

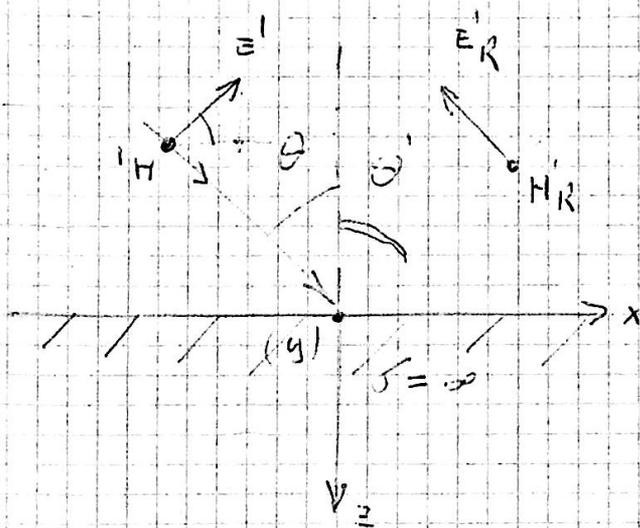
1969 – appunti di

Campi elettromagnetici 3

*velocità di fase – modi TEM, TM, TE –
linea RLC – ROS – riflessione –
impedenza – cavo coassiale –
velocità di gruppo – frequenza critica*

14-4-68

(2)



onde piane
normali

Il conto lo possiamo fare solo con l'aiuto delle condizioni al contorno

valore $\frac{dV}{dz} = 0$

$$E' \cos \theta - E'R \cos \theta' = 0$$

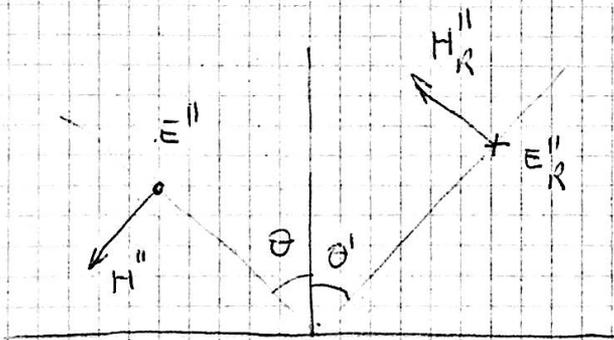
valida per $z = 0$

$$E' \sin \theta + E'R \sin \theta' = \frac{\int_{\Sigma} \epsilon}{\epsilon} \leftarrow \text{densità cariche superficiali}$$

$$H' + H'R = \frac{E'}{\eta} - \frac{E'R}{\eta} = \eta \int_{\Sigma} \text{impedenza caratteristica}$$

$$= \int_{\Sigma} \text{corrente superficiale}$$

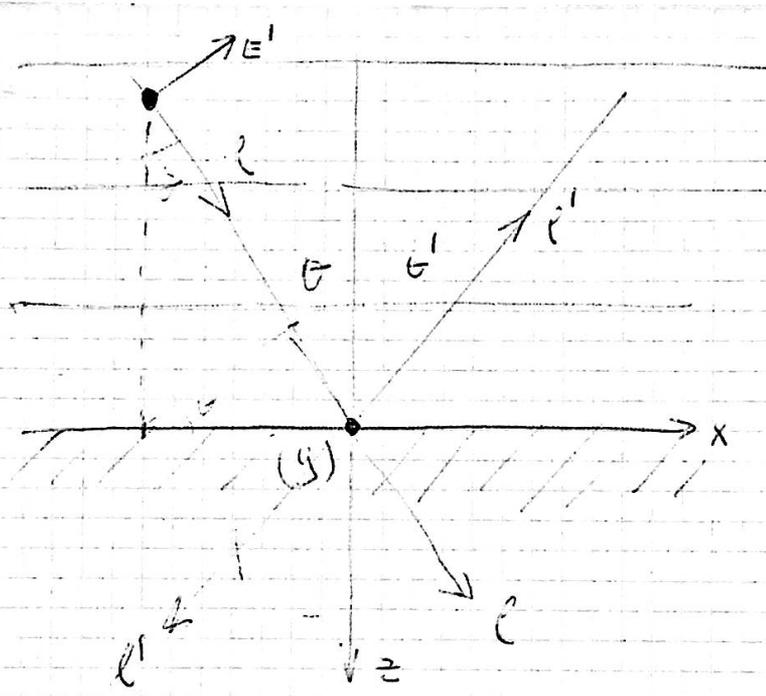
Si può pensare ad un altro caso



$$E'' - E''_R = 0$$

$$E'' \cos \theta + E''_R \cos \theta' = \eta \int_{\Sigma}''$$

$$E'' \sin \theta - E''_R \sin \theta' = 0$$



(2)

In un dielettrico

$$k = \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

Possiamo scrivere il campo come
(metodo simbolico)

$$E^i e^{-j\beta z} + E^r e^{j\beta z} *$$

quanto vale β in relazione a z e x ?

$$\beta = x \sin \theta + z \cos \theta < 0$$

quindi x il campo lo scriviamo * vale bene

$$\beta = -x \sin \theta + z \cos \theta$$

Per intero

~~$$E^i \cos \theta e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} = E_R \cos \theta e^{-j\beta(-x \sin \theta + z \cos \theta)}$$~~

$$\text{non } E_x = 0 \text{ in } z = 0 \rightarrow$$

(perché e^z una superficie conduttrice)

bilanci lungo l'asse x

questa equazione deve essere soddisfatta $\forall \omega$,
 ciò implica che $\theta = \theta'$ e sostituendo nei
 moduli $E' = E'_R$; a tempo tutto lo

$$E_x(\omega) = E' \cos \theta e^{-j\beta(\pi \sin \theta + z \cos \theta)} + E' \cos \theta e^{j\beta(\pi \sin \theta + z \cos \theta)}$$

dividiamo

$$E' \cos \theta e^{-j\beta \pi \sin \theta} \left(e^{-j\beta z \cos \theta} + e^{j\beta z \cos \theta} \right)$$

||

$$-2j \sin(\beta z \cos \theta)$$

quindi

$$E' \cos \theta (-2j \sin(\beta z \cos \theta)) e^{-j\beta \pi \sin \theta}$$

Se vogliamo l'espressione nel tempo moltiplichiamo per $e^{j\omega t}$
 e prendo Re (ricorda che E' è un valore)

$$E_x = +2E' \cos \theta \sin(\beta z \cos \theta) \sin(\omega t - \beta \pi \sin \theta + \varphi_1)$$

$$\Rightarrow z / \forall \theta \neq \forall \pi \quad E_\pi = 0 ?$$

$$\text{mi} \quad \sin(\beta z \cos \theta) = 0 \rightarrow \beta z \cos \theta = k\pi$$

(k = 0, 1, 2, ...)

$$1) \quad \beta z \cos \theta = k \pi$$

(4)

la prima distanza è $d = \frac{\pi}{\beta \cos \theta}$

2) Def. velocità di fase del campo a lungo $\rho = z$

analizziamo $\sin(\omega t - \beta z \cos \theta + \varphi_0)$

definiamo velocità di fase $v_f = \frac{\omega}{\beta \cos \theta} = \frac{c}{\beta \cos \theta}$

nel caso di onde piane

$$v_f = \frac{c}{\beta}$$

qui la velocità è sempre superiore alla velocità della luce in quel mezzo

$$d = \frac{\pi}{\omega \beta \cos \theta} \quad \text{con } \beta = d f \rightarrow d = \frac{d}{z \cos \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{d}{z d}$$

continuando nella definizione

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{z d}\right)^2}}$$

quindi $\sqrt{f} = \sqrt{f} (f)$

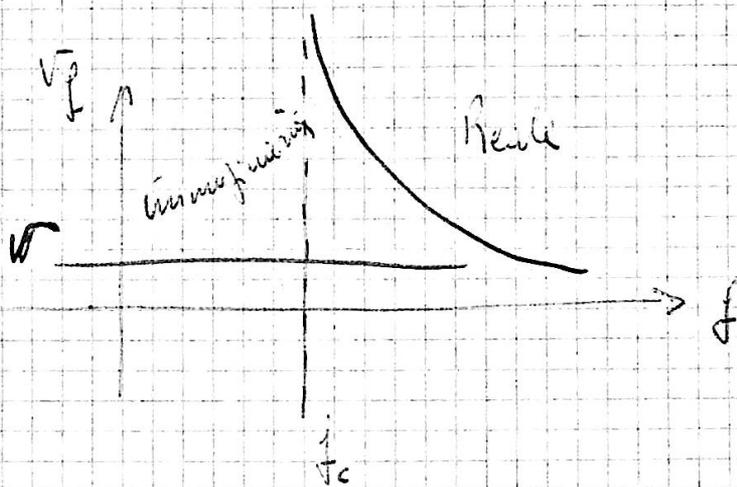
(5)

o $\lambda_c = \frac{z}{f_c} \rightarrow \frac{v}{f_c}$

$\Gamma = \frac{z}{f_c} \lambda_c \rightarrow \frac{z}{f_c} = \frac{v}{z \lambda_c}$

perciò $f < f_c \rightarrow \lambda > \lambda_c$

se qui sostituiamo in Γ abbiamo un n° immaginario



la costante di propagazione e anche una proprietà del mezzo -
 per i casi comuni sono:

$$E_z = -2E' \sin \theta \cos(\beta z \cos \theta) \cos(\omega t - \beta x \sin \theta + \varphi')$$

$$H_y = 2 \frac{E'}{\eta} \cos(\beta z \cos \theta) \cos(\omega t - \beta x \sin \theta + \varphi')$$

con η costante della seconda figura

$$E_y = 2E'' \sin(\beta z \cos \theta) \sin(\omega t - \beta x \sin \theta)$$

$$H_x = -2 \frac{E''}{\eta} \cos \theta \cos(\beta z \cos \theta) \cos(\omega t - \beta x \sin \theta)$$

$$H_z = 2 \sin \theta E'' \frac{1}{\eta} \cos(\beta z \cos \theta) \sin(\omega t - \beta x \sin \theta)$$

Consideriamo

divergenza di Maxwell

(6)

$$\nabla^2 \bar{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}$$

\bar{A} vettore generico

1) Trasformazione di $\bar{A}(x, y, z, t)$ in seno

$$\bar{A}(x, y, z) \quad \left(\text{Fourier, metodo simbolico} \dots \right)$$

l'equazione diventa

$$\nabla^2 \bar{A} = \left[\frac{j\omega}{v} \right]^2 \bar{A} \quad \text{in cui} \quad \nabla^2 \bar{A} + K^2 \bar{A} = 0$$

$$K = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

2) Consideriamo un sistema di propagazione
cilindrico: uno dei tre assi è la direzione
 di propagazione (di solito z) [in linea x]

Allora nella \odot si può fare una separazione di
 variabili:

• dire cilindrico significa avere $f_1(xy) f_2(z)$ moltiplicando in \odot si

ha $\bar{A}(xy, z) = \bar{A}(xy) e^{-j\gamma z}$ dove γ viene

da cui

$$\nabla_{xy}^2 \bar{A} + (K^2 + \gamma^2) \bar{A} = 0$$

\leftarrow è dovuto al ∇^2 ancora noto
 non alle derivate z^2 , infatti si
 è nullo ∇_{xy}^2 e non ∇_{xy}^2 ; ∇_z^2 è finito
 come abbiamo

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

però solo per xy

(nelle onde piane $\gamma = j\kappa = j\beta$)

(7)

qui è molto più generale -

di solito si pone $K_c^2 = K^2 + \gamma^2$

3) Possiamo ridurre le equazioni di Maxwell con queste semplificazioni - con queste riduzioni le componenti in funzione delle altre due e quindi sono

$$A_z \{ E_z, H_z \}$$

sono strettamente legate le altre componenti

non scrivere cioè

$$\nabla_{xy}^2 \ddot{A}_z + K_c^2 \ddot{A}_z = 0$$

Distinguiamo TEM

$$\begin{cases} E_z = 0 \\ H_z = 0 \end{cases}$$

e di

TM

$$\begin{cases} H_z = 0 \end{cases}$$

o di

TE

$$\begin{cases} E_z = 0 \end{cases}$$

Per ogni modo modo sono $a_m(x, y, z, t)$

per

$$\bar{A}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x, y, z, t)$$

16-4-68

Premetto alcune formule

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = j\omega \epsilon E_z$$

per il dielettrico

$$1) H_{z,y} + \gamma H_y = j\omega \epsilon E_x$$

campo cilindrico

$$2) -H_{z,x} - \gamma H_x = j\omega \epsilon E_y$$

$$3) H_{y,x} - H_{x,y} = j\omega \epsilon E_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}$$

$$4) E_{z,y} + \gamma E_y = -j\omega \mu H_x$$

$$5) -E_{z,x} - \gamma E_x = -j\omega \mu H_y$$

$$6) E_{y,x} - E_{x,y} = -j\omega \mu H_z$$

$$7) E_x = \frac{k^2}{k_c^2} \left[\frac{1}{j\omega \epsilon} H_{z,y} - \frac{\gamma}{k^2} E_{z,x} \right]$$

si ricavano dalle precedenti

$$8) H_x = \frac{k^2}{k_c^2} \left[-\frac{1}{j\omega \mu} E_{z,y} - \frac{\gamma}{k^2} H_{z,x} \right]$$

Se voglio ricavare E_x eliminando H_y tra 4) e 1)

$$9) E_y = \frac{k^2}{k_c^2} \left[-\frac{1}{j\omega \epsilon} H_{z,x} - \frac{\gamma}{k^2} E_{z,y} \right]$$

$$10) H_y = \frac{k^2}{k_c^2} \left[\frac{1}{j\omega \mu} E_{z,x} - \frac{\gamma}{k^2} H_{z,y} \right]$$

ho le componenti E_x E_y H_x H_y in funzione di H_z E_z

Campi TEM

ho allora $E_z = 0$ $H_z = 0$

dalle ultime 4 equazioni in parentesi $[\] = 0$

9

una possibilità di avere $E_x \neq 0$ e' che sia $k_c^2 = 0$

ovvero infatti la indeterminazione $\frac{0}{0}$

allora ho (per avere campo)

$$k_c^2 = 0 \quad \gamma^2 + k^2 = 0$$

cioe'

$$\gamma = jk$$

cost. di propagazione

con Maxwellle $[\text{la } 2) \text{ e la } 3)]$

ho

$$2) -jH_x = j\omega \epsilon E_y$$

$$3) -jE_x = -j\omega \mu H_y$$

ostituendo il γ trovato ho

$$-jk H_x = j\omega \epsilon E_y$$

cioe' poiche' $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ ho

$$E_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_x = -\eta H_x$$

e con analoghi passaggi l'altra e':

$$E_x = \eta H_y \quad \text{cioe' le equazioni delle onde piane}$$

Come possiamo trovare E_x H_x E_y H_y ... ?

$$\text{lo facciamo con } \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

in cui ho $k_c^2 = 0$

allora

$$\nabla_{xy}^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla_{xy}^2 \vec{H} = 0$$

mi compi meteo con diel

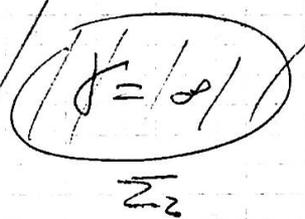
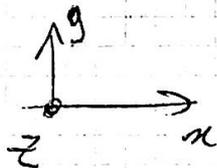
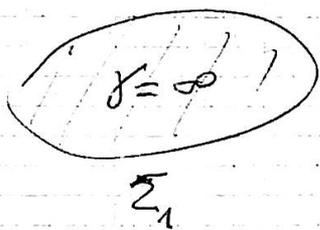
$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = 0$$

ho eq. simili a quelle dei campi statici

$$\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E})}_{=0} = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E})}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{E} = 0$$

Considero 2 conduttori (condensatore a vuoto) (condensatore a vuoto)



finisce le eq. ^{mi} nella zona dielettrica imponendo le condizioni al contorno -

So che sui Σ_1 e Σ_2 ho $E_t = 0$

Questo non basta ancora perché ho ancora una costante moltiplicativa arbitraria. Infatti se la distribuzione di E soddisfa anche $\nabla \cdot E$ soddisfa.

Bisogna allora considerare la carica su un conduttore, questo per trovare E -

Bisogna allora anche l'equazione -

$$\int E_n d\Sigma = \pm \frac{Q}{\epsilon} \quad *$$

$$A_E = \frac{E_n}{\eta} \quad \leftarrow \text{verso}$$

quindi in modulo

Considero il vettore ausiliario

$$\vec{A} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{C}}{\eta} \quad \leftarrow \text{verso di } \vec{C}$$

$$A_E = \frac{E_n}{\eta}$$

stesso quello di fondo pagina

E ha div e rot nulli nel dielettrico

allora nel calcolo vettoriale ho

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

$$\text{rot } \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0$$

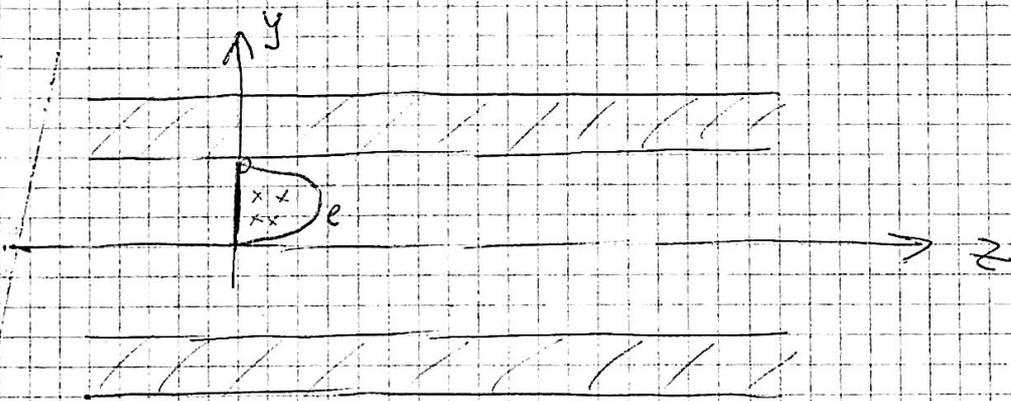
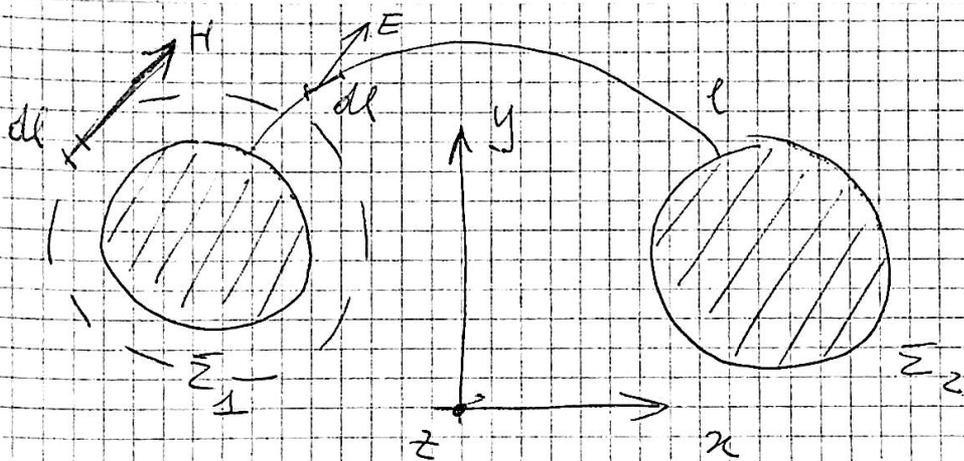
$$A_n = 0$$

da $E_t = 0$

a questo si può arrivare solo pensando che $\vec{A} = -\vec{E}$ e applicando il teorema di Gauss

e l'altra condizione è

$$\int A_E d\Sigma = \mp \frac{Q}{\epsilon \eta} \quad *$$



Integro E da 1 a 2 lungo ℓ

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{non dipende dal percorso}$$

perché z sia costante

NB E ha circolazione nulla sul piano xy
 cioè non è la linea in la un piano ad
 un altro. Se percorso una linea e si vede che
 allora campo magnetico è tutto cambia -

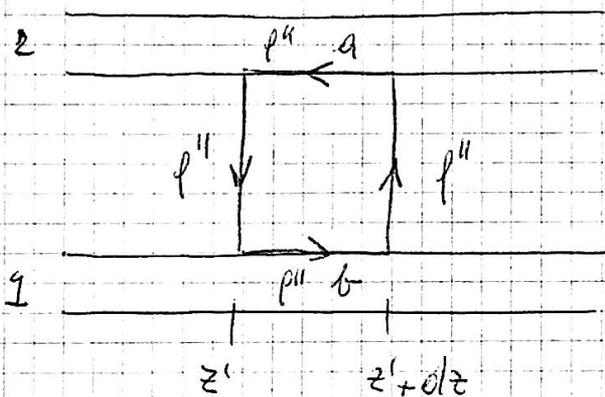
Analogamente si può definire la corrente -

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

In descrizione del sistema non dipende da ω perché

$$K_c^2 = K^2 + \gamma^2 = 0$$

ricorriamo le equazioni della linea



$$V(z) = \int_z^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(z+dz) = \int_{z+dz}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(z+dz) - V(z) = \int_{z+dz}^z \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{ovv}$$

$\perp \& \perp$
 ϕ''

$$dV = \frac{\partial V}{\partial z} dz + V(z) - V(z) = dV$$

$$dV = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{eguale al flusso di } H$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\varphi}{dt}$$

$$dV = j\omega L I dz$$

$$Ll = \varphi$$

L per unita' di lunghezza

In modo duale ricavo un'altra equazione

13



$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$I(z+dz) - I(z) = dI \quad \text{deve essere uguale alla corrente}$$

$$dI = \int_{\text{inf. lat}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S} = \frac{dQ}{dt}$$

$$dI = j\omega Q dz = j\omega C V dz$$

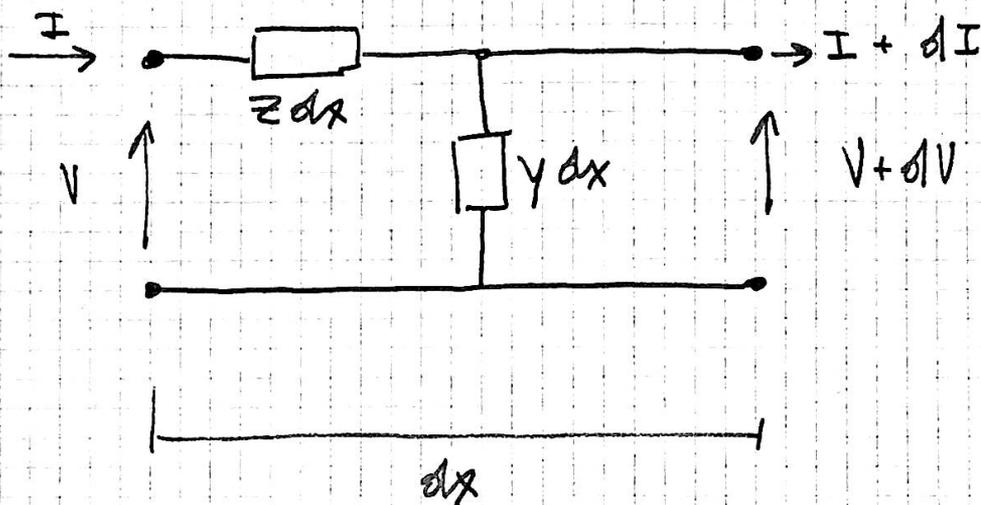
Le due equazioni della linea sono dunque

$$\begin{cases} dV = j\omega L I dz \\ dI = j\omega C V dz \end{cases}$$

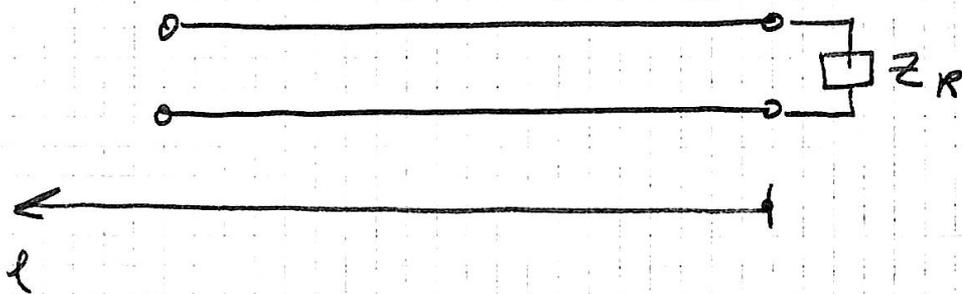
Le ipotesi in cui sono valide sono

- 1) $\sigma = \infty$ nei conduttori
- 2) mezzi dielettrici o no perfetti $\eta \rightarrow \eta_c$ $\epsilon \rightarrow \epsilon_c$
- 3) modi TM TE esauviti

una qualsiasi rete può essere così generalizzata con un salto logico



si considera l'asse partente dall'utilizzatore



Ricordiamo alcune equazioni

$$dV = -Z I dx$$

$$V_{,x} = -Z I$$

$$dI = -Y V dx$$

$$I_{,x} = -Y V$$

$$\begin{cases} V_{,xx} = -Z I_{,x} = +Z Y V \\ I_{,xx} = -Y V_{,x} = +Z Y I \end{cases}$$

soluzione di queste equazioni sono

$$\begin{cases} V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} \\ I = I_1 e^{-\gamma x} + I_2 e^{\gamma x} \end{cases}$$

$$\gamma = \sqrt{ZY}$$

15

$$z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

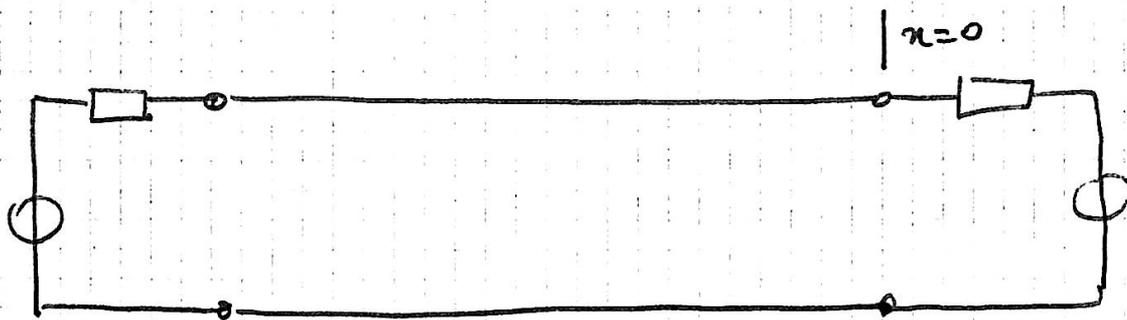
4 incognite V_1, V_2, I_1, I_2

sfruttando $V_{,x} = -Z I$

$$\gamma V_1 e^{-\gamma x} + \gamma V_2 e^{\gamma x} = -Z I_1 e^{-\gamma x} + I_2 Z e^{\gamma x}$$

$$V_1 = z_0 I_1 \quad V_2 = -z_0 I_2 \quad \text{si ricavano}$$

altre due equazioni sono dovute alle relazioni delle porte.



abbiamo così risolto il problema

$$z_{in} = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_1 + V_2}{I_1 + I_2} = \frac{V_1 + V_2}{I_1 - V_2/z_0} z_0$$

$$\frac{z_r}{z_0} = \frac{1 + \frac{V_2}{V_1}}{1 - \frac{V_2}{V_1}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_r - z_0}{z_r + z_0} \quad *$$

V_1 incidente

V_2 riflessa

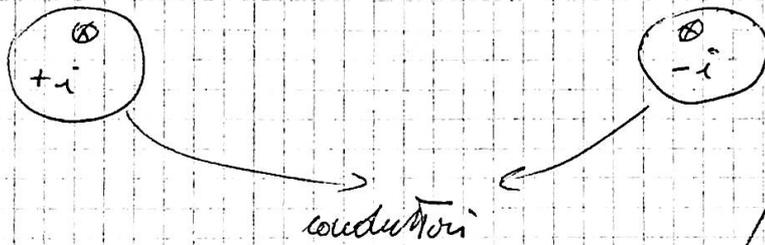
se $z_r = z_0$ non c'è riflessione

nelle seguenti ipotesi la * vale anche
nel dominio del tempo

1) linea senza perdite $z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (reale)

2) carico resistivo z_r reale

le ultime sono condizioni al contorno di campo magnetico in regione con



17

Si può vedere e rivedere le conoscenze del campo statico -
 Ad esempio con C (capacità tra i due elementi) possono procedere nei modi TEM

Da \vec{E} con $\vec{A} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{C}}{y}$ trova \vec{H}

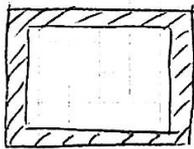
$\vec{H} = -\vec{A}$

Perché? come conseguenza di questo discorso $LC = \epsilon\mu$

(L, C per unità di lunghezza), trova anche L

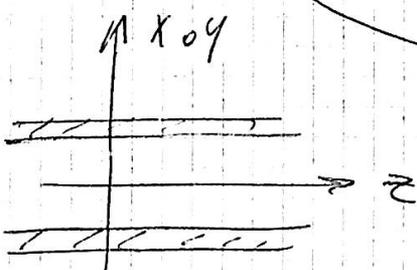
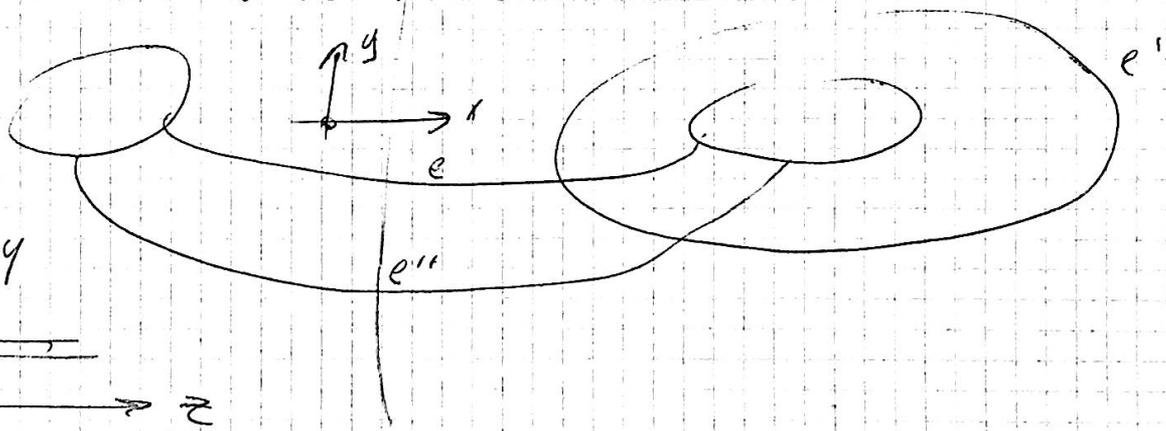
Definisco tensione e corrente per il modo TEM

Si può dimostrare che se non ho due conduttori separati non posso avere un modo TEM



Si può vedere semplicemente che in TEM possono fare tutto con certe profittate. Allora mi ci vogliono 2 conduttori

Per non averlo, bisogna che la guida sia semplicemente connessa (ritorno da ai due conduttori)



Considero $\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Per eq. in vuoto ($\nabla \cdot \vec{E} = 0$) ho che se la linea confinisce in z il valore dell'integrale non dipende dalla particolare linea -

Per il campo magnetico

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l}'$$

è costante. Ovvero che la dipendenza dalle frequenze è tutta in

$$k^2 + \kappa^2 = 0$$

Allora tutte le proprietà sono indipendenti ($\sigma = \infty$ per ipotesi) dalla f .

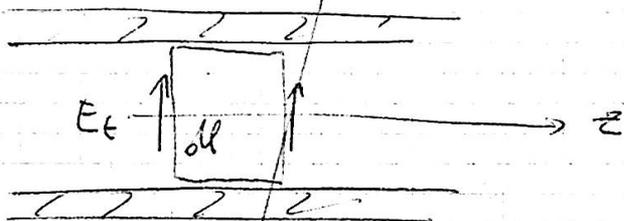
Ho

non considero il segno

$$V = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_C E_z dz$$

cont. regione per regione

variabile con z



ho

$$V(z) \text{ e } V(z+dz)$$

$$V(z) = \int_{(z)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(z+dz) = \int_{z+dz} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

integrando

$$V(z) + \frac{dV}{dz} dz - V(z) = dV = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

Maxwell

19

derivata del flusso

lineari
sono

$$j\omega L I dz = dz j\omega \int \mu H_{\parallel} dl$$

induttanza per unità di lunghezza

(nei conduttori $E_{\perp} = 0$)

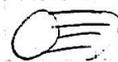
Ma allora

$$dz \int \mu H_{\parallel} dl = LI dz$$

dalle def. di induttanza date da Astum in campo statico

con ragionamento duale (considerando un tubo con) nel

conduttore



e gli applico

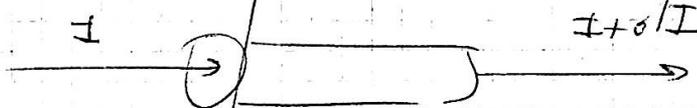
$$\text{div} (\vec{S} + j\omega \vec{D}) = 0$$

Integrando (otengo come flusso uscente

$$-dI \quad j\omega \underbrace{CV dz}$$

dq sulle superfici dei conduttori

con



$$\int S_z dz = I$$

$$\int D dz \propto Q = CV$$

Allora Trovo $\int_{\text{per unità di lunghezza}}$

$$(1) \quad dI = j\omega C V dz$$

quale con l'altra già vista formo

eq. lineari

$$(2) \quad dV = j\omega L I dz$$

c'è anche quello intorno ai conduttori (dip. da f)

Le ipotesi sotto cui valgono le (1) e (2) sono

1) Conduttori perfetti

non occorre dirlo perfetto (si usa ϵ_c invece di ϵ)

2) la linea va da $-\infty$ a $+\infty$

la linea reale comincia a z_0

Quando la pilota sono mandare dentro componenti lungo z

allora nessuno modi TE e TM da si mangiano

Se ho alto costo e frequenza alta (14 GHz e importante tecnicamente) mi possono rimanere i TE e TM

l' \exists di TE e TM è un problema di estensione

Per ϵ_c introdurre resistenze del conduttore $\neq 0$ non posso inserire R nelle (1) e (2) ma devo provvedere col "metodo delle perturbazioni"

Suppongo cioè il conduttore perfetto - Trovo i campi all'interno dei conduttori con loro conduttività, pensando come condizioni al contorno i campi nel dielettrico precedentemente trovati (con $\sigma = \infty$)

In pratica non si entra nella sostanza dei campi dentro il conduttore ma si cerca ad esempio la potenza dissipata (per unità di lunghezza)

$$P_L = \int S R_s \rightarrow \text{resistenza superficiale}$$

~~21~~

$$\alpha = \frac{P_L}{W_e} \begin{cases} \text{pot. dissipata} \\ \text{pot. trasmessa} \end{cases}$$

21

dove $R_s = \frac{\rho}{d}$ $\begin{cases} \text{costante} \\ \text{distanza offset} \end{cases}$

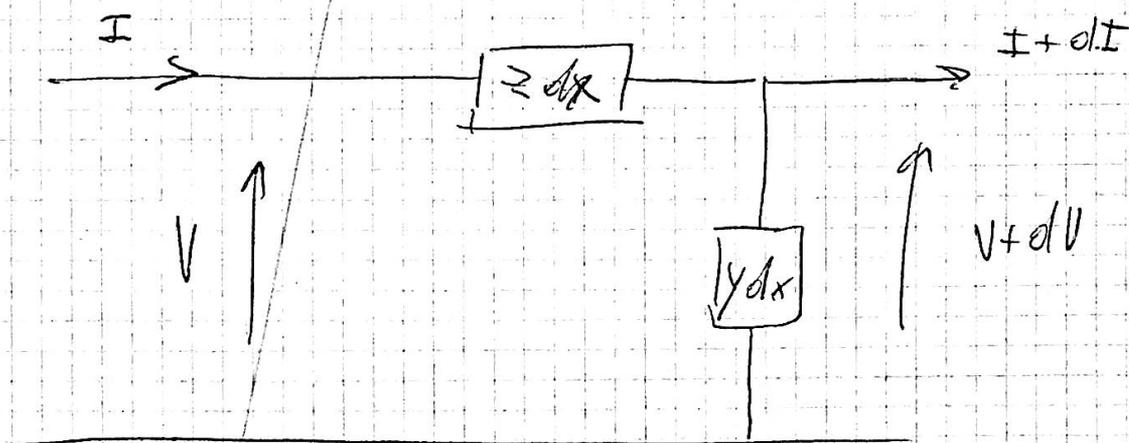
o $R_s = \frac{e}{S(f)}$ $\begin{cases} \text{dist di effetto pelle} \end{cases}$

Teoria delle linee

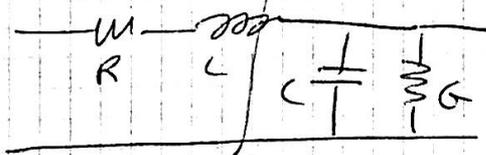
Si generalizzano questi discorsi, togliendo loro il naso fisico che ancora hanno

pongo $j\omega L = Z$
 $j\omega C = Y$

Arrivo a linee fatte di celle elementari con:



c'è salto logico delle (\bullet) (\square) ad una cella elementare cui
 valori delle (\bullet) (\square) sono trovare
 L C G $(\text{con } E_c)$ non
 non R



ora parto da z e y generiche funzioni di f (9)

$$1) V_{,x} = z I$$

$$I_{,x} = -y V$$

Il (-) dipende da come è messo l'ore x .

Ho poi:

$$V_{,xx} = z y V$$

$$I_{,xx} = z y I$$

Ho allora

$$V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

incidente riflessa

dove $\gamma = \sqrt{zy}$

definisco $Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}}$

le incognite sono V_1, V_2, I_1, I_2

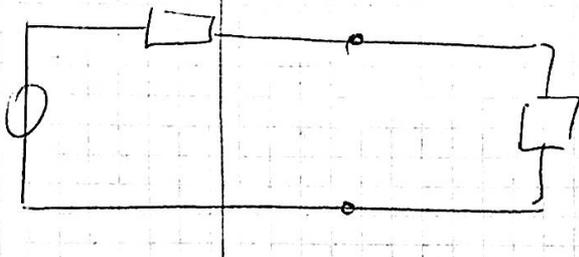
posso ricavare 2 relazioni tra queste 4

le sostituisco nella 1 e con identità per $e^{-\gamma x}$ ho

$$V_1 = Z_0 I_1$$

$$V_2 = Z_0 I_2$$

altre due si trovano considerando il doppio bipolo



H₀

$$Z_R = \frac{V(o)}{I(o)} = \frac{V_1 + V_2}{I_1 + I_2} =$$

$$\frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2} Z_0 = Z_R$$

~~19~~

23

Adesso risolviamo queste ultime nel rapporto $\frac{V_2}{V_1}$

Trovato

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{V_2(z)}{V_1(z)} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} \end{cases}$$

fondamentale

Supponendo

1) linea senza perdite (L, C)

$$H_0 Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

reale

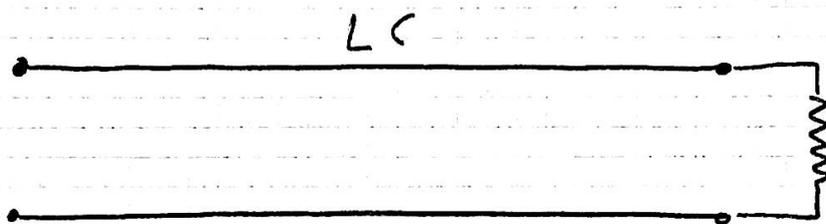
2) carico (Z_R) resistivo

La (*) vale anche nel tempo - Interessa poi quanto z₀ e' distante dall'adattamento ottimo.

17-4-68

(11)

Consideriamo una linea senza perdite caricata su R .



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R - R_0}{R + R_0}$$

ci sono tre possibilità:

$$\frac{V_2}{V_1} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$R > R_0 \quad (R = \infty)$$

$$R = R_0$$

$$R < R_0 \quad (R = 0)$$

Supponiamo una certa forma d'onda ai morsetti di entrata.

C'è un fronte d'onda che avanza c'è sola onda incidente

$V_1(t)$ la riflessa non esiste.

Ma noi sappiamo che $V_1 = Z_0 I_1 = R_0 I_1$

da questo p.o. di vista dalla porta di ingresso qualunque carico ci sia si vede la resistenza R_0 .

Quando raggiunge R viene riflessa e compare anche l'onda inversa.

Una linea LC può rappresentare un ritardo infatti l'onda a percorrere la linea ci mette un certo tempo

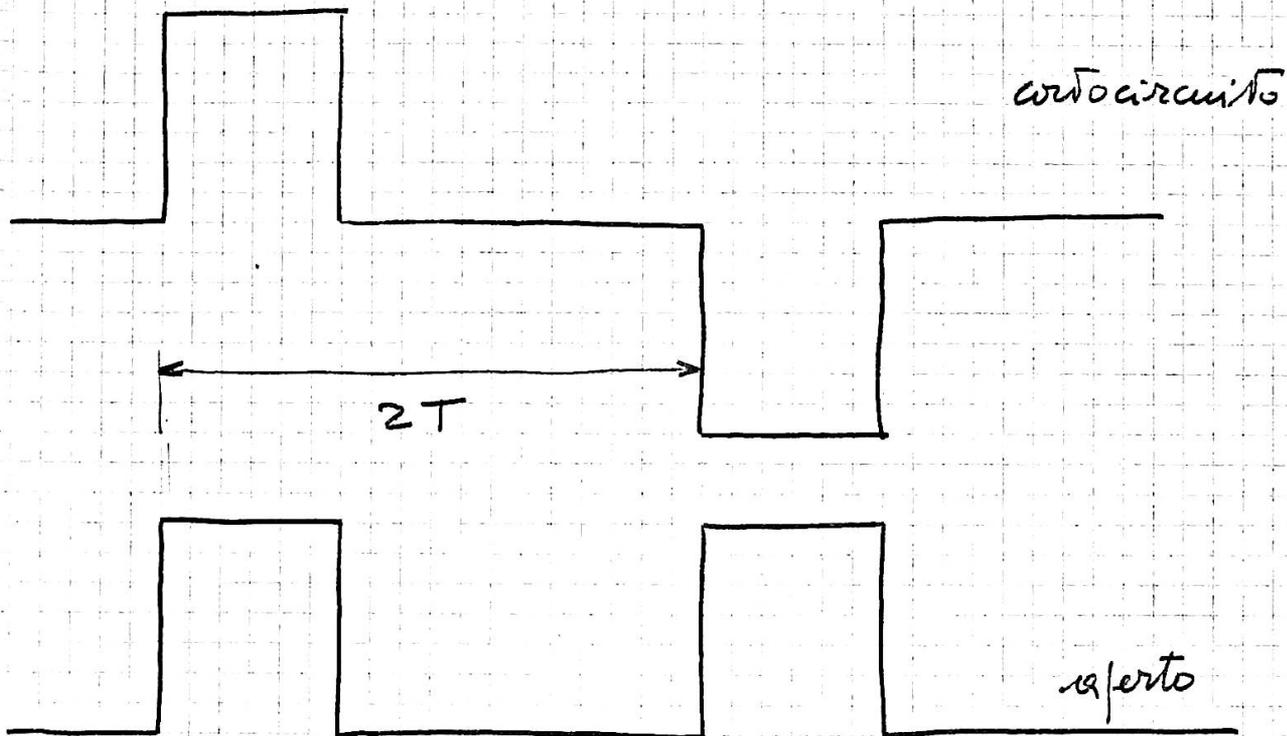
$$T = \frac{l}{v}$$

l lunghezza della linea, v velocità di propagazione

(12) 25

Il fronte arrivato in fondo se la linea è chiusa su R_0 non si riflette e' come se alla porta 1 vedessimo una linea infinita infatti non ne ritorna.

La seconda possibilita' e' data $R \neq R_0$ ritorna indietro qualche cosa l'unico problema e' quello di vedere il segno.



ora vediamo che sempre $V_2 \leq V_1$ molti chiamano coefficiente di riflessione

$$\rho = \frac{V_2}{V_1} \quad \text{coeff. di riflessione}$$

$$\epsilon = \frac{Z_R}{Z_0} \quad (\text{quantita' interessante})$$

hanno particolare interesse le formule che danno V_1 e V_2 in funzione della tensione sul carico

$$V_R = V_1 + V_2$$

ci interessano perche' le soluzioni sono esponenziali

$$V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} \quad (3)$$

$$V_R = V_1 + V_2$$

$$V_1 = Z_0 I_1$$

$$V_2 = -Z_0 I_2$$

$$I = I_1 e^{-\gamma x} + I_2 e^{\gamma x}$$

$$\begin{cases} V_R = V_1 + V_2 \\ I_R = I_1 + I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_R = V_1 + V_2 \\ \frac{V_R}{Z_R} = \frac{V_1}{Z_0} - \frac{V_2}{Z_0} \end{cases}$$

da cui

$$V_1 = V_R \frac{Z_R + Z_0}{2 Z_R}$$

$$V_2 = V_R \frac{Z_R - Z_0}{2 Z_R}$$

questo tipo di approccio è molto utile nel dominio del tempo

Ricordo

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

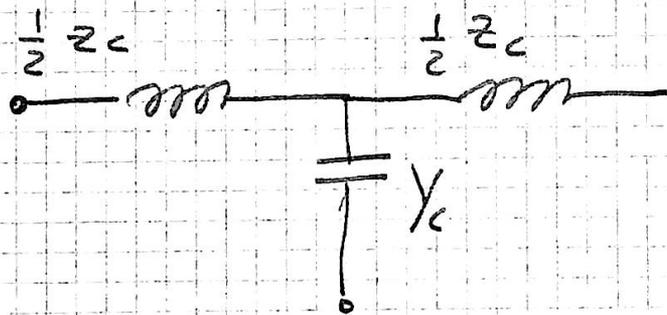
è simmetrico $A = D$

Consideriamo una linea - Ponendo $x = l$ (15) 27
 cerchiamo un circuito equivalente del sistema.
La matrice di trasmissione è reciproca

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

è simmetrica poiché $A = D$

Possiamo allora sostituire un quadrupolo



dove
$$\frac{z_c}{z} = \frac{z l}{z} \frac{\sqrt{\gamma} \frac{B l}{z}}{\frac{B l}{z}}$$

$$Y_c = Y l \frac{\sin B l}{B l}$$

z elemento longitudinale

Y trasversale

$$B = \frac{\gamma}{j}$$

Per una linea senza perdite

$$B = \beta$$

$$V(x) = V(0) \cos \beta x + j R_0 I(0) \sin \beta x$$

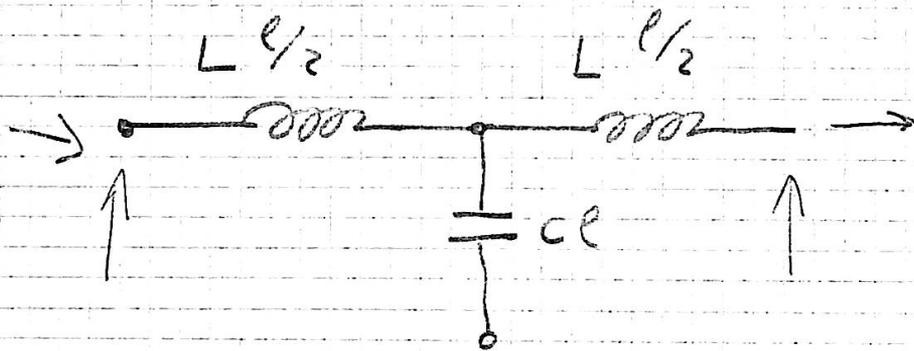
$$I(x) = I(0) \cos \beta x + j \frac{V_0}{R_0} \sin \beta x$$

$$\gamma = j\beta$$

queste hanno grande interesse teorico

Se ora $\frac{B\ell}{Z} \approx 10^\circ$ (angolo piccolo)

$$\frac{Z_c}{Z} = \frac{Z\ell}{Z}$$



Se ragioniamo su linee con ω bassa e le onde sono molto lunghe non ha senso parlare di linea

Per $x=0$ c'è il carico - linee LC

$$x = \frac{\lambda}{4}$$

$$Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) \quad \gamma x = j\beta x = j \frac{2\pi}{\lambda} x = j \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \text{ch } \gamma l & z_0 \text{sh } \gamma l \\ \frac{\text{sh } \gamma l}{z_0} & \text{ch } \gamma l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \quad (17)$$

29

$$z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

$$\gamma = \sqrt{zy}$$

$$B = -j\gamma$$

↓

$$\gamma = jB$$

$$C = \frac{\text{sh } \gamma l}{z_0} = \frac{j \sin Bl}{\left(\sqrt{\frac{z}{y}}\right) \left(\sqrt{\frac{y}{y}}\right)} = \frac{j \sin Bl}{\gamma} \quad y =$$

$$= \frac{j \sin Bl}{jB} y = \boxed{\frac{\sin Bl}{Bl} \quad \text{if } y = \frac{1}{y_c}}$$



$$R_1 = R_2 = \frac{D-1}{c} = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{\operatorname{sh} \gamma l} z_0 =$$

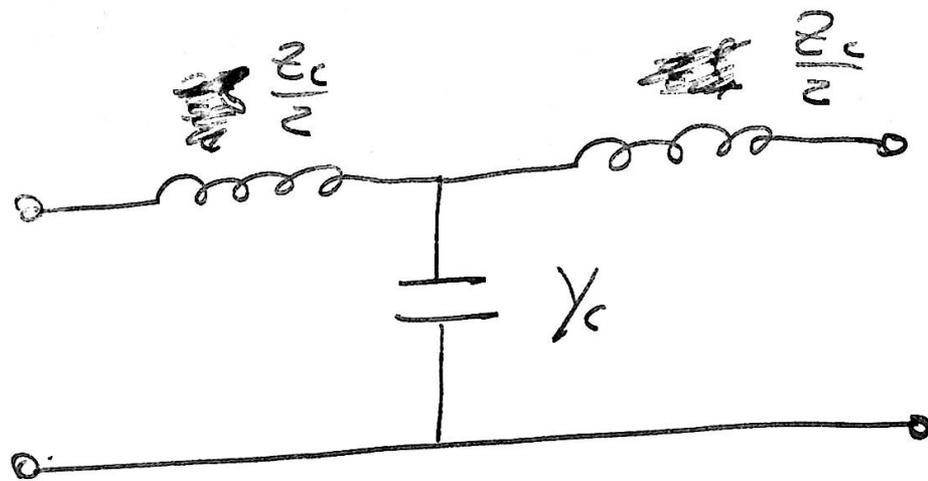
$$= \frac{\omega B l - 1}{j \sin B l} \sqrt{\frac{z'}{y}} \sqrt{\frac{z}{z}} = \frac{\omega B l - 1}{j \sin B l} \frac{z}{j B} =$$

$$= \frac{1 - \omega B l}{\sin B l} \frac{z \cdot l}{B \cdot l} =$$

$$\frac{j \frac{B l}{z} \cdot \frac{z l}{z}}{\frac{B l}{z}} = \frac{z l}{z} = \frac{z_0}{z}$$

Тригонометрия

above



где Y admittance capacitor
 " Z impedance inductor

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

(19)

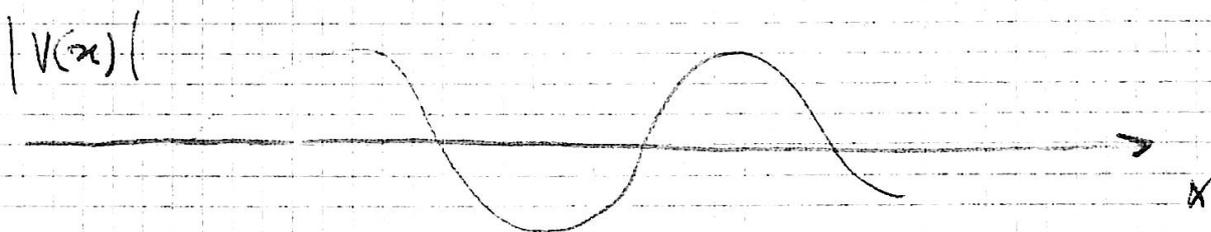
31

$$Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{V(0) \cdot 0 + j R_0 I(0)}{I(0) \cdot 0 + j \frac{V(0)}{R_0}} = R_0 \frac{1}{Z(0)}$$

$$Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) Z(0) = Z_0^2$$

dati trasformatori $\frac{1}{4}$

Supponiamo di avere uno strumento che misura la tensione lungo la linea



Linea LC adattata

$$V = V_1 e^{-j\beta x}$$

$$V(x) = V(0) \cos \beta x$$

Si dice rapporto d'onda stazionario il rapporto tra l'indicazione max e la min di V

$$\sigma = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \geq 1$$

(20)

$$V = V_1 e^{i\varphi_1} e^{-j\beta x} + V_2 e^{i\varphi_2} e^{j\beta x}$$

$$V_{\max} = |V_1| + |V_2|$$

$$V_{\min} = |V_1| - |V_2|$$

$$\rho = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\sigma = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

Relazione tra σ e il carico resistivo

$$\frac{z(0)}{z_0} = \frac{V_1 e^{-j\alpha} + V_2 e^{j\alpha}}{V_1 e^{-j\alpha} - V_2 e^{j\alpha}} \stackrel{\text{per } \alpha=0}{=} = \frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2}$$

$$R = R_0 \sigma \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma} \quad \text{e} \quad \text{seconda che}$$

$$R > R_0$$

$$R < R_0$$

Manipolando otteniamo

$$V(x) = V(0) \operatorname{ch} \gamma x + z_0 I(0) \operatorname{sh} \gamma x$$

$$I(x) = I(0) \operatorname{ch} \gamma x + \frac{V(0)}{z_0} \operatorname{sh} \gamma x$$

* 33

la impedenza alla distanza x e'

$$z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V(0) \operatorname{ch} \gamma x + z_0 I(0) \operatorname{sh} \gamma x}{I(0) \operatorname{ch} \gamma x + \frac{V(0)}{z_0} \operatorname{sh} \gamma x} =$$

$$= \frac{z(0) \operatorname{ch} \gamma x + z_0 \operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{ch} \gamma x + \frac{z(0)}{z_0} \operatorname{sh} \gamma x}$$

$$\frac{z(x)}{z_0} = \frac{z(0) \operatorname{ch} \gamma x + z_0 \operatorname{sh} \gamma x}{z_0 \operatorname{ch} \gamma x + z(0) \operatorname{sh} \gamma x}$$

se la $z(0) = z_0$ $z(x) = z_0 \quad \forall x$

si ricava

$$\boxed{z(x)_{\text{visto}} \cdot z(x)_{\text{etero}} = z_0^2}$$



28-4-69

Coef. riflessione $\tilde{\rho} = \rho e^{i\varphi}$
carico

all'incirca π lontano dal coeff. di rif. corrente non come

$\frac{V_2}{V_1}$ ma come $\frac{V_2 e^{\gamma x}}{V_1 e^{-\gamma x}}$



$V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$

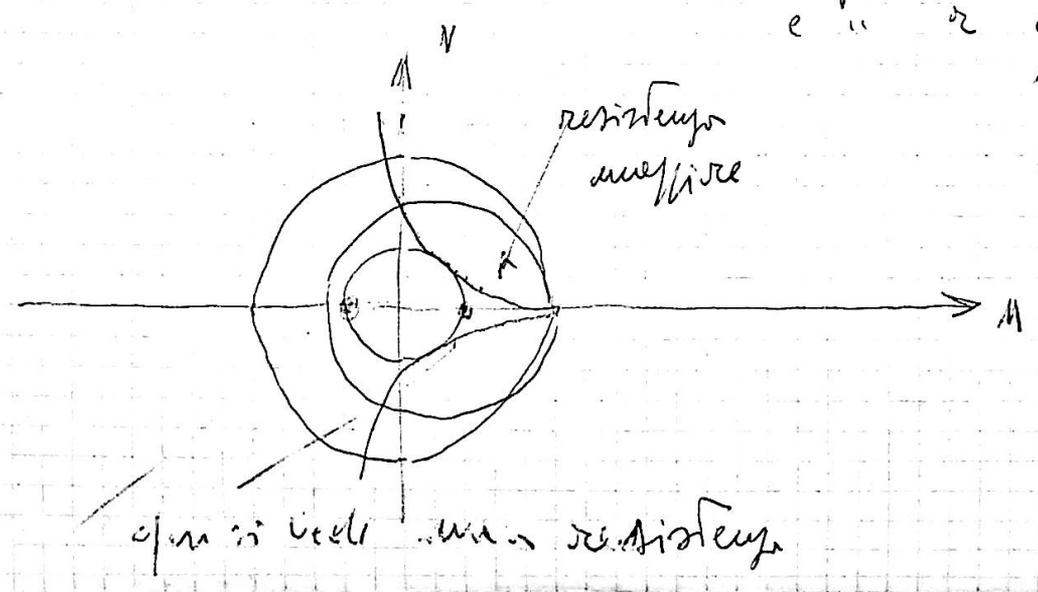
usc' guardando da x verso il carico vediamo un carico tale che valgono i discorsi finora fatti

quindi $\tilde{\rho} = \rho e^{i\varphi} e^{2\gamma x}$

$2\gamma = 2j\beta x = j4\pi \frac{x}{\lambda}$

quale e' il periodo?

parte i
 e " " coeff. di
 riflessione



$$X = \frac{2V}{(1-U)^2 + V^2}; \quad (1-U)^2 + V^2 = \frac{2}{X} V \quad ; \quad 35$$

$$\boxed{(1-U)^2 + \left(V - \frac{1}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2}} \quad V^2 = \frac{2}{X} V$$

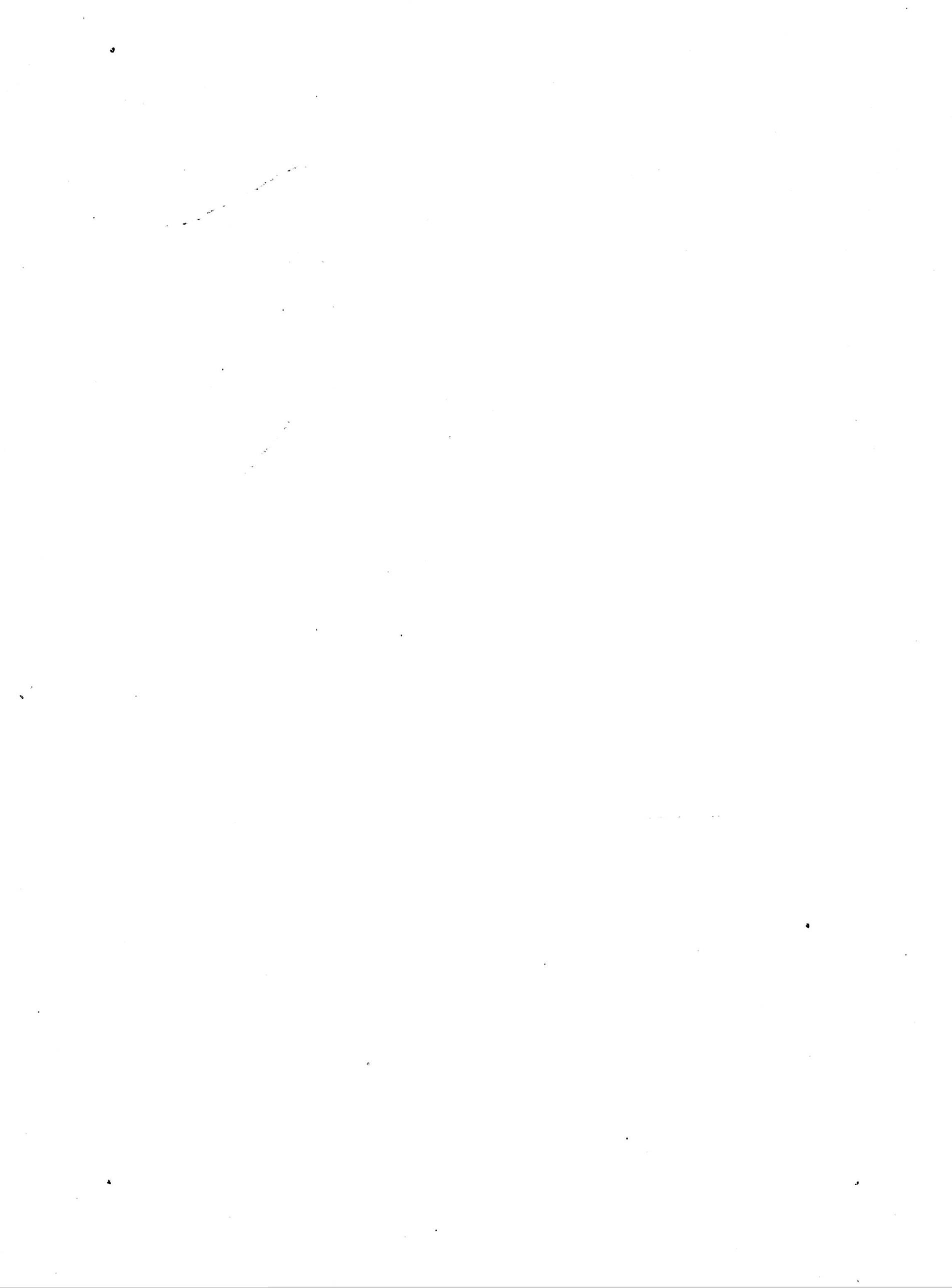
$$R = \frac{1-U^2-V^2}{(1-U)^2 + V^2} \quad ; \quad (1-U)^2 + V^2 = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} U^2 - \frac{1}{R} V^2$$

$$\begin{aligned} -V^2 \left(1 + \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R} &= 1 + U^2 - 2U + \frac{1}{R} U^2 \\ &= U^2 \left(1 + \frac{1}{R}\right) - 2U + 1 \end{aligned} \quad \frac{R+1}{R}$$

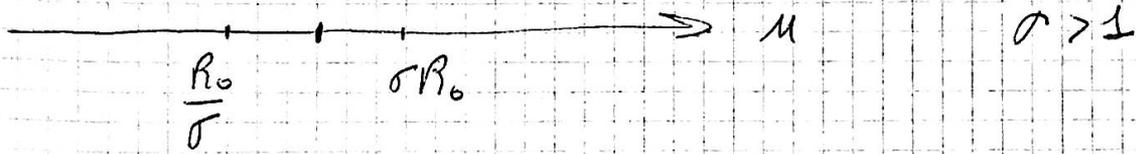
$$-V^2 + \frac{1}{R+1} = U^2 - 2 \frac{R}{R+1} U + \frac{R}{R+1}$$

$$-V^2 + \frac{1-R}{R+1} = \left(U - \frac{R}{R+1}\right)^2 - \frac{R^2}{(R+1)^2}$$

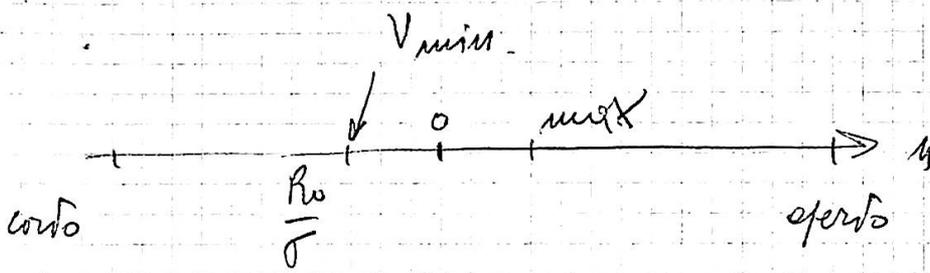
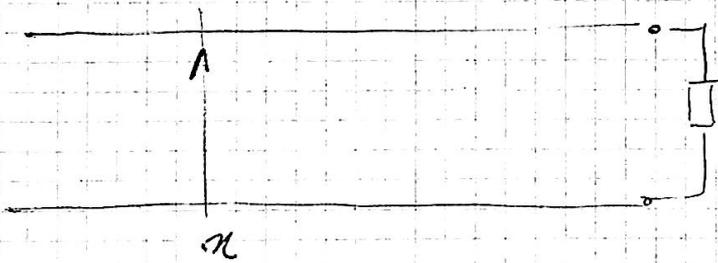
$$\left(V - \frac{R}{R+1}\right)^2 + V^2 = \frac{1-R^2 + R^2}{(R+1)^2} = \frac{1}{(R+1)^2}$$



cerchio resistivo



cio' supponendo



$$V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

se sono in opposizione si ha il min

$$I = \frac{V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}}{R_0}$$

in identiche condizioni e' max

Esempio

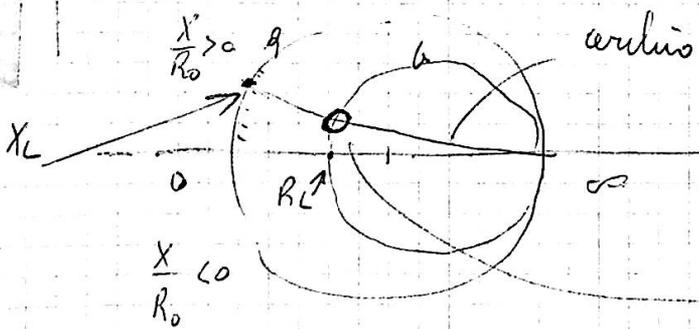
linea caricata da Z_L

1) punto

$$\frac{Z_L}{R_0} \Rightarrow R_L + jX_L$$

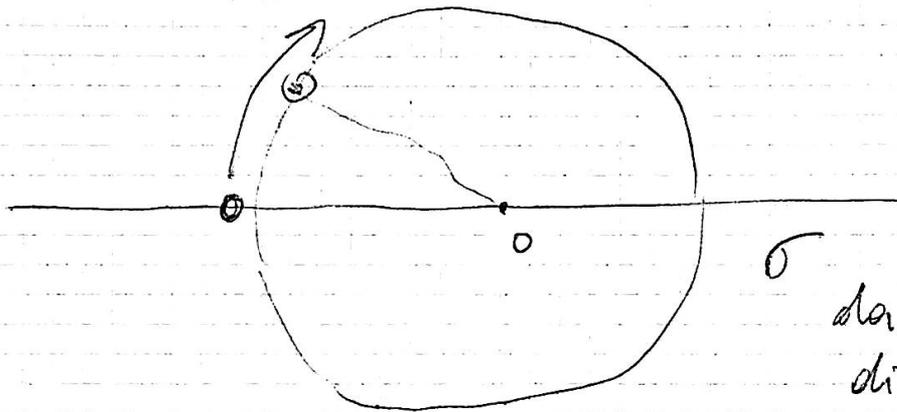
$$\left(\epsilon = \frac{Z_L}{R_0} = R_L + jX_L \right)$$

normalizzato



di carico

Trovato questo σ_0 infine con



da' un'idea del disadattamento

rapporto : modulo di ξ



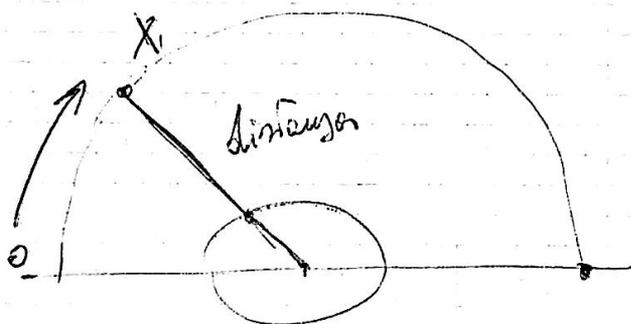
Tensione massima a due distanze e'

dove c'è il carico \llcorner c'è ascissa zero

* traccio una retta che passa per il W_0 di carico

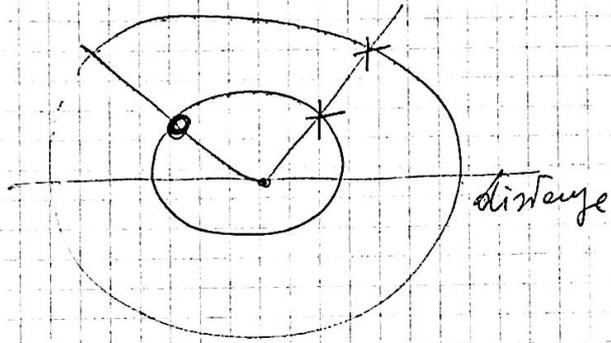
perpendicolarmente al raggio che parte con zero e va verso il generatore

* il σ_0 max è l'incrocio con l'asse delle ascisse



Inclinazione alla distanza x

pendo $\frac{x}{1}$ normalizzato



Trovo una rete e Trovo x

in una linea

$V_{max} = 2V$

$V_{min} = 1V$

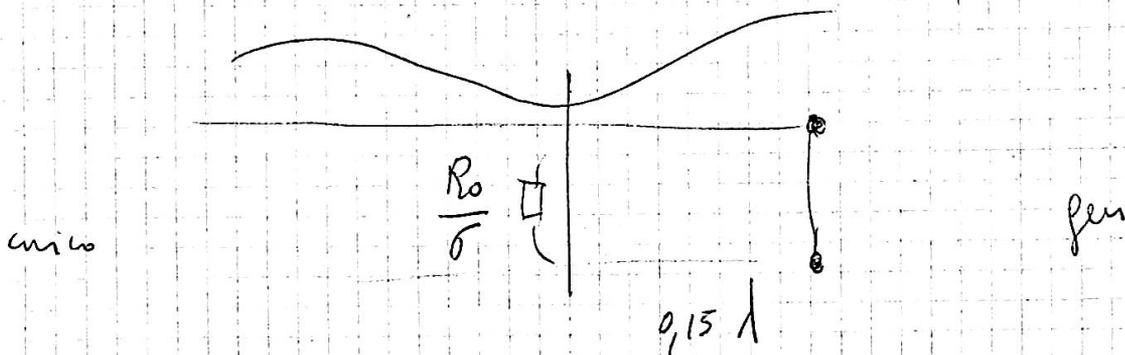
$i_{min} = 0,15A$

9 $0,15A$ dal minimo verso il generatore, quanto vale l'impedenza della linea presente?

1) trovare σ

$$\sigma = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \boxed{2 = \sigma}$$

Tutto si risolve a calcolare una rete



caricata con $\frac{R_0}{\sigma}$ e lunghezza $0,15 \lambda$

dato e' il cerchio suponendo che sia $0,08 \lambda$

41

$$\textcircled{\times} z_A = 0,6 - j 0,38$$

Caro coassiale conduttore interno $\phi = 1 \text{ mm}$

ϕ interno conduttore esterno 6 mm

costante diel. rel. mezzo e' 2

lunghezza 20 m

Un estremo e' alimentato da un impulso rettangolare di durata regolabile. L'altro e' chiuso su un resistore da 50Ω

1) durata max impulso / impulso riflesso in ingresso completamente distinto da quello prodotto dalla sorgente

A) controllare se si riflette - cioè trovare la resistenza caratteristica. Se e' 50Ω non ritorna.

per il coassiale $R_0 = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D_e}{D_i}$

inoltre $LC = \mu \epsilon$

poi con l'ostacolo ricavato uno dei due

facendo i conti $R_0 = 75 \Omega$

B) Tempo di propagazione dell'impulso al carico



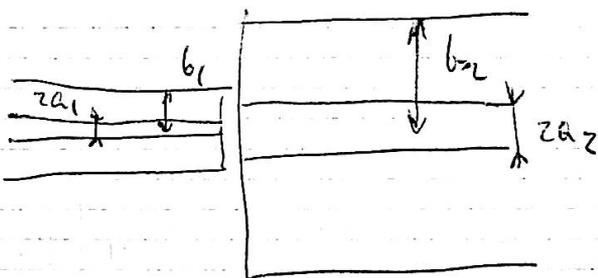
$$t = \frac{l}{v} = 94 \mu\text{sec}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

quindi

$$\text{durata max } d \leq 2t$$

2 casi coassiali in cascata



$$r_{a1} = 1 \text{ mm}$$

$$r_{a2} = 2 \text{ mm}$$

$$b_1 = 3 \text{ mm}$$

$$b_2 = 6 \text{ mm}$$

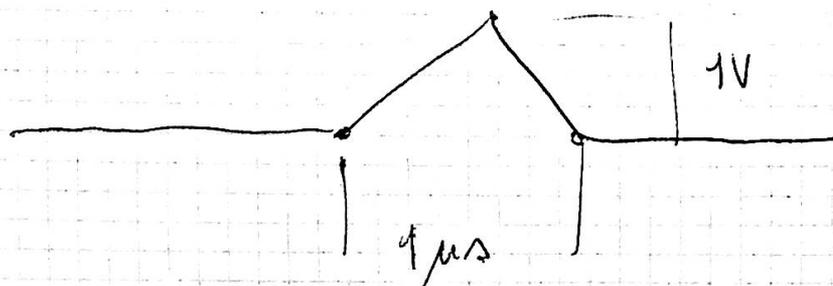
$$\epsilon_1 = 2\epsilon_2$$

$$\mu_1 = 2\mu_2$$

~~Applicazione~~ linee ideali e modo TEM

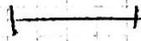
la 2^a linea è aperta

generatore ideale alimenta la prima linea ed è aperto

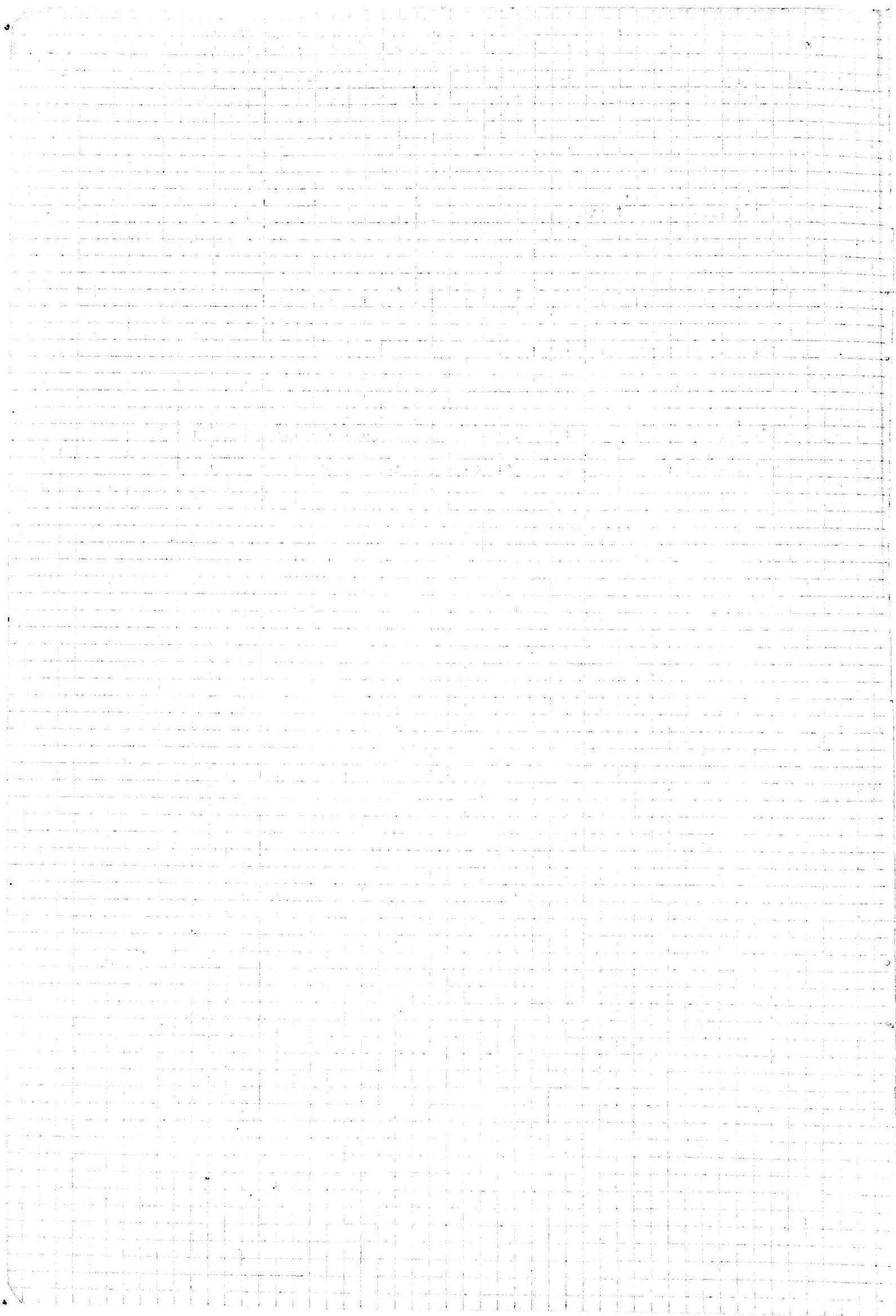


calcolare la tensione al terminale aperto -
Si discute la legittimità delle ipotesi fatte -

43



- 1) Hanno la stessa impedenza caratteristica -
la velocità di propagazione può essere diversa
non esistono riflessioni
- 2) alla giunzione con l'ipotesi di sistema
cilindrico - la propagazione non è TEM



30-4-68

Supponiamo che la dipendenza spaziale sia

$$f(x, y, z) \Rightarrow g(x, y) e^{-\gamma z}$$



$$* \begin{cases} \nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0 \\ \nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0 \end{cases}$$

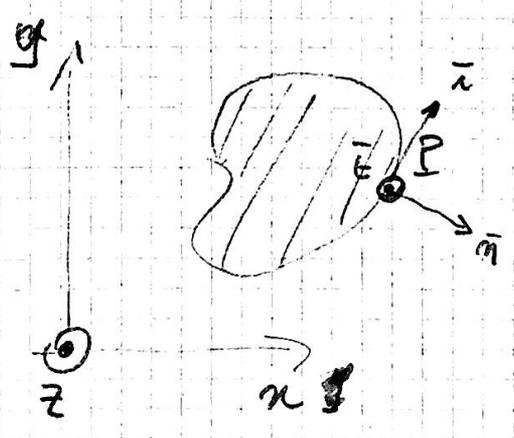
dielettrico
cilindrico
invariabile

Teniamo presenti le 7 8 9 10 del 16-4-68

$$K = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v}$$

$$K_c^2 = K^2 + \gamma^2$$

Condizioni al contorno delle *

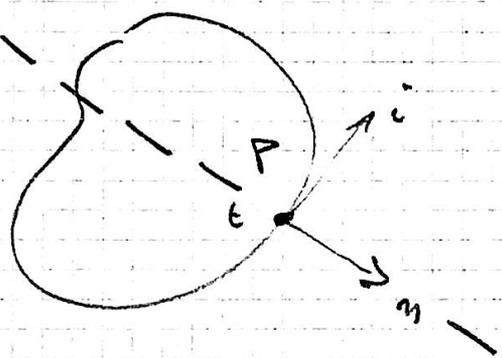


\vec{t} verso direto come z

E_n componente lungo n

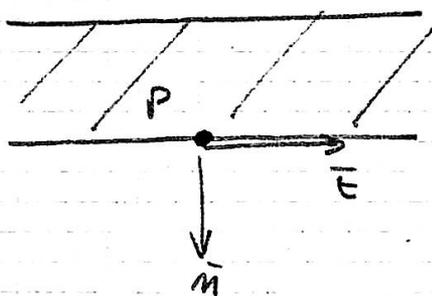
E_t, H_t componenti totali nel piano xy

Per la direzione t si usa E_z, H_z



sezione che contiene P e n

ho



Condizione

$$E_z \equiv 0$$

perché dentro non c'è campo
allora non c'è nemmeno fuori

NB E_z

componente
tangente

della componente nel piano

perché E_z nullo $\forall z$ ho

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

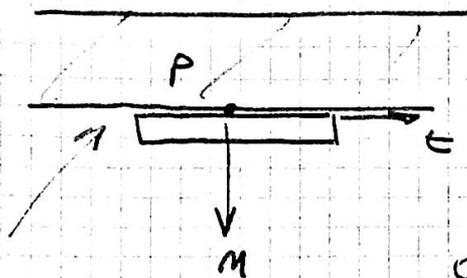
$$\left(\text{anche } \frac{\partial E_z}{\partial i} = 0 \right)$$

per H si vede che

$$\frac{\partial H_z}{\partial m} = 0$$

infatti

mettiamo una spirale nel piano t e n



circolando

47

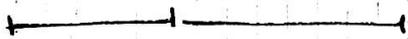
infinitesimo
di ordine superiore

$$0 = H_z(p) \delta l - [H_z(p + \delta l)] \delta l =$$

$$= H_z(p) \delta l - \left[H_z(p) + \frac{\partial H_z}{\partial m} \delta l \right] \delta l =$$

$$= \frac{\partial H_z}{\partial m} \delta l^2 = 0 \implies \frac{\partial H_z}{\partial m} = 0$$

la circolazione è nulla perché E non dà contributi perché $E \in$ piano della spirale



K_c indipendente da ω ed è una incognita del problema

$K_c \in$ insieme numerabile

$$\nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0$$

$$\nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0$$

• noto K_c possiamo risolvere le equazioni trovando un E_z n° complesso

• il contorno riguarda condizioni spaziali \rightarrow

$\rightarrow K_c$ non dipende da ω

K_c dipende dalla geometria del sistema.

γ è invece funzione di ω perché

K dipende da ω

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

quindi per un certo sistema \exists $\alpha(\omega)$
 $\beta(\omega)$
fenomeno di dispersione.

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \rightarrow \boxed{v_f = v_f(\omega)}$$

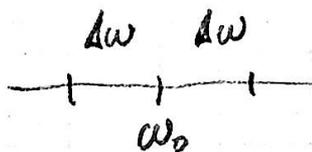
nelle onde piane $\beta \propto \omega \rightarrow v_f = \text{cost}$

qui invece no

Si introduce la velocità di gruppo

Si trasmettono per esempio treni di onde sinusoidali

Qui il contenuto armonico è compreso in un piccolo intervallo



Sottraiamo la dipendenza da x, y

49

ho $f(z, t)$

con Fourier

$$f(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$F(\omega)$ spesso complesso

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

α α non varia rapidamente con ω
nel piccolo intorno $\alpha = \omega t$

allora posso scrivere

$$f(z, t) = K \left[\int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\beta z} d\omega + \dots \right]$$

rende conto di K

Supponiamo $F(\omega) \approx \text{costante} \approx F(\omega_0)$
dato il piccolo intervallo -

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega = \omega_0} + \dots \quad \Rightarrow$$

$$f(z, t) = K F(\omega_0) \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i \left[(\omega - \omega_0 + \omega_0)t - \beta(\omega_0)z - (\omega - \omega_0) \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right]} d\omega$$

$$\omega - \omega_0 = \bar{\omega}$$

$$f(z, t) = K F(\omega_0) e^{i[\omega_0 t - \beta(\omega_0)z]} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{i[\bar{\omega}t - \bar{\omega} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z]} d\bar{\omega} + \dots$$

quintiamo solo l'integrale

$$\frac{1}{i \left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right]} \int e^{i[\dots]} d\omega \left[it - i \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right]$$

quindi

$$f(z, t) = K F(\omega_0) e^{i[\omega_0 t - \beta(\omega_0)z]} \frac{2 \Delta\omega \left\{ e^{i \left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \Delta\omega} - e^{-i \left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \Delta\omega} \right\}}{2i \left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \Delta\omega}$$

è del tipo

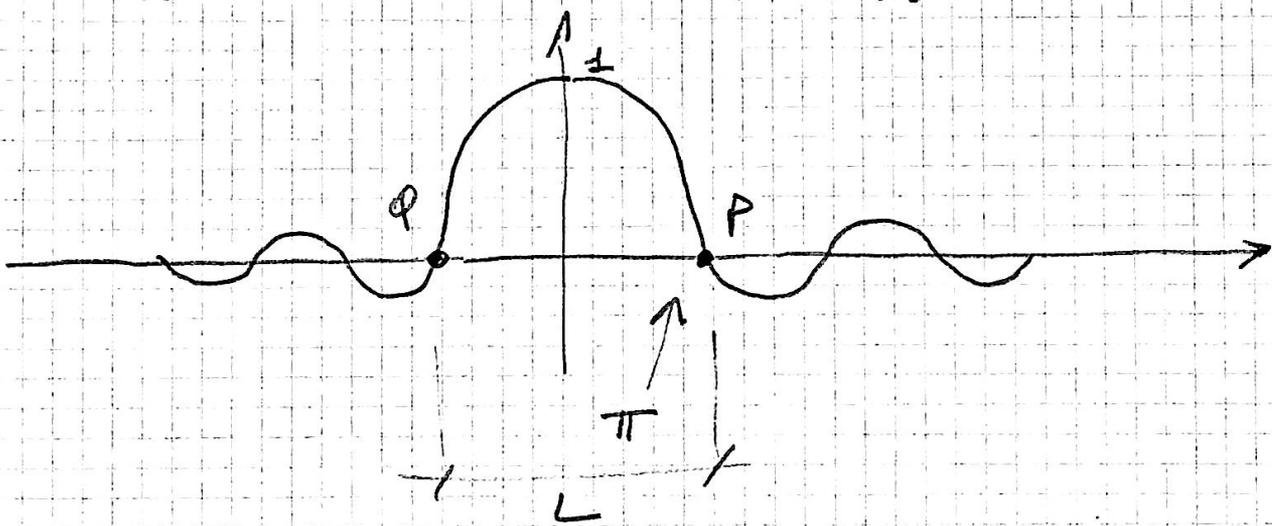
$$\frac{2 \Delta\omega}{H} \left(\frac{e^{iH} - e^{-iH}}{2i} \right)$$

C'è un termine del tipo

51

$$\frac{\sin x}{x}$$

$$x = \Delta\omega \left[t - \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right)_{\omega_0} z \right]$$



$$\Delta\omega \left[t - \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right)_{\omega_0} z \right] = \pi$$

perché compare t e z il ω_0 di zero P
e viaggiante e cammina con la velocità
di gruppo

$$v_g = \frac{1}{\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right)_{\omega_0}}$$

quindi il secondo fattore del prodotto se il primo
fornisce costante mi darebbe un grafico $\frac{\sin x}{x}$
viaggiante.

calcoliamo

PQ

nell'istante $t=0$ è

$$\Delta\omega \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right) \Big|_{\omega_0} L = 2\pi$$

se β è costante $L \rightarrow \infty$

L tanto più grande quanto più piccolo è $\Delta\omega$

Consideriamo l'altro fattore

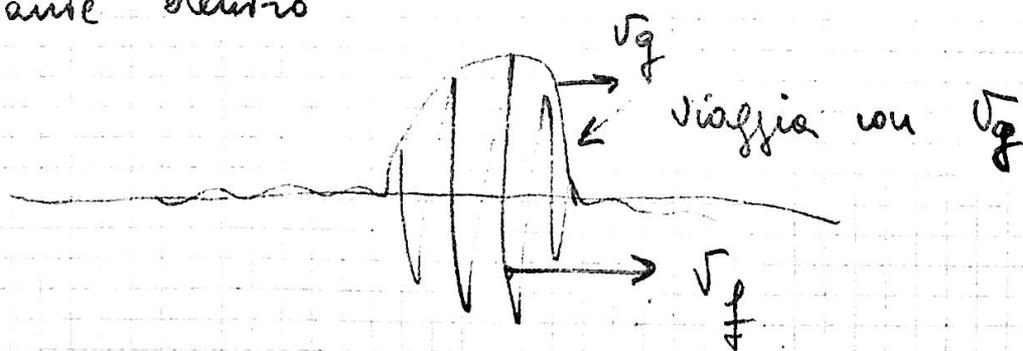
contiene un termine di propagazione alla
velocità v_f

$$v_f = \frac{\omega_0}{\beta'(\omega_0)}$$

velocità di fase
della portante

questo termine non è attenuato e viaggia a velocità v_f

il prodotto è una zero fuori di PQ
e costante dentro



La risonanza si trova dentro il pacchetto.

53

In pratica l'energia è solo nel pacchetto →

→ v_g velocità con cui si propaga l'energia

→ $v_g < c$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = jk \sqrt{1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^2}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v}$$

se supponiamo k_c reale → γ $\begin{cases} \text{reale} \\ \text{o immag} \end{cases}$ mai complesso

Per una certa configurazione \exists un insieme di k_c

fissata la configurazione, cambiando k succede una sola volta che γ passa da reale a immaginario (cio' vale $k = \frac{\omega}{v}$)

frequenza critica quella in cui γ va da

reale a immaginario

nel passaggio $\gamma = 0$

quindi $K = K_c$

$$\text{ma } K = \frac{2\pi f_c}{\nu} = K_c$$

↓

$$\gamma = iK \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$f < f_c$$

γ reale

$$\gamma = \alpha$$

non si blocca

$$f > f_c$$

γ immaginario

$$\gamma = i\beta$$

si blocca senza attenuazione

diminuzione

$$K_c^2 = K^2 + \gamma^2$$

$$K_c^2 = \frac{2\pi f_c}{v}$$

$$\left(\frac{2\pi f_c}{v}\right)^2 = \left(\frac{2\pi f}{v}\right)^2 + \gamma^2$$

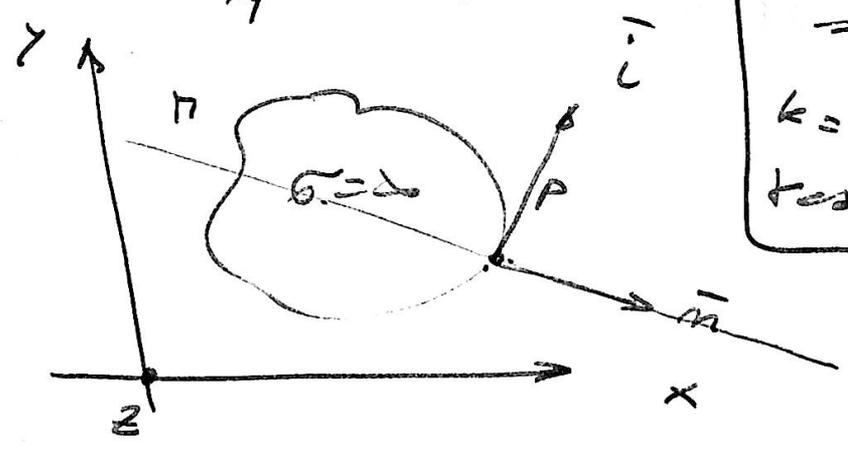
$$\gamma^2 = \left(\frac{2\pi f}{v}\right)^2 (f_c^2 - f^2)$$

$$\gamma = K \sqrt{\frac{f_c^2}{f^2} - 1} = jK \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}$$

lil ; diel

$$E_z = 0$$

$$\nabla_{xy}^2 A + k_c^2 A = 0$$

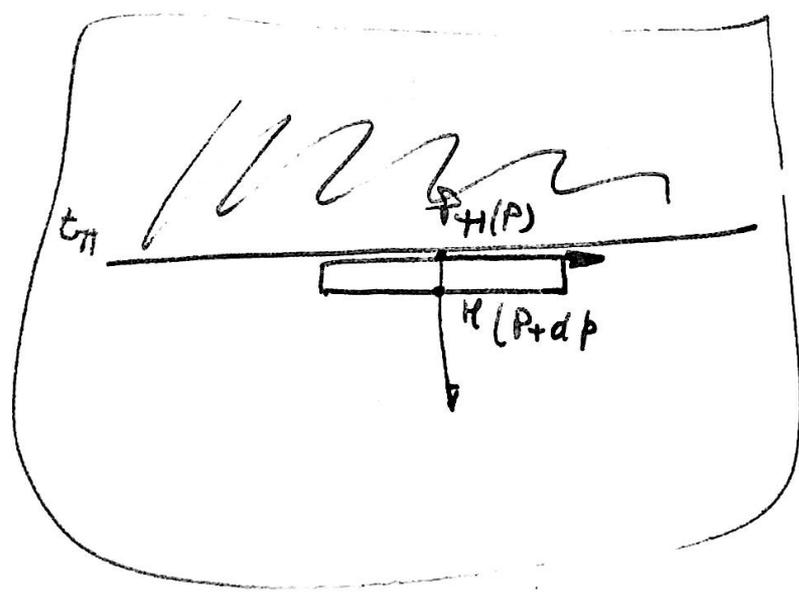


$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$k = \alpha + j\beta$$

$$H_c$$

$$E_c$$

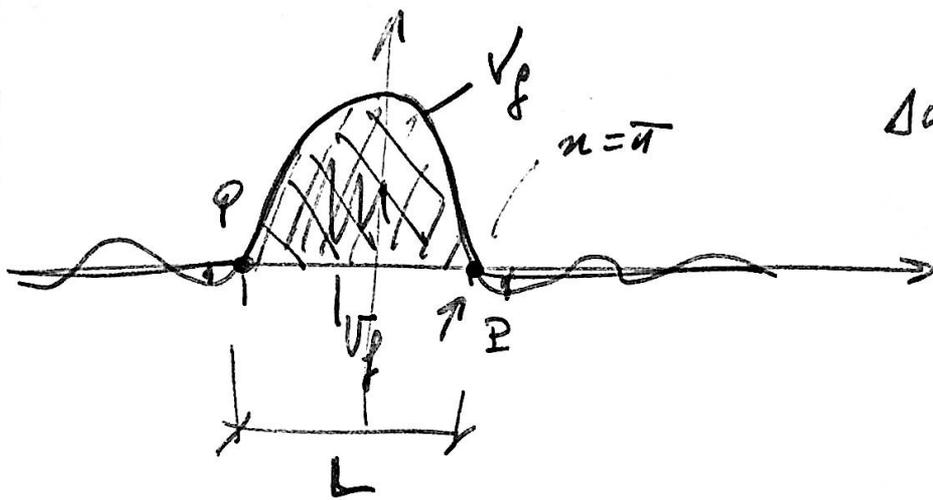


$$H(P)\epsilon + H(P+dp)\epsilon = 0$$

$$H(P)\epsilon - H(P)\epsilon = \frac{\partial H(P)}{\partial n} dp$$

$$H(P)\epsilon - H(P)\epsilon = \frac{\partial H(P)}{\partial n} dp$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0$$



$$\Delta\omega \left[\epsilon - \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) \Big|_z \right] = \pi$$

$$\frac{z}{\epsilon} = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) \Big|_{\omega_0}} = \frac{v_g}{f}$$

$t=0$

$$\Delta\omega \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) \Big|_{z=2\pi} \rightarrow z=L$$

\downarrow
0

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{v_g}$$

$$\omega = \omega_0$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_g} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}$$

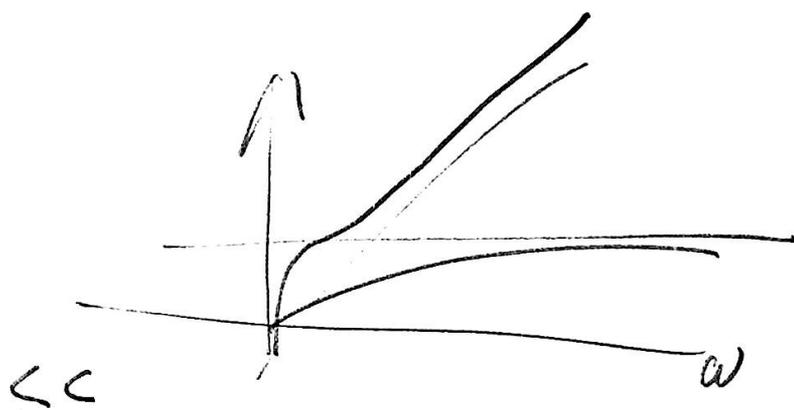
$$= \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}$$

$$\Delta\omega$$

$$L \rightarrow \infty$$

$$v_g = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) \Big|_{\omega_0}}$$

$$v_g = \frac{\omega}{\beta}$$



$$\nabla_{xy}^2 E_z + K_c^2 E_z = 0$$

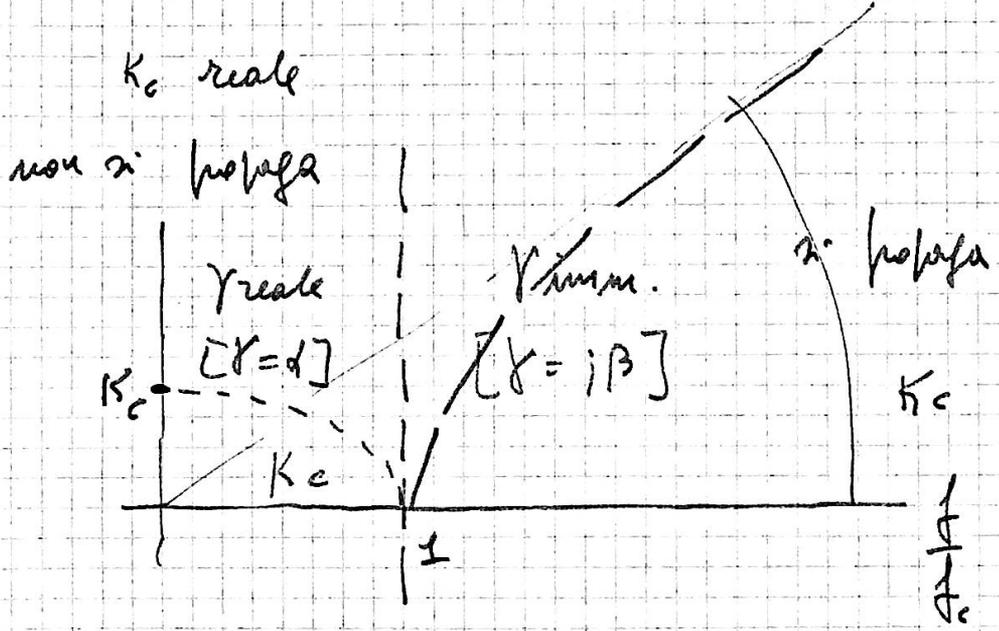
$$K_c^2 = K^2 + \gamma^2$$

$$\nabla_{xy}^2 H_z + K_c^2 H_z = 0$$

$$\gamma = iK \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

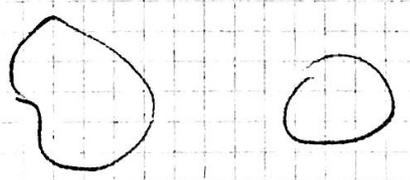
$$f_c / K_c = \frac{2\pi f_c}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$K = \frac{2\pi f}{\sqrt{\epsilon}}$$



γ reale attenuazione onda diretta

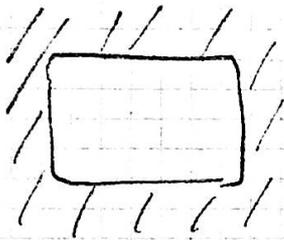
Si vede che alle frequenze basse non c'è propagazione



non possibili TEM

TE

TM



non e' possibile TEM

$$\gamma = j \frac{2\pi}{\sigma} f \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = j \frac{2\pi}{\sigma} f_c \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}$$

se $f < f_c$ come prima

$$f=0 \quad \text{la radice e' } -1 \quad \rightarrow \quad \gamma = K_c$$

per $\frac{f}{f_c}$ molto grande e parte j

$$\text{ho } \frac{2\pi}{\sigma} f_c \left(\frac{f}{f_c}\right)$$

ha coefficiente angolare K_c

$$\text{per un modo TEM senza perdite} \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon'} = \frac{\omega}{v} = K$$

questo β e' jK per i TEM

- quindi a frequenze molto alte ci si approssima ad un modo TEM

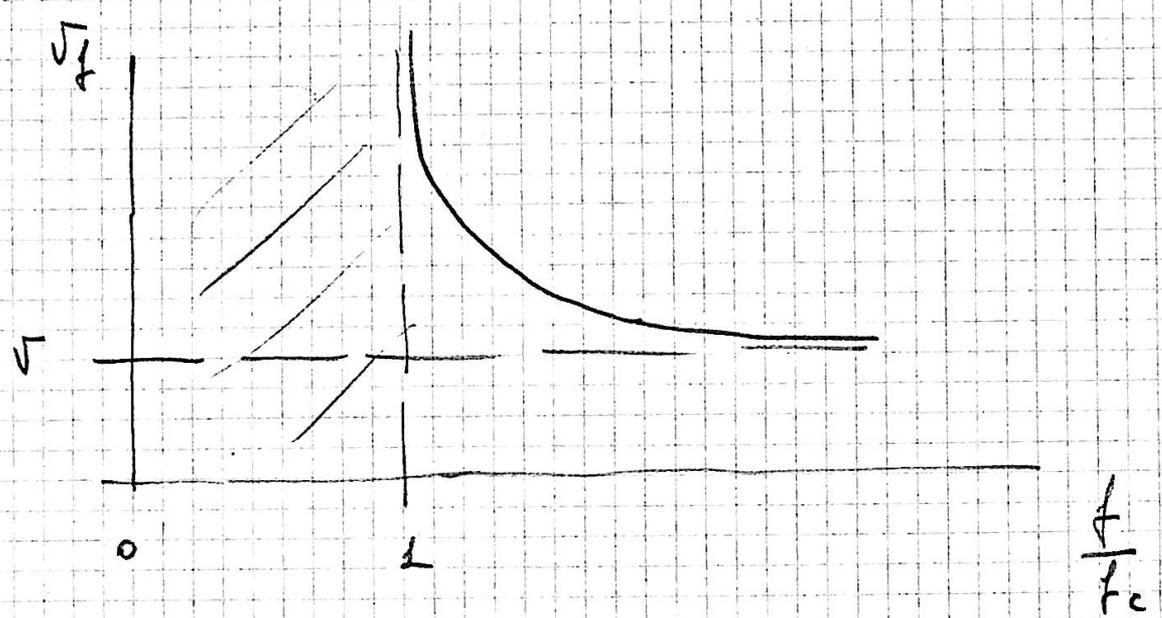


$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi f_c}{v} \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}} = v \frac{f/f_c}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}} =$$

59

$$= v \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad \text{valid in } f/f_c > 1 \rightarrow$$

$$\Rightarrow v_f > v$$



$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} \quad \frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{-2\pi f_c}{v} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}} = \frac{f}{f_c} \frac{1}{-2\pi f_c} =$$

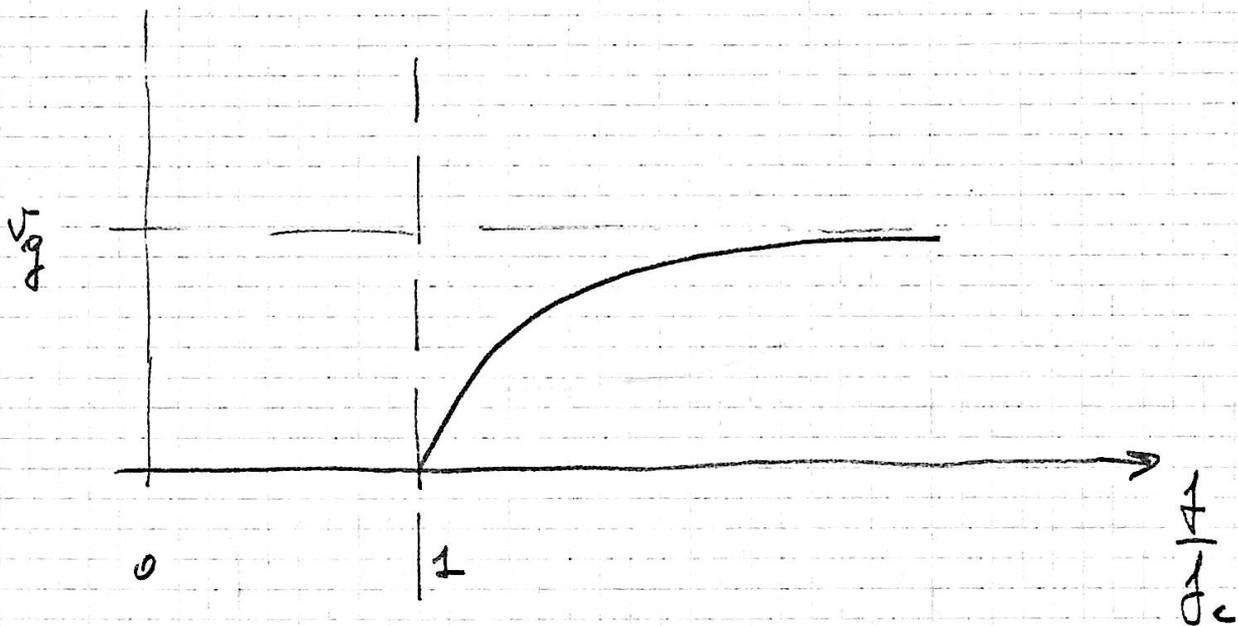
$$= \frac{1}{v} \frac{f}{f_c} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1}}$$

osserviamo che

$$\sqrt{f} \sqrt{f} = v^2$$

quindi poiché $v_f \leq v \rightarrow \sqrt{f} \geq v$

$$v_f = v \sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{f}\right)^2}$$



nei TEM $v_f = v_g$ perché

v_f non dipende da f

si veda anche qui che alle alte f girano quasi in un caso TEM

