{i[\dots]} d\omega \left[ it - i \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right]$$

quindi

$$f(z, t) = K F(\omega_0) e^{i[\omega_0 t - \beta(\omega_0)z]} \frac{2 \Delta\omega \left\{ e^{i \left[ t - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \Delta\omega} - e^{-i \left[ t - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \Delta\omega} \right\}}{2j \left[ t - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \Delta\omega}$$

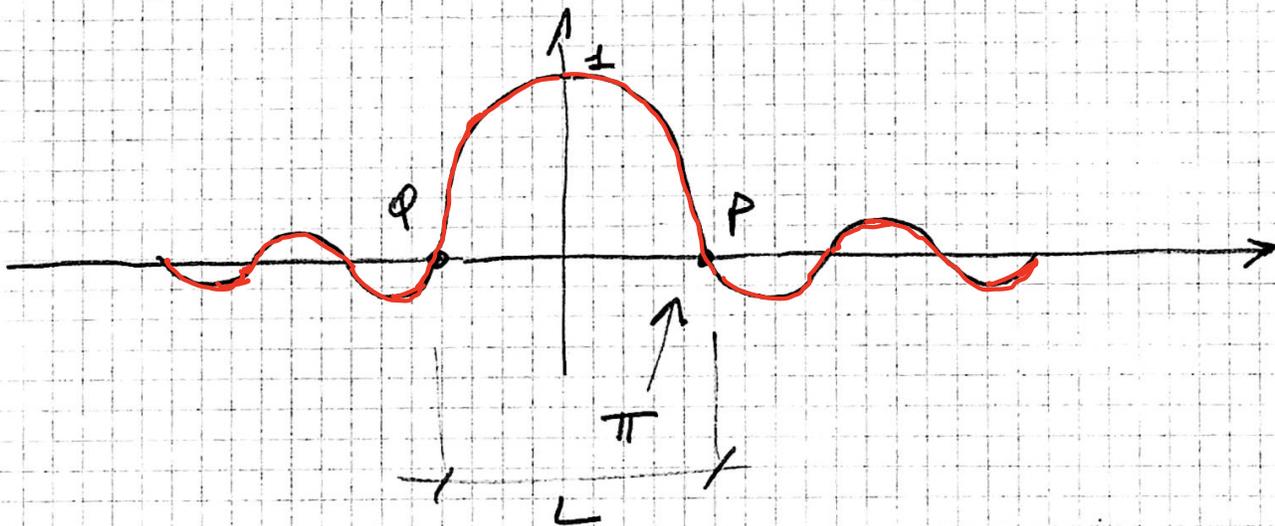
è del tipo

$$\frac{2 \Delta\omega}{H} \left( \frac{e^{iH} - e^{-iH}}{2j} \right)$$

c'è un termine del tipo

$$\frac{\sin x}{x}$$

$$x = \Delta\omega \left[ t - \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right]$$



$$\Delta\omega \left[ t - \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right] = \pi$$

poiché compare  $t$  e  $z$  il  $\omega_0$  di zero  $P$   
è viaggiante e cammina con la velocità  
di gruppo

$$v_g = \frac{1}{\left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0}}$$

quindi il secondo fattore del prodotto se il primo  
fornisce costante mi darebbe un grafico  $\frac{\sin x}{x}$   
viaggiante.

Calcoliamo

PQ

nell'istante  $t=0$  e'

52

$$\Delta\omega \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right) \Big|_{\omega_0} L = 2\pi$$

se  $\beta$  e' costante

$$L \rightarrow \infty$$

$L$  tanto piu' grande quanto piu' piccolo e'  $\Delta\omega$

Consideriamo l'altro fattore

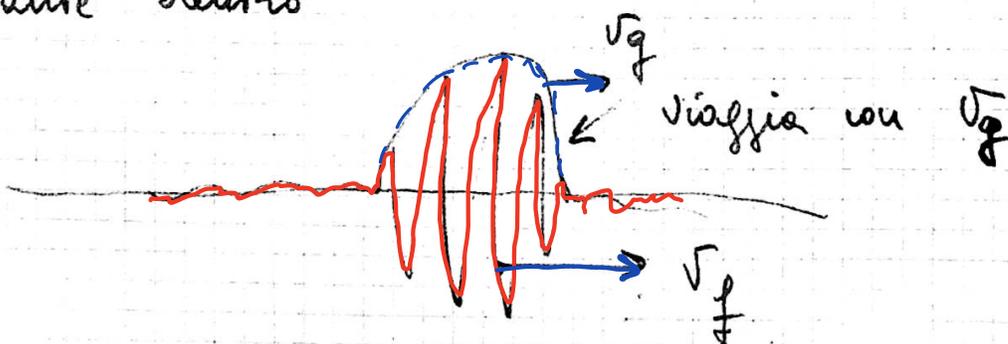
contiene un termine di propogione alla  
velocita'  $v_f$

$$v_f = \frac{\omega_0}{\beta(\omega_0)}$$

velocita' di fase  
della portante

questo termine non e' attenuato e viaggia a velocita'  $v_f$

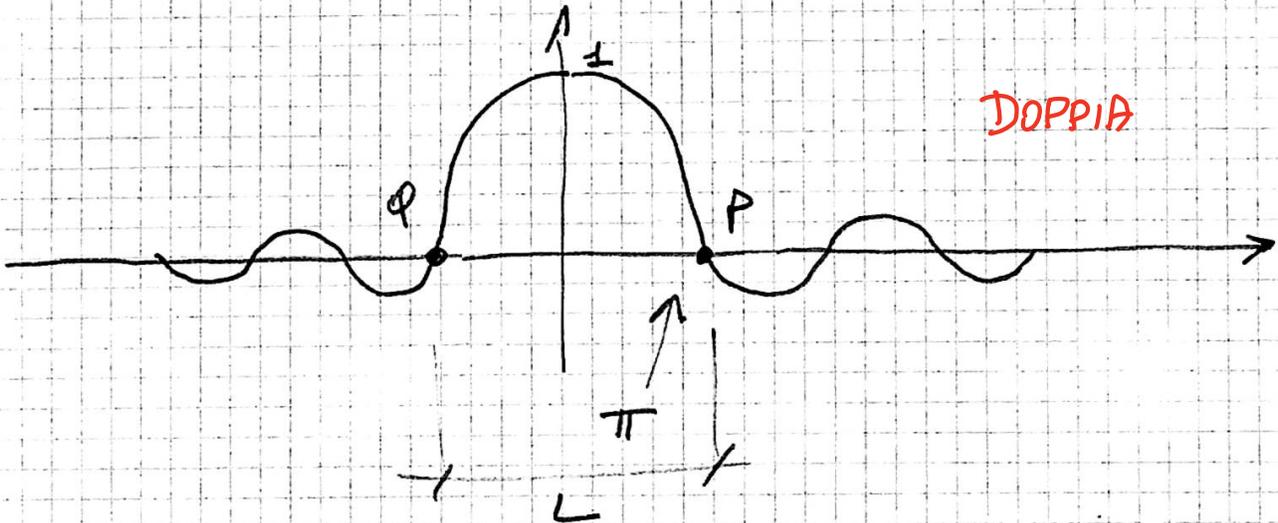
il prodotto e' circa zero fuori di  $\Delta\omega$   
e costante dentro



C'è un termine del tipo

$$\frac{\sin x}{x}$$

$$x = \Delta\omega \left[ t - \left( \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right)_{\omega_0} z \right]$$



$$\Delta\omega \left[ t - \left( \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right)_{\omega_0} z \right] = \pi$$

perché compare  $t$  e  $z$  il  $\omega_0$  di zero  $P$   
è viaggiante e cammina con la velocità  
di gruppo

$$v_g = \frac{1}{\left( \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right)_{\omega_0}}$$

quindi il secondo fattore del prodotto se il primo  
fornisce costante mi darebbe un grafico  $\frac{\sin x}{x}$   
viaggiante.

calcoliamo

PQ

nell'istante  $t=0$  è

52

$$\Delta \omega \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right) \Big|_{\omega_0} L = 2\pi$$

DOPPIA

se  $\beta$  è costante  $L \rightarrow \infty$

$L$  tanto più grande quanto più piccolo è  $\Delta \omega$

Consideriamo l'altro fattore

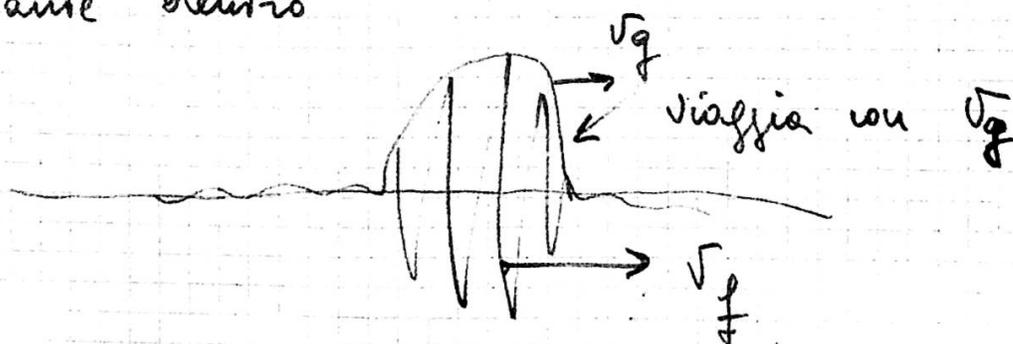
contiene un termine di propagazione alla  
velocità  $v_f$

$$v_f = \frac{\omega_0}{\beta'(\omega_0)}$$

velocità di fase  
della portante

questo termine non è attenuato e viaggia a velocità  $v_f$

il prodotto è una zero fuori di  $PQ$   
e costante dentro



La risonante scorie dentro il pacchetto.

53

In pratica l'energia è solo nel pacchetto →

→  $v_g$  velocità con cui si propaga l'energia

→  $v_g < c$

$$K_c^2 = K^2 + \gamma^2$$

$$\gamma = \sqrt{K_c^2 - K^2} = jK \sqrt{1 - \left(\frac{K_c}{K}\right)^2}$$

$$K = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v}$$

se supponiamo  $K_c$  reale →  $\gamma$   $\begin{cases} \text{reale} \\ \text{o immag} \end{cases}$  mai complesso

Per una certa configurazione  $\exists$  un insieme di  $K_c$

fissata la configurazione, cambiando  $K$  succede una sola volta che  $\gamma$  passa da reale a immaginario (cio' perché  $K = \frac{\omega}{v}$ )

frequenza critica quella in cui  $\gamma$  va da

reale a immaginario

nel risonanza  $\gamma = 0$

54

quindi  $K = K_c$

ma  $K = \frac{2\pi f_c}{\gamma} = K_c$



$$\gamma = jK \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

non si risonanza

$f < f_c$

$\gamma$  reale

$\gamma = \alpha$

$f > f_c$

$\gamma$  immaginario

$\gamma = j\beta$

si risonanza senza attenuazione

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

$$k_c^2 = \frac{2\pi f_c}{v}$$

$$\left(\frac{2\pi f_c}{v}\right)^2 = \left(\frac{2\pi f}{v}\right)^2 + \gamma^2$$

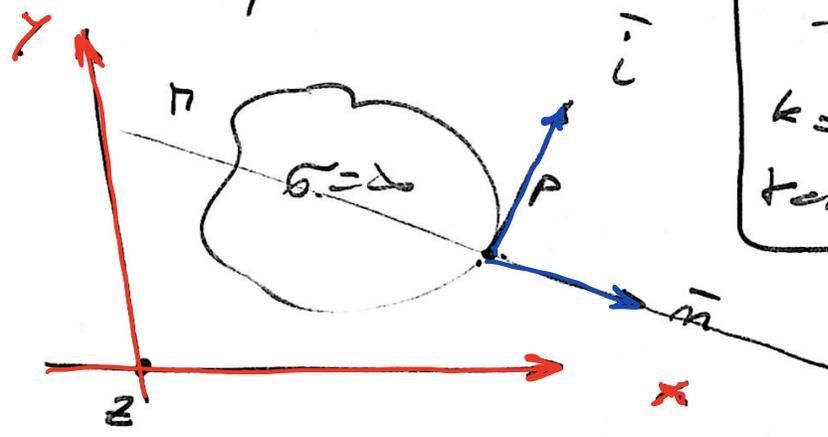
$$\gamma^2 = \left(\frac{2\pi}{v}\right)^2 (f_c^2 - f^2)$$

$$\gamma = k \sqrt{\frac{f_c^2}{f^2} - 1} = jk \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}$$

Cil ; diel

$$E_z = 0$$

$$\nabla_{xy}^2 A + k_c^2 A = 0$$



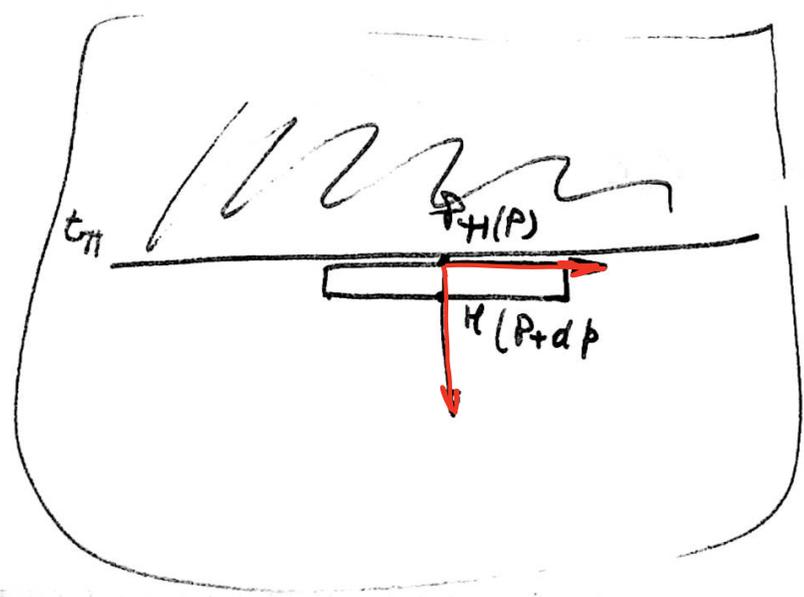
$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$k = \alpha + j\beta$$

$$H_c$$

$$E_c$$

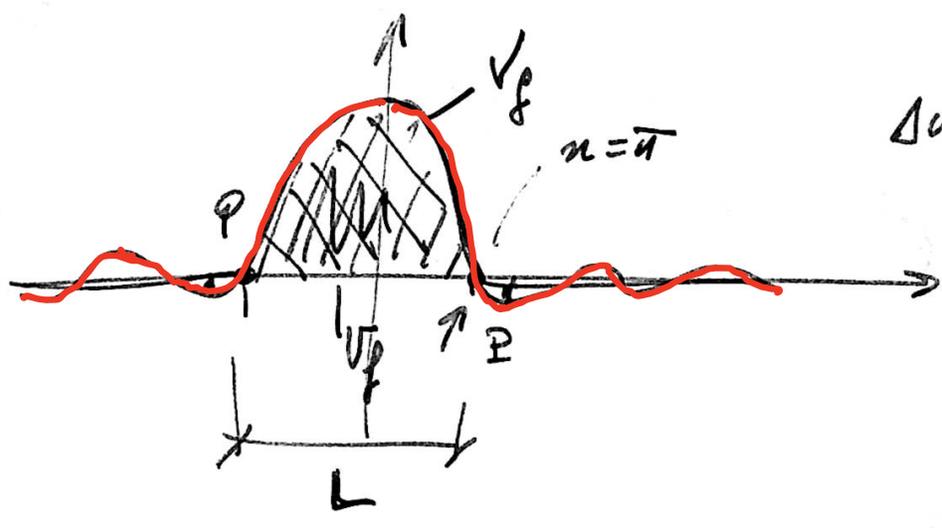
$$H(P)\delta + H(P+dP)\delta = 0$$



$$H(P)\delta - H(P)\delta - \frac{\partial H(P)}{\partial m} d\delta$$

$$H(P)\delta - H(P)\delta - \frac{\partial H(P)}{\partial m} d\delta$$

$$\frac{\partial H}{\partial m} = 0$$



$$\Delta \omega \left[ t - \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right] = \pi$$

$$\frac{z}{t} = \frac{1}{\left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0}} = v_g$$

t=0

$$\Delta \omega \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} z = \pi \rightarrow z = L$$

$$v_g = \omega$$

$$\omega = \omega_0$$

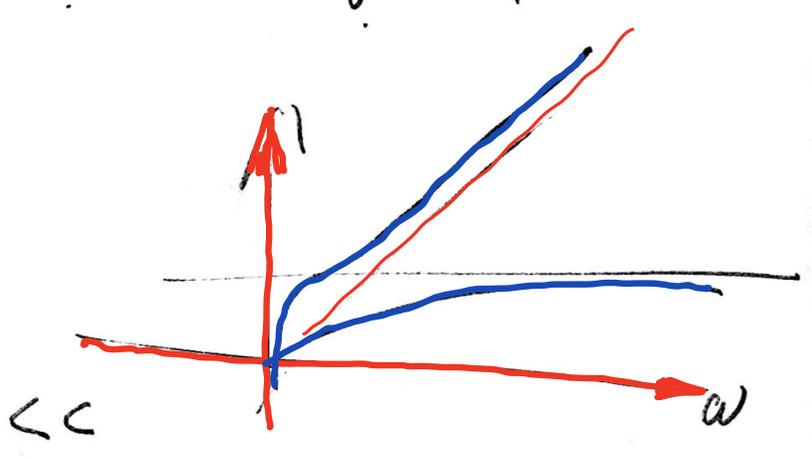
$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \left( \frac{A}{2cb} \right)^2}}$$

$$\Delta \omega$$

$$L \rightarrow \infty$$

$$v_g = \frac{1}{\left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0}}$$

$$v_g = \frac{\omega}{\beta}$$



$$\nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0$$

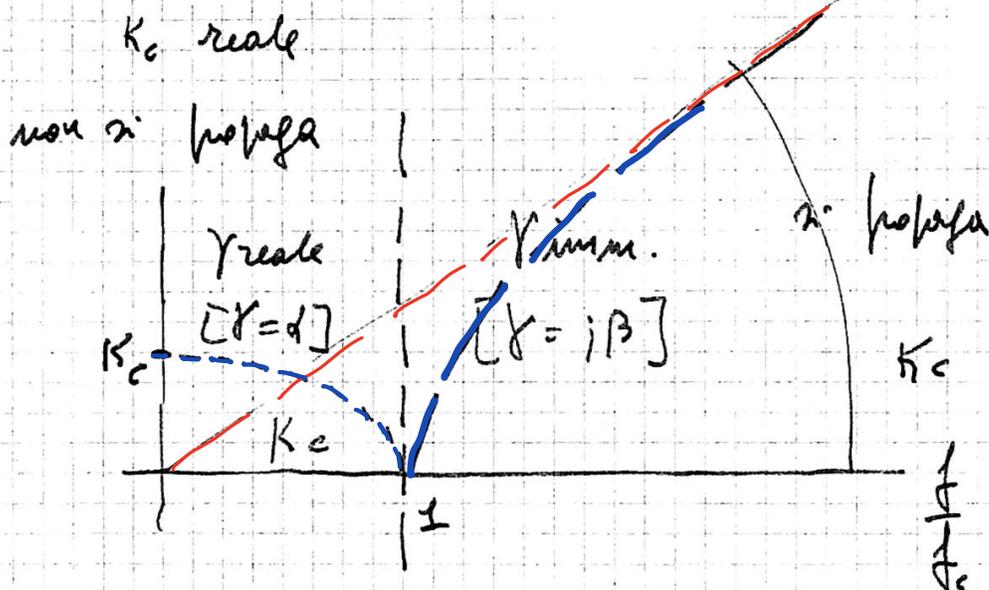
$$K_c^2 = K^2 + \gamma^2$$

$$\nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0$$

$$\gamma = iK \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$f_c / K_c = \frac{2\pi f_c}{\sqrt{\quad}}$$

$$K = \frac{2\pi f}{\sqrt{\quad}}$$



$\gamma$  reale attenuazione onda diretta

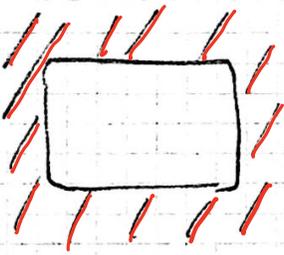
Si vede che alle frequenze basse non c'è propagazione



non possibili TEM

TE

TM



non e' possibile TEM

$$\gamma = j \frac{2\pi}{v} f \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = j \frac{2\pi}{v} f_c \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}$$

o  $f < f_c$  come prima

$$f = 0 \quad \text{la radice e' } -1 \quad \rightarrow \quad \gamma = K_c$$

per  $\frac{f}{f_c}$  molto grande e perde  $j$

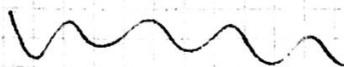
$$\text{ho } \frac{2\pi}{v} f_c \left(\frac{f}{f_c}\right)$$

ha coefficiente angolare  $K_c$

per un modo TEM senza perdite  $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v} = K$

quindi  $\beta$  e'  $jK$  per i TEM

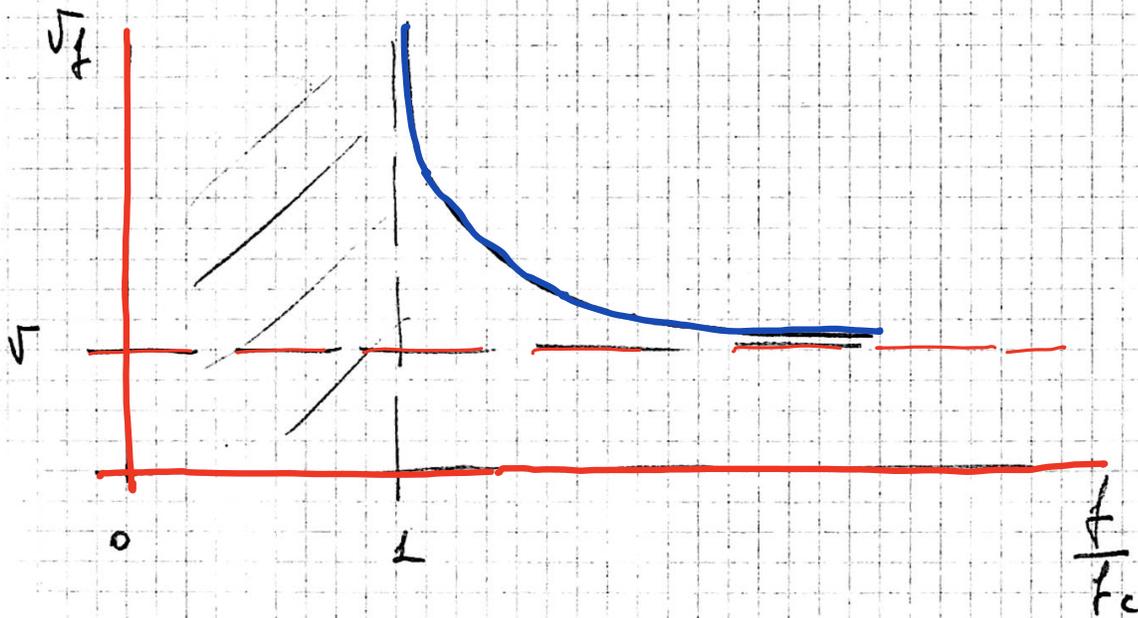
- quindi a frequenze molto alte ci si approssima ad un modo TEM



$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi f_c}{v} \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}} = v \frac{f/f_c}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}} = 59$$

$$= v \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad \text{since in } f/f_c > 1 \rightarrow$$

$$\Rightarrow v_f > v$$



$$v_g = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = \frac{1}{\frac{-2\pi f_c}{v} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}} \cdot \frac{f}{f_c}} =$$

$$= \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}}$$

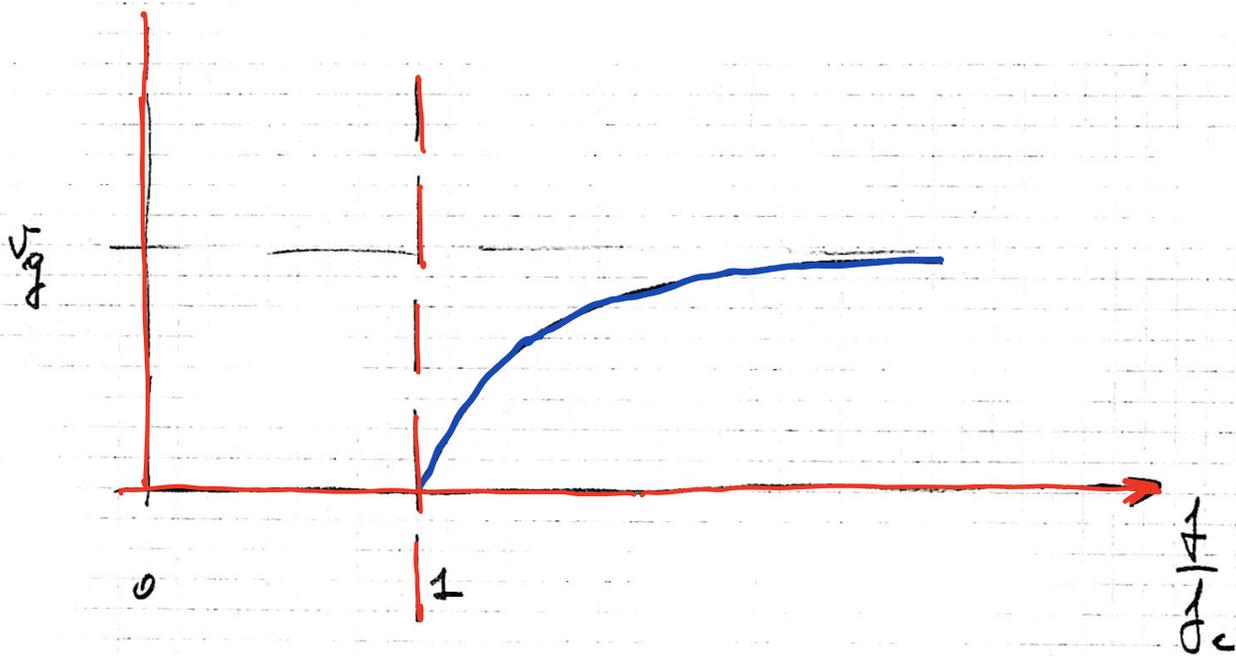
osserviamo che

$$\sqrt{v} \sqrt{v} = v^2$$

60

quindi poiché  $v_f \leq v \rightarrow v_f \geq v$

$$v_f = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



nei TEM  $v_f = v_g$  perché

$v_f$  non dipende da  $f$

si vede anche qui che alle alte  $f$  siamo quasi in un caso TEM



∇ componente di campo magnetico secondo z  $[H_z = 0]$

$$\nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0 \quad \text{non da' informazione}$$

$$\nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0 \quad \text{dove } E_z = E_z(x, y)$$

potremmo che solo per un insieme discreto di  $K_c$   
 ∃ la soluzione

\* Supponiamo dato il continuo di aver trovato  $K_c$  e  $E_z(x, y)$

vediamo come utilizzare le informazioni ottenute

noto  $E_z$  possiamo sostituire in quelle date da Poisson:  
 (non già semplificate per  $H_z = 0$ )

$$E_x = - \frac{\gamma}{K_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$E_y = - \frac{\delta}{K_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_x = - \frac{K^2}{K_c^2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_y = \frac{K^2}{K_c^2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

ora posso ricavare la frequenza.

62

$\gamma$  è dato da

$$\gamma^2 = k_c^2 - k^2$$

↑

trovato

$\frac{E_x}{H_y}$  non dipende da  $x, y$  [una volta fissata la geometria]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_x}{H_y} = -\frac{\gamma}{k^2} j\omega\mu = Z_{TM} \end{array} \right.$$

□

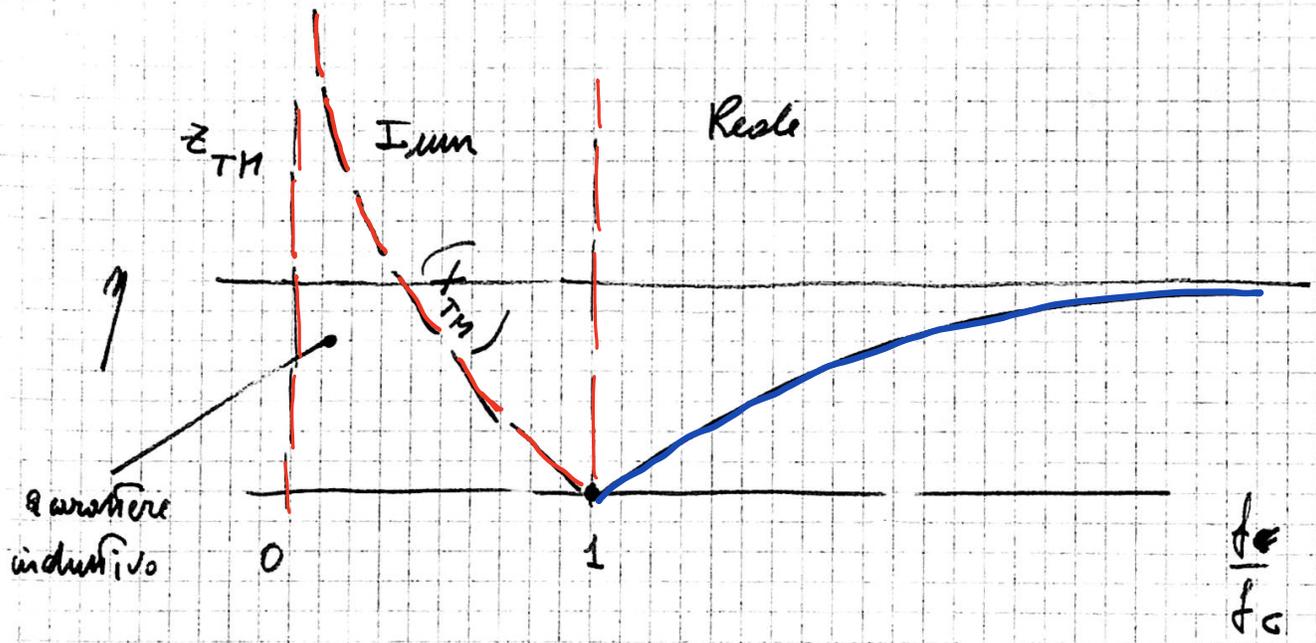
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{k^2} j\omega\mu \end{array} \right.$$

- $Z_{TM}$  è uno dei possibili in quanto è in corrispondenza di un certo  $k_c$  (non è  $Z_{TM}$  che dipende dalle caratteristiche del mezzo)

$$Z_{TM} = -\frac{j k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}{k^2} j\omega\mu = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} \omega\mu =$$

$$= \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



all'infinito tende ad un modo TEM

per  $0 < f < f_c$  c'è attenuazione dovuta a condizioni geometriche - Il generatore immette un'energia e riceve un'energia: il bilancio netto è nullo

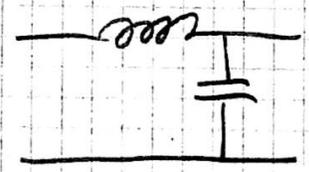
Sopra  $f_c$  la potenza che entra non ritorna e si propaga lungo la guida d'onda -

Per  $f = f_c$  si ha un cortocircuito

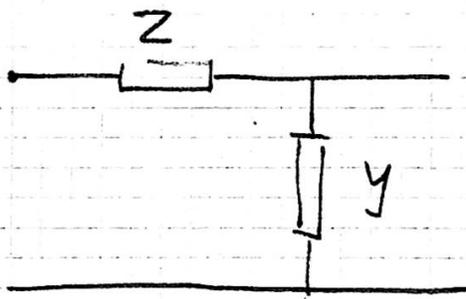
Dalle  $\square$  si scopre che  $H$  e  $E$  totali sono  $\perp$

in propagazione  $H_y$  e  $E_x$  in fase temporale

equivalente del modo TEM



o lo



pono definire  $z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$   $\gamma = \sqrt{ZY}$

rovesciando le due posizioni trovare l'equivalente  
per il modo TM

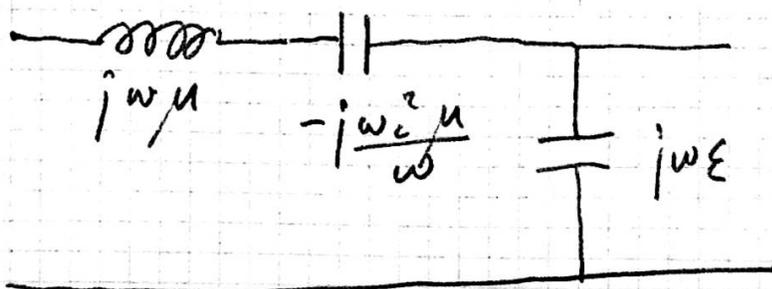
$$Z = z_0 \gamma = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad jK \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

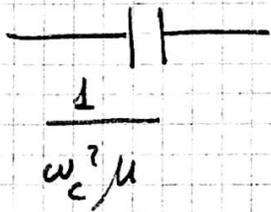
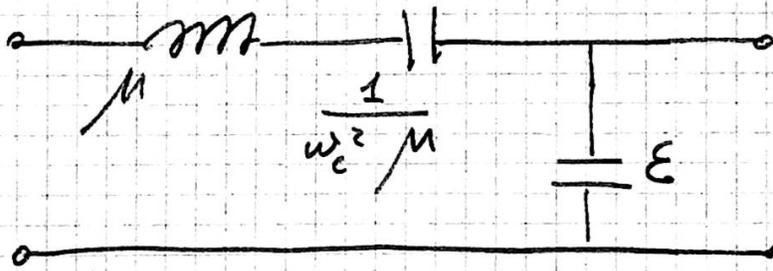
$$Y = \frac{\gamma}{z_0} = jK \sqrt{\quad} / \eta \sqrt{\quad}$$

• quindi  $Y = \frac{jK}{\eta} = j \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} = j\omega \epsilon$

quindi  $Y$  è una capacità (per unità di  
lunghezza)

•  $Z = jK \eta \left[1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right] = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} - j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\omega_c^2}{\omega^2} =$   
 $= j\omega \mu - j \frac{\omega_c^2 \mu}{\omega}$





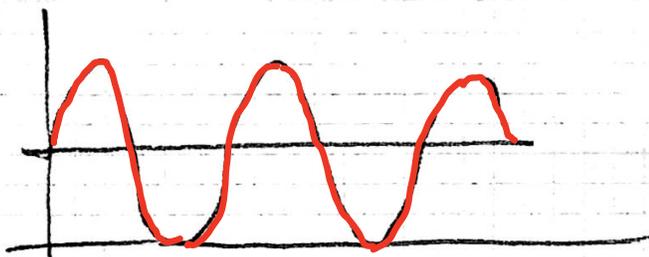
dipende non solo dal mezzo ( $\mu, \epsilon$ )  
 ma anche dalla geometria del  
 sistema :  $\omega_c$

per  $\omega$  grande prevale l'induttore  $\mu$  come  
 reattanza  $\rightarrow$  cadiamo nel caso TEM

## Vettore di Poynting

devo fare il prodotto vettore dei vettori veri.

- Nella direzione di propagazione,  $E$  che è lungo  $z$   
 non dà contributo  $\rightarrow$  prendiamo solo  $E_t$   $H_t$
- $E_t$   $H_t$  sono  $\perp$   $\rightarrow$  basta fare il prodotto  
 inoltre sono temporalmente in fase  $\rightarrow$  tutto è  
 come in un resistore.



quindi  $\frac{E_t H_t}{z}$  è la potenza media

transmittente -

NB localmente Poynting va bene lo stesso

$$\frac{E_x}{H_y} = z_{TM}$$

$$\frac{E_y}{H_x} = -z_{TM}$$

quindi  $\frac{E_t}{H_t} = z_{TM} \rightarrow$

$$\frac{E_t H_t}{z} = \frac{z_{TM} H_t^2}{z} = \frac{E_t^2}{z z_{TM}}$$

$$H_t^2 = H_x^2 + H_y^2 = \left[ -\frac{K^2}{K_c^2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{K^2}{K_c^2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right]^2 =$$

$$= -\left(\frac{K}{K_c}\right)^4 \frac{1}{\omega^2 \mu^2} \left[ \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)^2 \right]$$

modulo di  $\left| \nabla_{xy} E_z \right|^2$

Consideriamo  $E_z \nabla_{xy} E_z$

69

facciamo il flusso su un volume cilindrico con due  
facce distanti  $dz$  / occupano tutto lo  
spazio che ci interessa

col Teorema della divergenza il flusso è  $\frac{\partial E_z}{\partial n}$   $E_z(s) = 0$

$$\int_V \nabla \cdot [E_z \nabla_{xy} E_z] dV = \int_S (E_z \nabla_{xy} E_z) \cdot \vec{n} dS$$

vale la formula  $\nabla \cdot (a \nabla b) = a \nabla \cdot \nabla b + \nabla b \cdot \nabla a$

applicando a

$$\nabla \cdot (a \nabla b) = a \nabla \cdot \nabla b + \nabla b \cdot \nabla a = 0$$

e' proprio  $|\nabla_{xy} E_z|^2$

rimane  $E_z \nabla_{xy}^2 E_z = -K_c^2 E_z^2$

$$E_x = \frac{K^2}{j\omega \epsilon K_c^2} H_{z,y}$$

$$E_y = -\frac{K^2}{j\omega \epsilon K_c^2} H_{z,x}$$

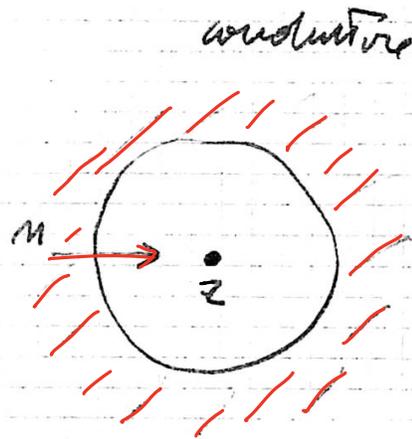
$$\nabla_z^2 = 0$$

$$H_x = -\frac{r}{K_c^2} H_{z,x}$$

$$H_y = -\frac{r}{K_c^2} H_{z,y}$$

$$\nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0 \quad *$$

la condizione al contorno è  $H_{z,r} = 0$



$$\gamma = \alpha + j\beta$$

da \* si trovano 2 soluzioni  $H_z(r,\theta)$  autofunzioni  
 $K_c$  autovalori

$$\gamma = \alpha + j\beta = jK \sqrt{1 - \left(\frac{K_c}{f}\right)^2}$$

$f_c$  frequenza per cui  $K_c = K = 2\pi f_c \sqrt{\epsilon\mu}$

$\rightarrow f_c = \frac{K_c}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}}$

$Z_{TE} = \frac{E_T}{H_T} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}$

$= \frac{K^2}{j\omega\epsilon K_c^2} \sqrt{H_{z,y}^2 + H_{z,x}^2} \cdot \frac{K_c^2}{j} \frac{1}{\sqrt{H_{z,y}^2 + H_{z,x}^2}} =$

$= \frac{K^2}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\epsilon \sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} =$

$= \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}}$

Pensiamo ad una linea ipotesica che sia equivalente al campo

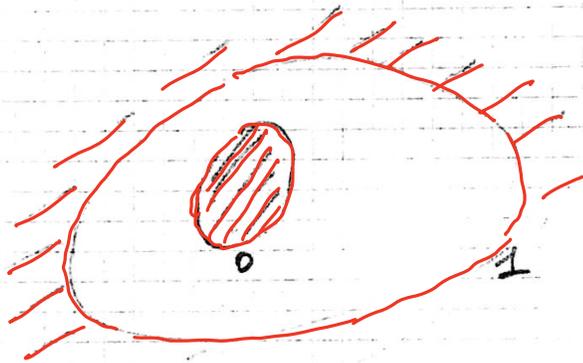
impedenza d'onda (TEM)

" caratteristica

$\eta \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

No una linea curva  $\mu \epsilon$  geometria 70

volto  $R_0$  . . .



TEM

lungo potenziale 1, 0

1)  $\nabla \varphi = 0$

2) capacità  $C = \epsilon \int_{\partial d} \leftarrow$  ottenuto dal calcolo precedente

3)  $\gamma = jK$

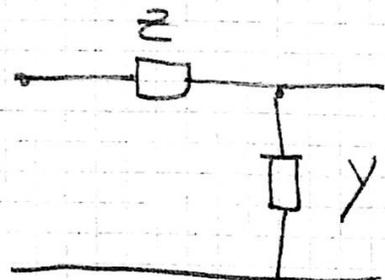
4)  $L = \frac{\epsilon \mu}{c}$

5)  $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Poiché schematizziamo con una linea

ho  $\gamma = \sqrt{ZY}$

$Z_{TE} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$

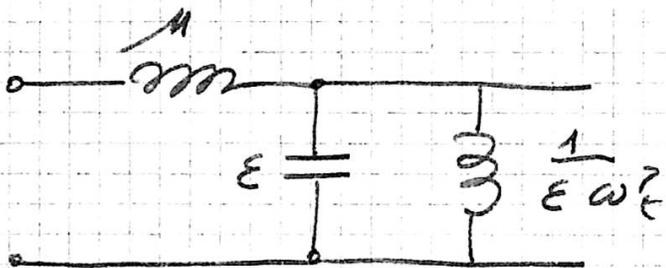


$$Z = j Z_{TE} = j K \eta = j \omega \mu \quad 71$$

$$Y = \frac{Y}{Z_{TE}} = \frac{j K}{\eta} \left[ 1 - \left( \frac{f_c}{f} \right)^2 \right] = j \omega \epsilon \left[ 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right] =$$

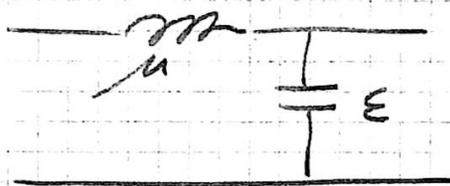
$$= j \omega \epsilon - \frac{j \omega \epsilon \omega_c^2}{\omega^2} = j \omega \epsilon + \frac{\epsilon \omega_c^2}{j \omega}$$

allora la cella elementare è:



nel caso TEM  $f_c = 0 \Rightarrow$

la cella diventa



lungo  $L = \mu \quad C = \epsilon \quad L_c = \frac{1}{\epsilon \omega_c^2}$

per  $f = f_c \rightarrow Z_{TE} \rightarrow \infty$   
 $f \rightarrow 0$

si ha risonanza per  $\epsilon < \frac{1}{\epsilon \omega_c^2}$

$$E_x = \frac{k^2}{j\omega\epsilon k_c^2} \left( -\frac{k_c^2}{\gamma} \right) H_y = - \frac{k^2}{j\omega\epsilon k_c^2} \frac{H_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_c}{f}\right)^2}} =$$

$$= \boxed{Z_{TE} H_y = E_x}$$

analogamente

$$\boxed{E_y = -Z_{TE} H_x}$$

calcoliamo la potenza

oltre  $f_c$

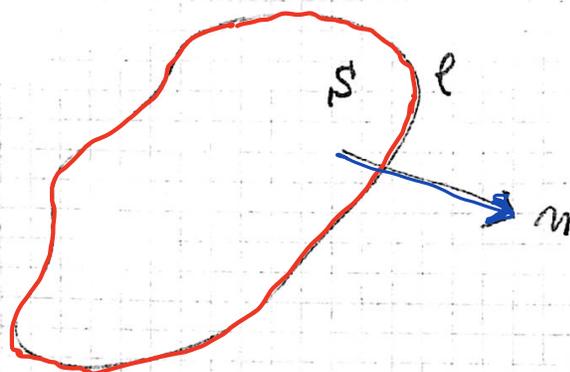
$$Z_{TE} = Z_{TE}^*$$

$$W_T = \int \frac{E_T H_T^*}{Z} dS = \int \frac{E_T E_T^*}{Z Z_{TE}^*} dS =$$

$$= \frac{1}{Z Z_{TE}} \int \left| \frac{k^2}{j\omega k_c^2 \epsilon} \right|^2 (\text{grad}_{xy} H_z)^2 dS \quad *$$

ma  $\int (\text{grad}_{xy} H_z)^2 dS = \int k_c^2 H_z^2 dS$

infatti



$$\square (\text{grad}_{xy} H_z) \times \vec{n} =$$

$$= \left( i \frac{\partial H_z}{\partial x} + j \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \times \vec{n} =$$

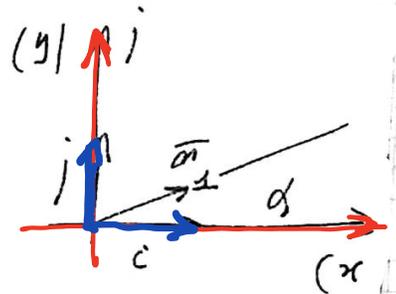
$$= \frac{\partial H_z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial H_z}{\partial y} \sin \alpha$$

ma

$$\frac{\partial H_z(x,y)}{\partial n} = H_{z,x} \cos \alpha + H_{z,y} \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{grad}_{xy} H_z) \times \vec{n} = \underbrace{\frac{\partial H_z}{\partial n}}_{\text{perché è zero}} = 0$$

delle condizioni al contorno.



$$\int \operatorname{div}_{xy} (H_z \operatorname{grad}_{xy} H_z) dS =$$

$$= \int \underbrace{H_z \operatorname{grad}_{xy} H_z}_{\text{" } \frac{dH_z}{dn} = 0 \text{ "}} \times \bar{n} dS ; \quad \square$$

$$= \int (\operatorname{grad}_{xy} H_z)^2 dS + \int H_z \nabla_{xy}^2 H_z dS = 0$$

al posto del laplaciano mettiamo  $-K_c^2 H_z$   
infinitesimo e lo  $\bullet$

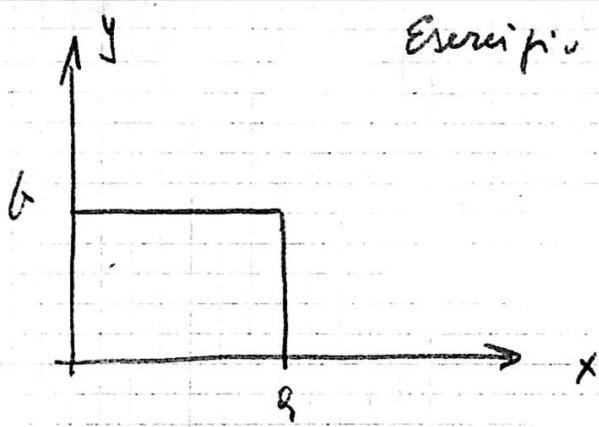
Riprendendo

$$\begin{aligned} * &= \frac{K_c^4 K_c^2}{2 Z_{TE} K_c^4 \omega^2 \epsilon^2} \int H_z^2 dS = \\ &= \frac{K_c^4 \omega^4 \epsilon^2 \mu^2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}{2 \eta K_c^2 \omega^2 \epsilon^2} \int H_z^2 dS = \end{aligned}$$

$$= \frac{\omega^2 \mu^2}{2 \eta K_c^2} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \int H_z^2 dS = W_T$$

Cio' in generale. Studiamo il caso  
di guida rettangolare.

Esercizio in **TM**



$$\nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0$$

$$H_z = 0$$

$E_z = 0$  sul contorno

$$E_z = A(x) B(y)$$

supponiamo

$$A_{,xx} B + A B_{,yy} + K_c^2 AB = 0$$

$$\frac{A_{,xx}}{A} + \frac{B_{,yy}}{B} = -K_c^2 = -(K_x^2 + K_y^2)$$

parte che dipende da x  
" " " " " y

me segue

$$\frac{A_{,xx}}{A} = -K_x^2 \qquad \frac{B_{,yy}}{B} = -K_y^2$$

qui  $A = C_1 \cos K_x x + C_2 \sin K_x x$

il contorno dice

$x=0$  il caso  $E_z = 0$  nullo

$$A(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$x=a$   $A(a) = 0 \Rightarrow K_x \cdot a = m\pi$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

analogaemente

$$K_y b = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

77

quindi:

$$E_z = C \sin K_x x \sin K_y y$$

1<sup>a</sup> uscita

$$K_{c,m,n}^2 = \left( m\pi \frac{1}{a} \right)^2 + \left( n\pi \frac{1}{b} \right)^2$$

2<sup>a</sup> uscita

ma

$$f_c = \frac{K_{c,m,n}}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} \Rightarrow$$

o  $m=0 \quad n=0 \quad f_c = 0$

per nessuno

$$f_{c,m,n} = \frac{K_{c,m,n}}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}}$$

□

• cioè il modo  $m,n$  per  $m=0=n$  ha  $f_c = 0$

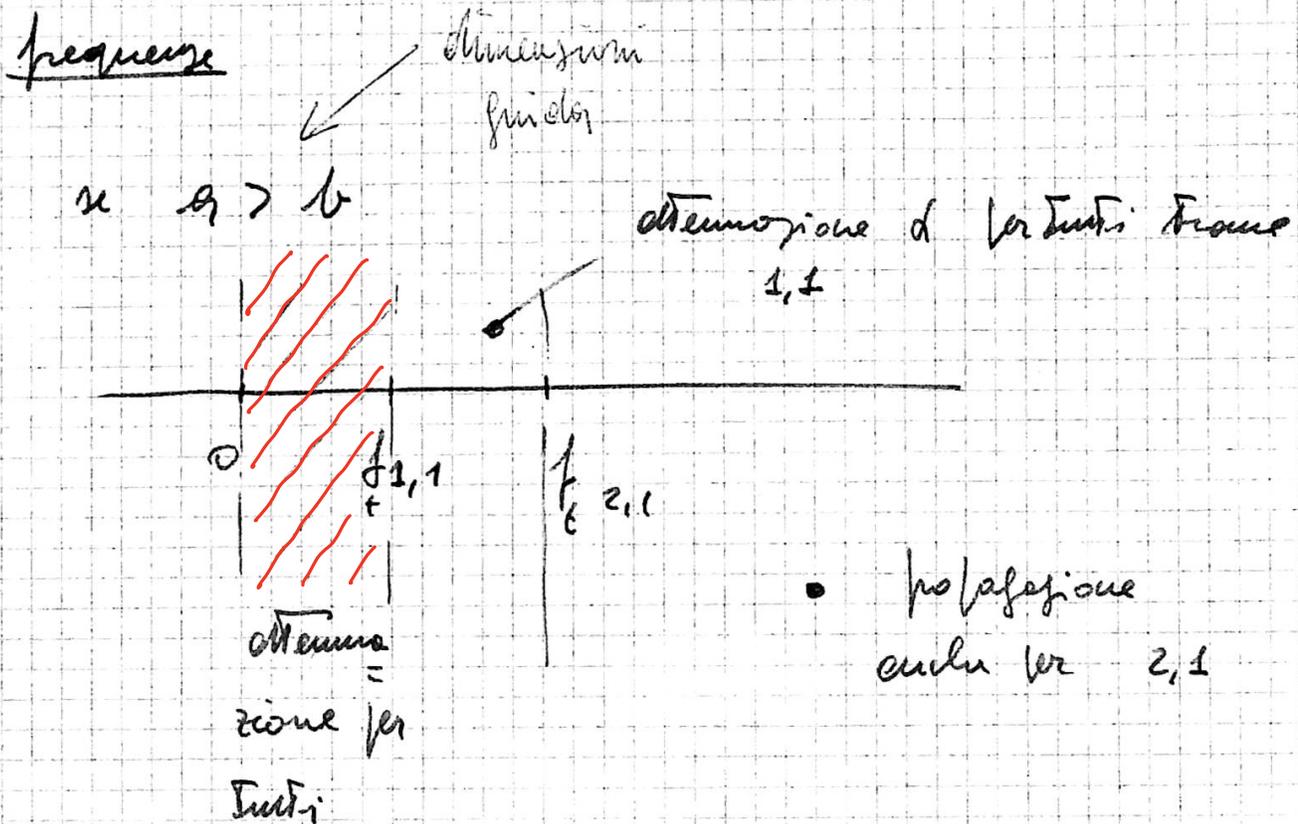
$$\rightarrow E_z = 0 \quad (\text{perché qui } K_x = 0, K_y = 0)$$

per  $m=0 \quad n=0$  il campo  $E_z = 0$

frequenza più minima è  $f_{c,1,1}$

cioè quello del modo più basso

i successi di modi sono  $f_{c_{4,2}}$  e  $f_{c_{2,1}}$  78



Adesso facciamo lo stesso per i TE

$$\nabla_{xy}^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

$$H_z = AB$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Esatto identico fuo alle condizioni al contorno

qui e'  $H_{z,n} = 0$

in verticale

$$A_{1n} (n=0) = 0$$

$$A_{1,x} = -C_1 K_x \sin K_x x + C_2 K_x \cos K_x x;$$

79.

quindi

$$H_z = H_0 \cos K_x x \cos K_y y$$

1° uscitaqui  $K_x$  è uguale (ma è un caso) 2° uscita $f_c$  " " "

□

ma cambiamo il discorso sui modi

$$\text{qui per } m=0 \quad n=0 \quad H_z = \cos x$$

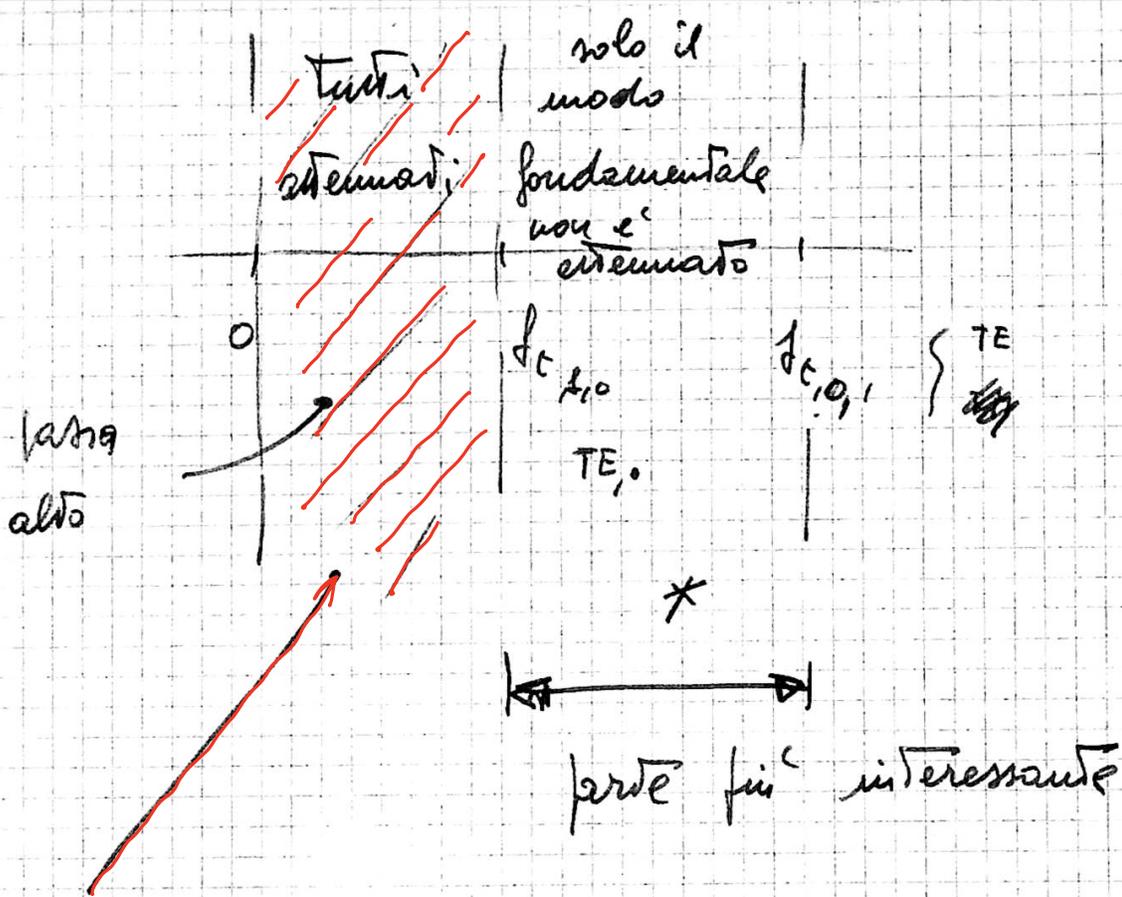
il modo più basso è

$$f_{c,1,0} = \frac{\pi}{g} \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{2g \sqrt{\mu \epsilon}}$$

[ è il più basso  
di quello di  $T\pi$  ]

Domanda: ci può essere TEM ?

noquindi quella vista è la più bassa frequenza  
in gioco:modo fondamentale



NB questa e' attenuazione reciproca (usec va avanti e indietro fino a esaurirsi per le perdite resistive) (tabili)

\* qui invece si limita -

19-5-69

## RADIAZIONE

propagazione non guidata ma nello spazio libero

## Ipotesi

•  $\exists$  oggetti che irradiano

(21)  
81

•  $\exists$  uno spazio come il vuoto  $\mu_0 \epsilon_0$

•  $\nexists$  conduttori in nessun luogo

[si può studiare il caso di un semispazio]

[propagazione nei mezzi ionizzati]

Si usano i potenziali

ricordo

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}$$

dove  $\bar{B} = \nabla \wedge \bar{A}$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

se  $\rho$  non sono solo le cariche associate a  $\bar{J}$   
mi basta considerare solo  $\bar{A}$

Riteniamo assegnate  $\bar{J}$

in forma generale

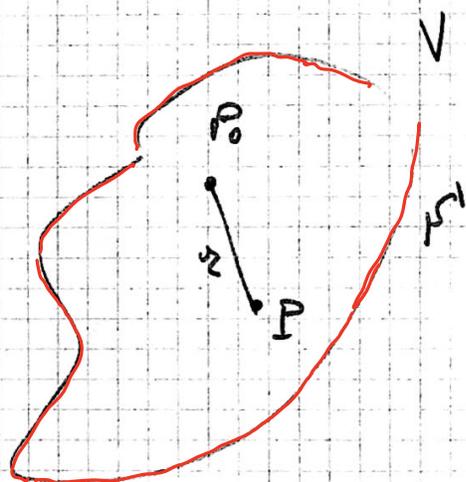
$$\boxed{\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = h} \quad * \quad h \text{ noto}$$

(22)  
82

$f$  funzione  $A_x, A_y, A_z$

$$f = f(P, t), \quad h = h(P, t)$$

Vediamo l'integrale generale di \*



$$e^i \quad 4\pi f(P_0, t) = - \int_V \frac{h(P, t^*)}{r} dV +$$

$$+ \int_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} f(P, t^*) + \left[ \frac{1}{r^2} f(P, t^*) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} f(P, t^*) \right] \frac{\partial n}{\partial r} \right\} dS$$

$$t^* = t - \frac{r}{v} \quad \text{Tempo ritardato}$$

$\frac{r}{v}$  Tempo per andare da  $P$  a  $P_0$

$h$  e' la sorgente di campo  $\implies$  il primo 83  
integrale e'  $\neq 0$  se ci sono sorgenti in  $V$

Il secondo integrale contiene  $\phi$  e derivate  
sul contorno  $S$  quindi il contributo  
dei generatori esterni si riduce  
a sapere  $\phi(P_S, t)$  e  $\phi'(P_S, t) \quad \forall t$

Questo e' in forma esatta il principio di  
Huygens che dice che un'onda e' creata  
da un precedente fronte d'onda (su  $S$ )

NB nel secondo integrale c' e' sempre  $t^*$   
cioe' in  $P_0$  il campo dovuto alla superficie arriva  
dopo  $t^*$

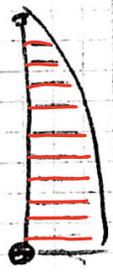
Ma studiamo il caso in cui fuori non c' e'  
nulla che mi interessa

Se  $S$  molto lontana il 2° integrale  
non da contributo se non dopo un  
tempo grandissimo

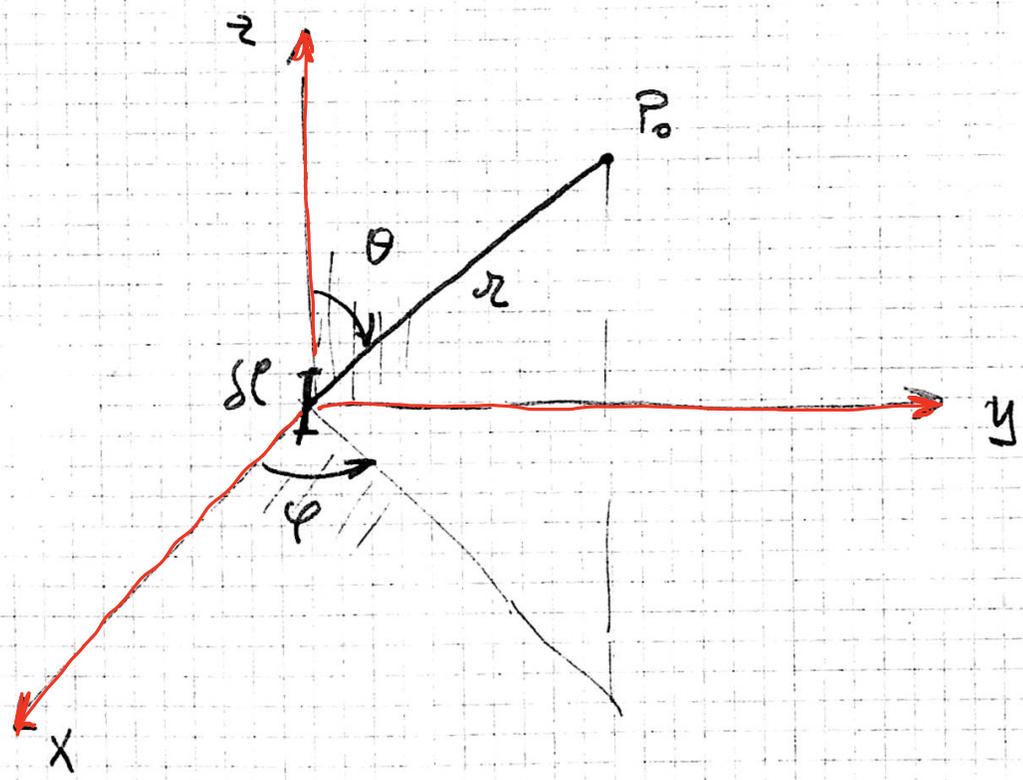
Supponiamo un radiatore di corrente  
~~che~~ piccolo [un'antenna e' una  $\Sigma$  di tanti  $d\ell$ ]

$$d\ell = I \quad \omega$$

la densita' di corrente ionica in un certo modo  
ad es.



perche' l'elemento e' corto supponiamo  $J \cos t$   
in modulo e fase



considero solo 
$$\frac{1}{4\pi} f(P_0, t) = - \int_V \frac{q(P_1, t^*)}{r} dW$$

qui  $J_x = J_y = 0$

quindi  $A_x = A_y = 0$

$A_z = A$

[a rigore e' un  $\delta A$ ]

potrebbe mi  
spiega su  $\delta l, r$   
 $e' \approx \cos$

$$A(P_0, t) = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{-\mu J_z(0, t^*)}{r} dS dl =$$

$$= \frac{\mu dS}{4\pi} \frac{I e^{j\omega t} e^{-j2\pi \frac{r}{\lambda}}}{r}$$

$$I(t) = I e^{j\omega t}$$

$$I(t^*) = I e^{j\omega t - j\omega \frac{r}{v}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$v = \lambda f$$

$$I(t^*) = I e^{j\omega t} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}}$$

non dipende dal  $\rho_0$  in esame =  $d \Rightarrow$

$$A = A_z = d \frac{e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}}}{r}$$

**CALCOLIAMO H**

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \wedge \vec{A}$$

i	j	k
$\frac{d}{dx}$	$\frac{d}{dy}$	$\frac{d}{dz}$
0	0	$A_z$

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$H_z = 0$$

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} =$$

$$\text{ma } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

quindi  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{y}{r} \frac{\partial A}{\partial r}$$

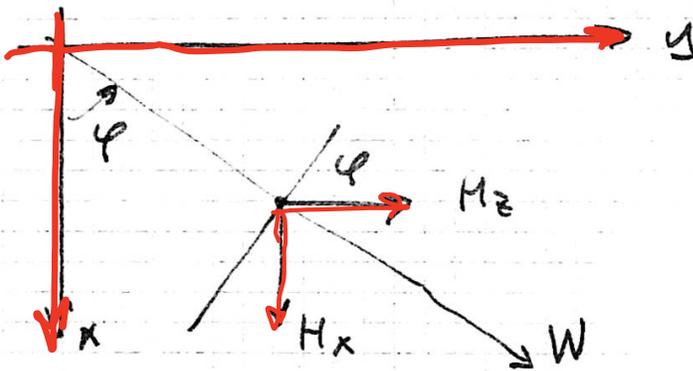
analogamente

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{x}{r} \frac{\partial A}{\partial r}$$

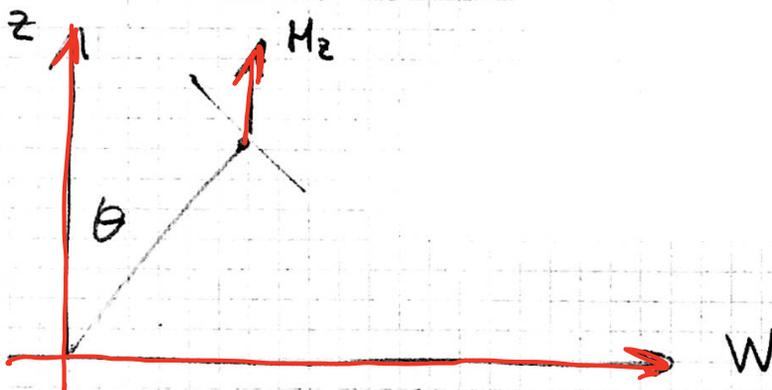
$$\frac{\partial A}{\partial z} = d \frac{-j \frac{2\pi z}{\lambda} e^{-j \frac{2\pi z}{\lambda}} - e^{-j \frac{2\pi z}{\lambda}}}{z^2} = \quad (27) \quad 87$$

$$= d e^{-j \frac{2\pi z}{\lambda}} \left( -j \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{1}{z^2} \right) =$$

$$= \boxed{A \left( -j \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{1}{z} \right) = \frac{\partial A}{\partial z}}$$



$$\boxed{H_\varphi = -H_x \sin \varphi + H_y \cos \varphi}$$



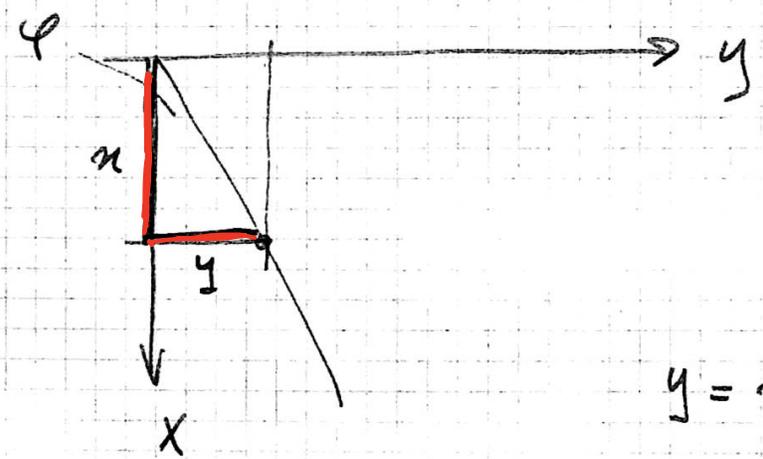
$$\boxed{H_\theta = -H_z \sin \theta + \cos \theta [H_x \cos \varphi + H_y \sin \varphi]}$$

$$H_z = H_z \cos \theta + \sin \theta [H_x \cos \varphi + H_y \sin \varphi]$$

$H_x \propto y$        $H_y \propto x$  con lo stesso costante

dentro la parentesi ho

$$[y \cos \varphi - x \sin \varphi]$$



$$y = x \operatorname{Tg} \varphi$$

$$y \cos \varphi - x \sin \varphi = 0$$

quindi:  $H_\theta = 0$

$$H_z = 0$$

perciò il campo è  $\operatorname{Tg} \varphi$  a circonferenze nei piani  $z = \text{cost}$

$$H_{\varphi} = - \left[ \frac{1}{\mu r} \alpha e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \left( -j \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{1}{r} \right) \right] (y \sin \varphi + x \cos \varphi) \quad (29) 89$$



$$\rightarrow \left\{ y \sin \varphi + x \cos \varphi = r \sin \Theta \right\}$$

$$H_{\varphi} = H = + \frac{1}{\mu r} \alpha e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \left( \frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) \sin \Theta$$

$$d = \frac{I dl \mu e^{i\omega t}}{4\pi}$$

$$H_{\varphi} = H = \frac{I}{4\pi r} e^{j\left[\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right]} \left( \frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) dl \sin \Theta$$

2 casi

$$\boxed{r \ll \lambda}$$

$$r \gg \lambda$$

molto vicino al radiatore

qui si aveva  $j \frac{2\pi}{\lambda}$  e ho' un contributo

uguale a quello del caso stazionario

(a parte e l'...)

Se  $r \ll \lambda$

$$\frac{2\pi r}{\lambda}$$

è piccolo  $\Rightarrow$

(30)

$$w t - \frac{2\pi r}{\lambda} \approx w t$$

e allora abbiamo proprio la H di Laplace

lasciando solo  $\frac{2\pi r}{\lambda}$  abbastanza vicino alla

antenna segue Laplace ma viene corretto dal ritardo dovuto alla propagazione (ritardo di fase)

$$r \gg \lambda$$

il campo a grande distanza è in quadratura temporale con la corrente ritardata  $\frac{1}{2}$  del tempo di propagazione

Vicino al radiatore  $H_{\varphi}$  decresce come  $\frac{1}{r^2}$ , a grandi distanze come  $\frac{1}{r}$

$H_{\varphi}$  non dipende da  $\varphi$

$M_y$  è max nel piano esimondale

(32) 91

Nell'origine è come un campo sferico  
distanze è come un campo cilindrico

**CALCOLIAMO E**

$$\nabla \cdot \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad [\text{diel}]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

~~$$E = \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{1}{r^2} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix}$$~~

$$E_x = \frac{1}{j\omega \epsilon \mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\pi}{r^2} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = B \frac{\partial A}{\partial z}$$

in coordinate sferiche

(32)

$$(\nabla \wedge H)_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial [H_\theta \sin \theta]}{\partial \theta} - \cancel{\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi}} \right]$$

$$H_\theta = 0$$

quindi

$$E_r = \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{1}{r \sin \theta} [2\beta \sin \theta \cos \theta]$$

$$(\nabla \wedge H)_\phi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \cancel{\frac{\partial H_r}{\partial \theta}} \right] = 0$$

$$H_\theta = H_r = 0$$

$$E_\phi = 0$$

$$H_r = 0$$

$$(\nabla \wedge H)_\theta = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} \right]$$

$$\vec{E}_\theta = \frac{-1}{j\omega \epsilon} \frac{1}{r} \left\{ \frac{I}{4\pi} \beta \sin \theta e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \left[ -\frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{2} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \right) \right] \right\}$$

$$E_{\theta} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{I \sin\theta}{4\pi r^2} e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \left[ \frac{2\pi}{r\lambda} + \frac{1}{r^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right]$$

$$E_r = \frac{2\cos\theta}{j\omega\epsilon} \frac{I}{4\pi r^2} e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \left( \frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

$E_r$  decade con  $r^3$  per  $r$  piccolo  
 "  $r^2$  " " grande

ioe decade più rapidamente di  $H_{\phi}$

$E_{\theta}$  e grande distanza va come  $\frac{1}{r}$

infatti  $\frac{2\pi}{r\lambda} + \frac{1}{r^2} \rightarrow 0$

• allora il modo diventa TEM a grande distanza

• A distanza il modo è TM [ $H_r = 0$ ]

$r$  direzione di propagazione

$E_r$  va a zero prima dell'altro

# CALCOLIAMO IL VETTORE di POINTING

94

secondo  $\vec{r}$

è dato da  $H_{\varphi} = E_0$

a piccola distanza  $H_{\varphi}$  ed  $E_0$  sono  
fase quadr.

Temporalmente in quadratura con  $V$  e  $I$

in un bipolo reattivo  $\Rightarrow$  il sistema non  
irradia [ il sistema  $\ll 1$  ] energia  
entra e esce dentro 0.

(  $\uparrow$  infatti quando uno è max l'altro è nullo e viceversa... )

a grande distanza

sono entrambi in quadratura e tutti  
in anticipo

sembrerebbe che vicino non esce energia  
lontano si ;

Il campo vicino alla fonte in quadratura  
e grande  $\int S \, ds = \tau \omega t$ ,

lontano la fonte in fase e grande non è  
determinata  $\int S \, ds = \tau \omega t$

quindi i conti tornano

(35) 95

A grande distanza

prodotti dei moduli:  
verde sono in quadratura  
(doppio potenza media)

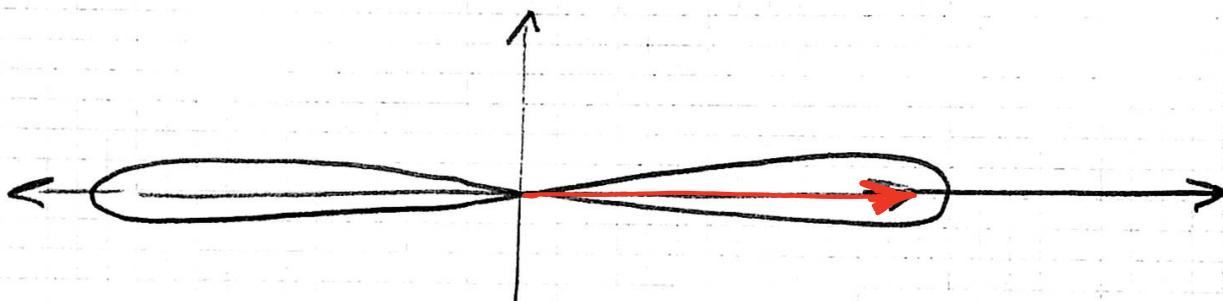
$$P = \frac{1}{\omega \epsilon} \frac{I^2 (SP)^2 \sin^2 \theta}{(4\pi r)^2} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{2\pi}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 \epsilon} (ISP)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2 \lambda^3} = \frac{ISP^2}{4\epsilon \lambda} \frac{\sin^2 \theta}{(2\lambda)^2}$$

$$P = \frac{1}{4} (ISP)^2 \frac{\sin^2 \theta}{(2\lambda)^2}$$

da' la distribuzione

graficando  $P$  a  $2\cos \theta$  ho



si vede che le antenne irradiano in pratica  
solo nel piano equatoriale

TE<sub>10</sub>

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$E_x = 0$$

$$E_z = 0$$

$$E_y = \frac{k^2}{j\omega\epsilon k_c^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$H_y = 0$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$E_y = -j \left( \frac{f}{f_c} \right)^2 \frac{H_0 \pi}{\omega\epsilon a} \sin \frac{\pi x}{a} =$$

$$= -j \frac{f}{f_c} \frac{H_0 \pi}{2a\epsilon a f_c} \sin \frac{\pi x}{a} =$$

$$\text{vale } \begin{cases} \lambda_c = 2a \\ \lambda_c f_c = v \end{cases}$$

$$\rightarrow 2a f_c = v$$

$$= -j \frac{f}{f_c} \frac{H_0}{\sqrt{\epsilon}} \sin \frac{\pi x}{a} = -j \frac{f}{f_c} \eta H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \quad 97$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{TE}}$$

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

$$H_x = +j \frac{f}{f_c} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

ma  ~~$\frac{f}{f_c} = \frac{1}{2a}$~~  quindi

$$H_x = +j \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

Se vogliamo che il vettore di Poynting vada  
verso  $z +$  e cambiamo i segni (per  $H_x$ )

vediamo di riportarci nel tempo

sempre avendo eliminato  $e^{-\gamma z} e^{i\omega t}$

inoltre si prende la parte Re

$$\text{ad es } H_z(x, y, z, t) = \text{Re} \left( H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-\gamma z} e^{i\omega t} \right) =$$

$$= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \text{Re} e^{j(\omega t - \beta z)} = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{f}{f_c} \right) \eta H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j \frac{\pi}{2}} e^{j \omega t - j \beta z} \right] = \quad 98$$

$$= \left( \frac{f}{f_c} \right) \eta H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin (\omega t - \beta z) = E_y$$

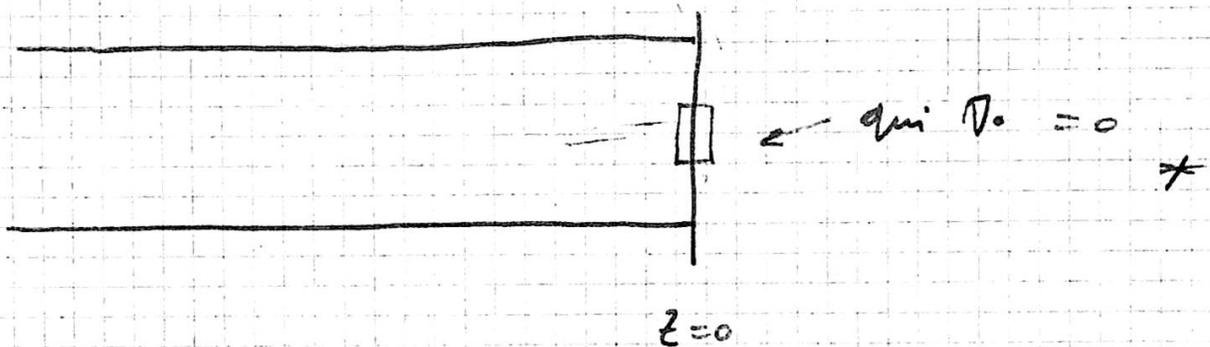
$$H_x = - \sqrt{\left( \frac{f}{f_c} \right)^2 - 1} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin (\omega t - \beta z)$$

si trova in guide rettangolari  
e ad alte frequenze -

### Cavità

guide rett.

chiusa



ci sarà anche la riflessione

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-\gamma z} + H'_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{\gamma z}$$

con la \*  $H_z(z=0) = 0$

quindi  $H_0 = -H_0'$

99

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \left( e^{-j\beta z} - e^{j\beta z} \right) = \\ &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \left( -j \sin \beta z - j \sin \beta z \right) = \\ &= -2j H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \beta z \end{aligned}$$

è analoga alla  $H_z$  del  $TE_{10}$

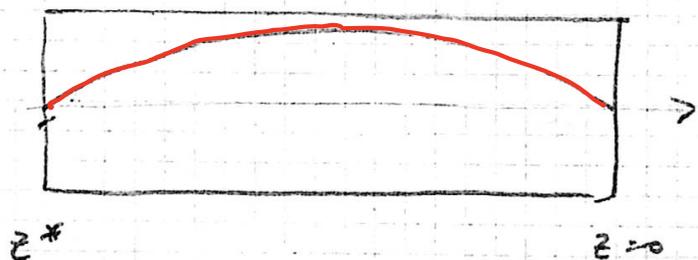
ritorniamo nel tempo

$$H_z = -2H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \beta z \sin \omega t$$

è del "tipo" onda stazionaria

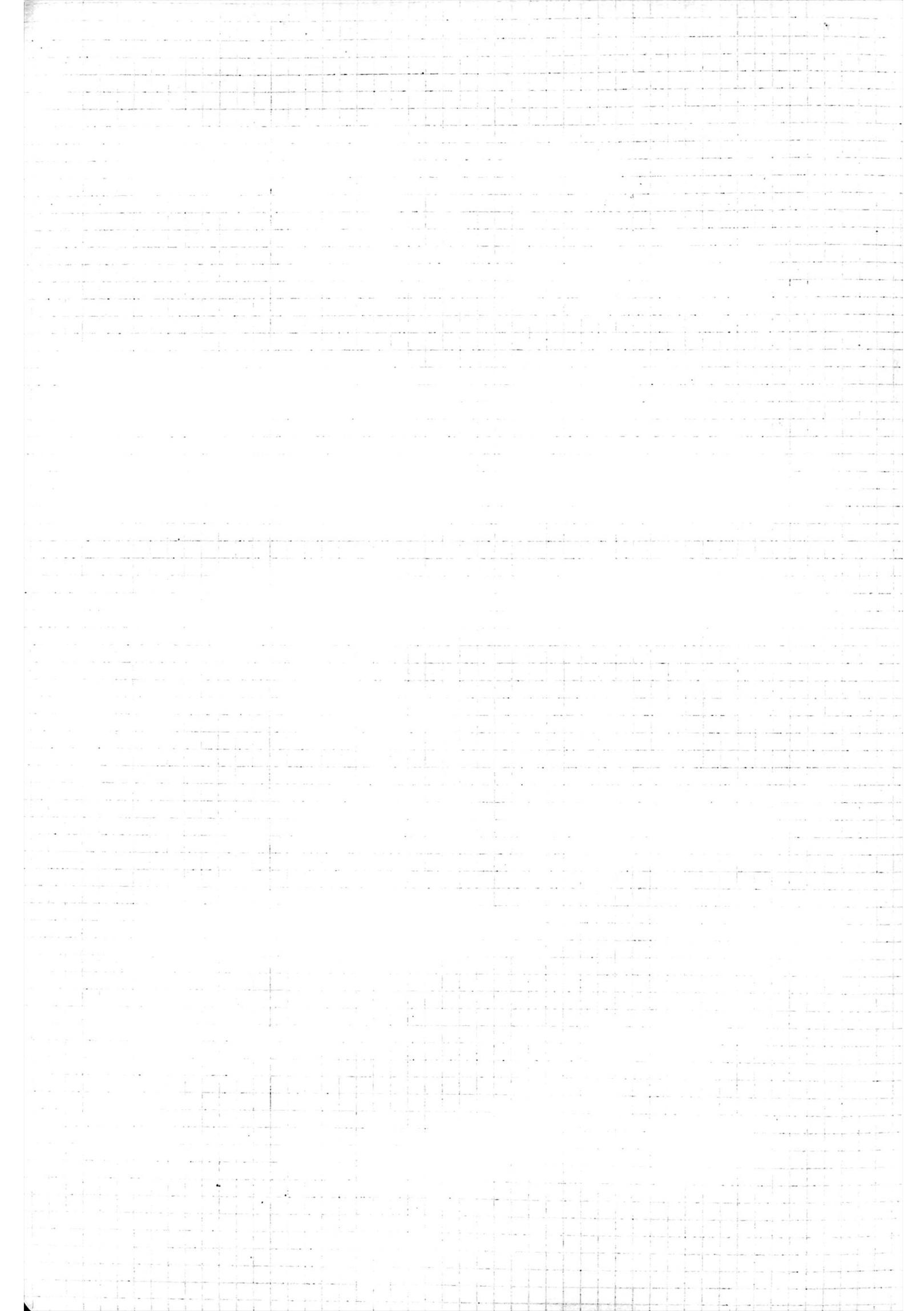
$$\beta z^* = k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

che succede se mettiamo una parete in  
un  $z^*$  tutto rimane identico



$TE_{10,1}$

perché abbiamo il 1° modo



Prendiamo un parallelepipedo e applichiamo  
Maxwell -

100

$$\nabla^2 A + K_c^2 A = 0$$

facciamo una separazione di var. in 3 dimensioni

$$0 = \frac{d^2 A(x)}{dx^2} + K_x^2 A(x)$$

$$A = A(x) A(y) A(z)$$

ciascuna determinata da  $\uparrow$

Trovati gli autovalori  $K$  non possiamo trovare  
delle frequenze caratteristiche dello nostro cavità

$$K_c^2 = K_x^2 + K_y^2$$

più

qui invece

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$$

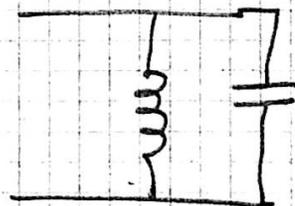
$$K^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

si ha una triplice infinita di frequenze

qui non  $\exists$  più una coordinata privilegiata

è l'analogo esatto alle altre frequenze di

un LC per esempio



Abbiamo definito un risonatore

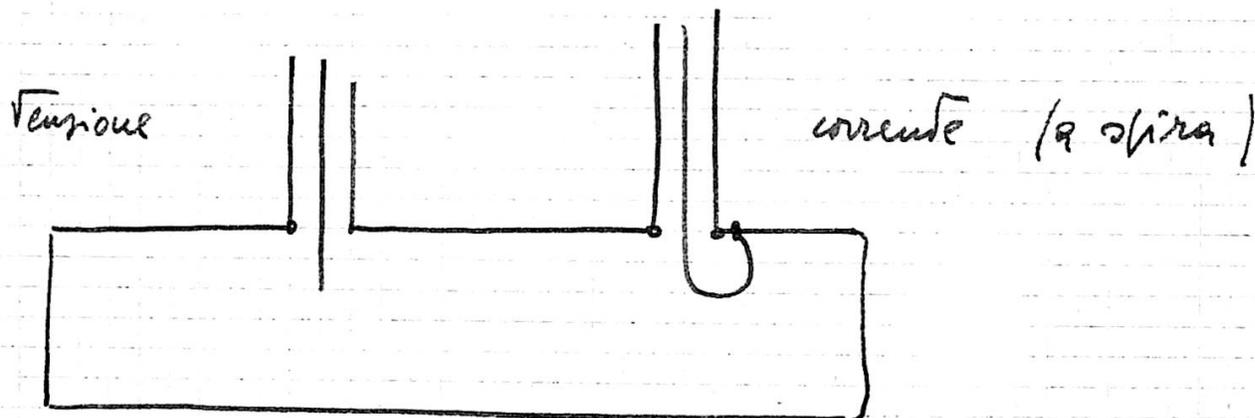
101

Trovare  $f^*$  è facile

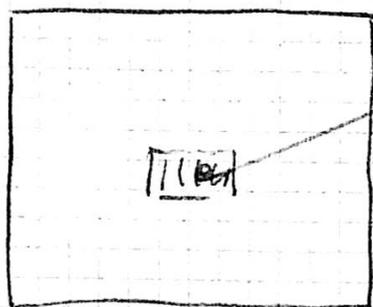
difficile è trovare il circuito equivalente

più difficile sistemi di collegamento fra le guide e  
le cavità e l'esterno

Excitazioni : in tensione , in corrente



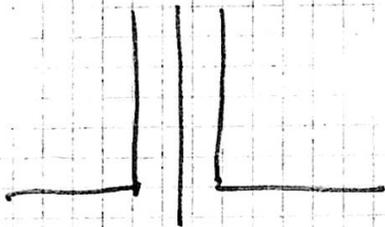
Si tratta di trovare un campo che soddisfi  
le condizioni al contorno ma che in un po  
non soddisfa -



qui il campo è disturbato  
→ mi provo offrendo  
condizioni su

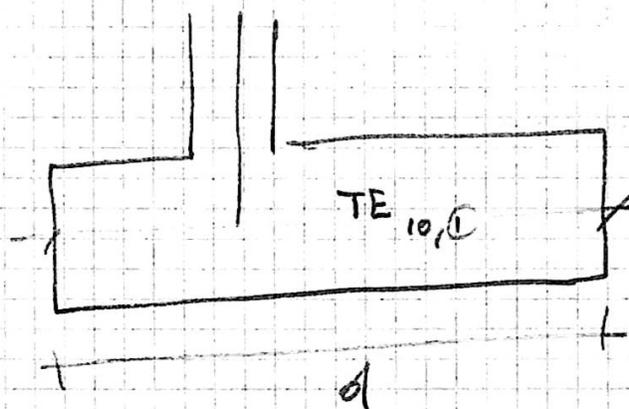
$$c_1 A(x) \quad c_2 A(y) \quad c_3 A(z)$$

Con un cavo coassiale supporta due modi un TEM



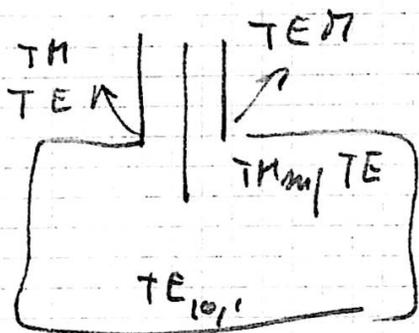
sull. di onde vicini ad una frequenza della  
cavità : sarà eccitato quel modo che ha quella  
particolare frequenza -

Siamo in presenza di una Tipica discontinuità

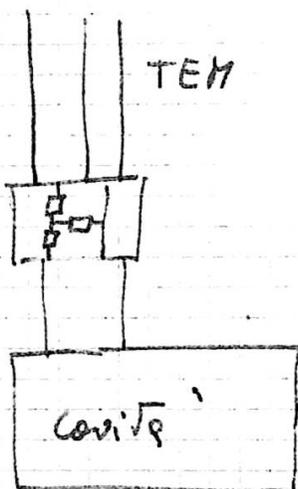


$$\beta d = \pi$$

nascono modi superiori perché le condizioni  
al contorno dei due modi (del cavo e della cavità)  
non sono funzionali



Si pensa come ad un doppio bipolo interfacciato.



- ) interesse per l'adattamento (questo doppio bipolo a due n.c. è adattamento)
- ) problema frequenza risonanza dal pto di vista del percorso di segnale da una cavità.  
Per es. si può usare la cavità come filtro

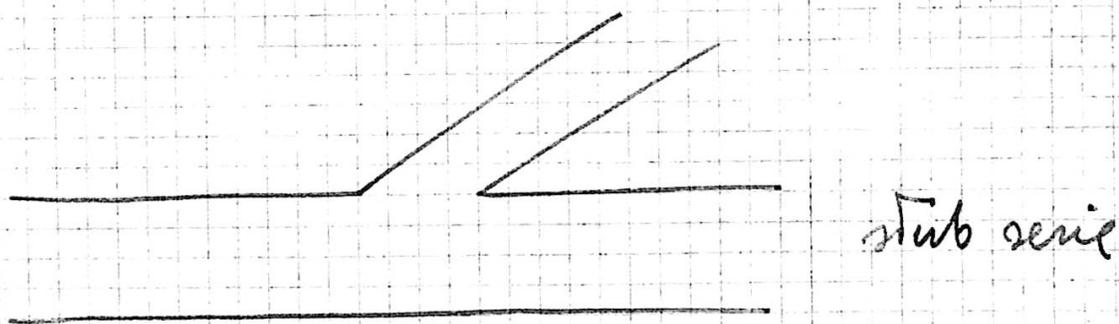
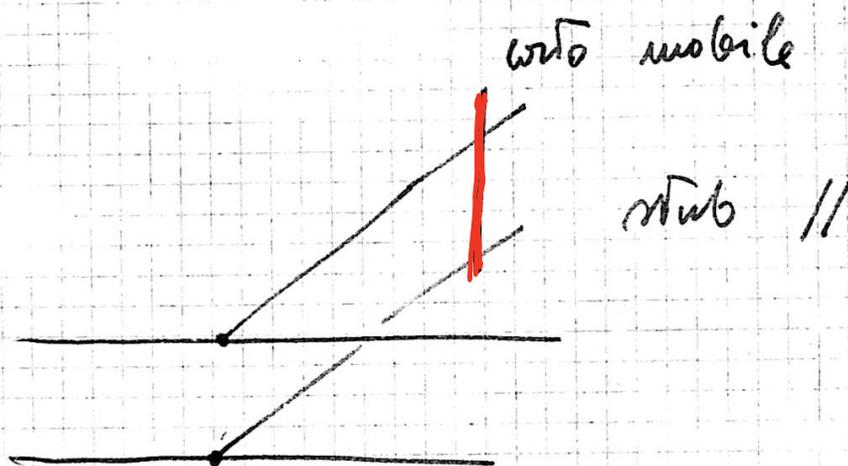
$$Q = \frac{\text{pulsazione risonanza} \times \text{energia max immagazzinata}}{\text{potenza media dissipata}}$$

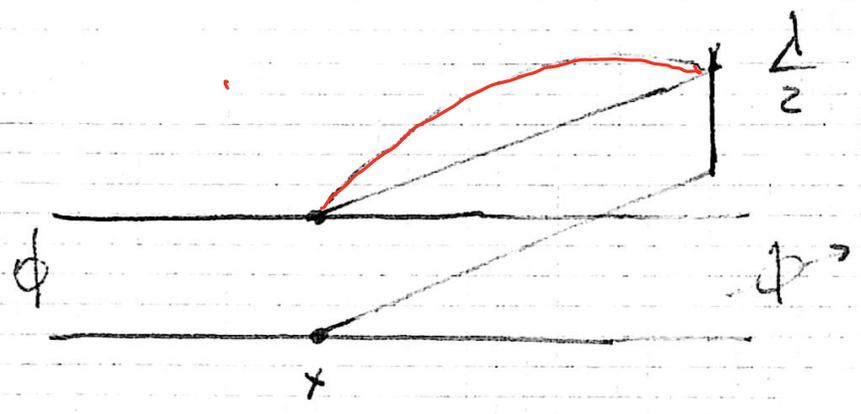
calcolo di  $q$  in un caso particolare

104



$$\frac{\omega_0 \frac{1}{2} C V_m^2}{\left( \frac{V_m}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{R}} = \omega_0 C R = \frac{R}{\omega_0 L}$$

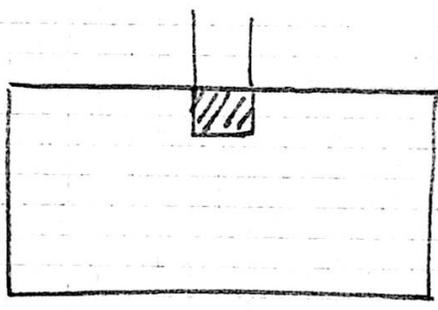




in questo caso in  $x$  non c'è perturbazione

Perturbazioni cavità

cerchiamo un  $\psi_0$  dove  $E_0$  max e li mettiamo in cavitazione (vite)



energia  
↓  
camp max

c'è una diminuzione di

$$\Delta U_E \propto E^2 \Delta V_0$$

volume vite

la vite serve per accordare  
trimmer

$$\Delta U_H = \frac{\partial U_H}{\partial f} \Delta f$$

la frequenza di scordo è quella stessa

$$V_E = V_H$$

106