

1969 – appunti di

Campi elettromagnetici 2

campi E e H – caso lineare –

CAMPI ELETTROMAGNETICI e CIRCUITI

Campo elettrico \vec{E} $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
 " magnetico \vec{B}

Induzione elettrica \vec{D} $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
 Campo magnetico \vec{H}

Densità di corrente \vec{J} $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ Lorentz

Potenziale vettore \vec{A} $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ $\frac{1}{c} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$
 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$



29-1-69

Da ora in poi facciamo riferimento solo ad \vec{E} e \vec{H} - Emi sono sufficienti se il campo e' lineare -

Vediamo di trasformare le equazioni

$$\begin{cases} \nabla \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \epsilon \cdot \nabla \cdot \vec{E} = \rho \end{cases}$$

eseguimo il rotore delle prime due

$$\begin{cases} \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{H} = 0 \\ \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{H} = \sigma \cdot \nabla \wedge \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{E} \end{cases}$$

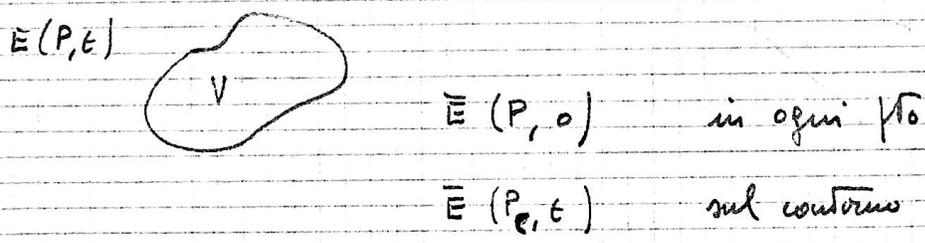
esprimiamo in altro modo $\nabla \wedge \nabla$

$$\begin{cases} -\nabla^2 \vec{E} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) & \text{la prima solo in } \vec{E} \\ -\nabla^2 \vec{H} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 & \text{o anche solo in } \vec{H} \end{cases}$$

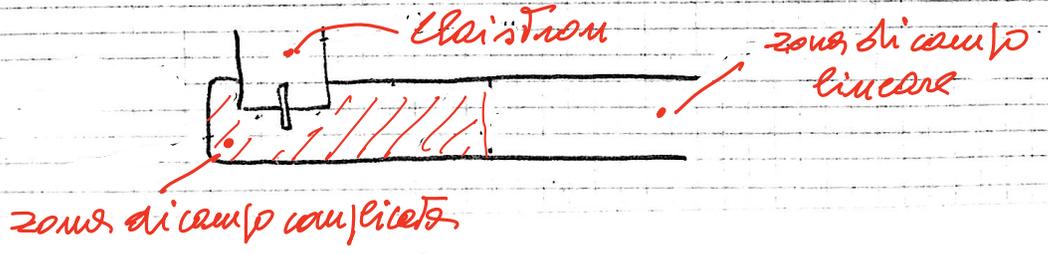
$$\begin{cases} -\nabla^2 \vec{E} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\rho}{\epsilon} \\ -\nabla^2 \vec{H} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

= 0 se senza cariche - In genere
Tutte a zero con $\rho =$
= costante di rilassamento

- osserviamo che queste contengono né più né meno ciò che dicono le equazioni di Maxwell. Quest'ultima non perdono interesse perché \vec{H} ed \vec{E} sono mutuamente legati e sono proprio loro che ci danno questi legami.
- Come visto non è grave restrizione supporre $\rho = 0$, quindi le due equazioni sono formalmente identiche. Invece di usare sempre \vec{E} e \vec{H} metteremo \vec{M} o M dove al posto di \vec{H} ora immaginiamo \vec{E} ora \vec{H} ; ciò per semplicità di scrittura.
- Generalmente il problema che ci si pone a questi punti è quello di integrare l'equazione. Non lo faremo per due ragioni:
 - a) la equazione è molto complicata
 - b) le condizioni al contorno altrettanto, infatti poiché è alle differenze parziali bisogna conoscere



- allora si esaminano in bianco "classi di soluzioni" utili in pratica tenendo conto che la soluzione generale è una loro combinazione lineare [non faremo questa seconda parte]. Infatti per esempio in una guida d'onda poco ci interessa il complicato campo vicino alla sorgente, ma quello che si ha regolare dopo una certa distanza. Per tenere conto del primo si può ad esempio introdurre un rendimento



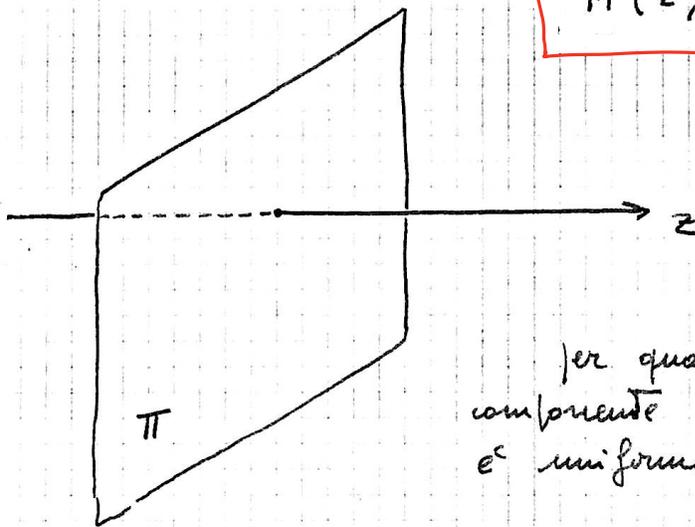
Riscriviamo dunque la nostra equazione

(69)

$$-\nabla^2 \bar{M} + \mu \sigma \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial t^2} = 0$$

Supponiamo e vediamo le conseguenze della esistenza di una soluzione del tipo

$$\bar{M}(z, t)$$



per quanto ipotizzato ogni componente del campo in π è uniforme (dipende solo da t)

Questo fatto lo possiamo imporre scrivendo

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

da cui

$$\nabla^2 M = \cancel{\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}$$

sostituendo in \bullet $\left(v = \frac{1}{\mu \varepsilon} \right)$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial M}{\partial t} = 0$$

Per proseguire ammettiamo che $M(z, t)$ sia a variabili separate, cioè si possa scrivere

$$M(z, t) = f_1(z) \cdot f_2(t) \quad \Delta$$

ci sono da risolvere due tipi di problemi:

a) vedere se ammette questo tipo di soluzione

b) " " " " " " " " (questo non lo facciamo)

Sostituendo la Δ in quella incompiuta

(90)

$$\ddot{f}_2 \cdot \ddot{f}_1 - \frac{1}{v^2} \cdot \ddot{f}_1 \cdot \ddot{f}_2 - \mu \sigma \dot{f}_1 \cdot \dot{f}_2 = 0 \quad \text{dividiamo per } \dot{f}_1 \cdot \dot{f}_2$$

$$\frac{\ddot{f}_1}{\dot{f}_1} - \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{f}_2}{\dot{f}_2} - \mu \sigma \frac{\dot{f}_2}{\dot{f}_2} = 0$$

dipende solo da f_1
quindi è funzione solo
di z

dipende solo da f_2 quindi è
funzione solo di t



possiamo scrivere: $\varphi_1(z) + \varphi_2(t) = 0 \quad \forall z, \forall t$

ne segue subito che può esistere solo se φ_1 e φ_2 sono costanti - allora possiamo scrivere supponendo $\varphi_2 = K^2$

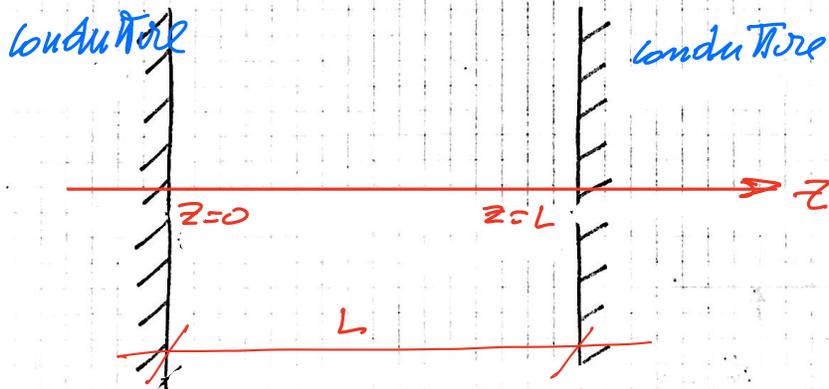
$$\left[\begin{array}{l} \ddot{f}_1 = -K^2 f_1 \quad * \\ \frac{1}{v^2} \ddot{f}_2 + \mu \sigma \dot{f}_2 + K^2 f_2 = 0 \end{array} \right] \quad \circ$$

queste le sappiamo integrare sempre, quindi il problema è appunto questo tipo di soluzione - Poiché ora siamo con derivate ordinarie, le condizioni al contorno sono un complesso di condizioni di estremità: modo - la * per es. richiede di conoscere f_1 e \dot{f}_1 nell'origine -

Generalmente K^2 non può assumere tutti i valori, ma un insieme numerabile, discreto e ciò è dovuto alle condizioni al contorno "vere" -

Vediamo un esempio

Prendiamo le 0 di eq. precedente e supponiamo $M(z,t) = E_x$
 e di essere in questa regione di spazio (7)



E_x è nullo in prossimità delle pareti: $E_x = f_1(z) \cdot f_2(t)$

$$E_x = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} z=0 \\ z=L \end{cases} \quad \forall t$$

integrando l'equazione

$$f_1(z) = A \sin Kz + B \cos Kz$$

ponendo $z=0$, $f_1=0 \Rightarrow \boxed{B=0}$

" $z=L$, $f_1=0 \Rightarrow A \sin KL = 0$ — $A=0$ banale

$KL = n\pi \rightarrow$
 $\rightarrow \boxed{K = \frac{n\pi}{L}}$

Qui si vede ancor meglio che la trasmissione di onde, se ci sono condizioni al contorno, è di tipo modale (K può assumere valori discreti)

Vediamo ora di attingere nuove informazioni dalle equazioni di Maxwell ricordando che vale

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \otimes$$

Per la prima di Maxwell ricordando la forma del rotore. (72)

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (\nabla \wedge \vec{E})_z = 0 \quad \text{per le } \otimes$$

per Maxwell $(\nabla \wedge \vec{E})_z = -\mu \frac{dH_z}{dt} = 0 \rightarrow H_z = \cos t$

(rispetto a t) quindi campo TM

$H_z = H_z(z)$ e per quel che ci interessa $H_z = 0$

con identico ragionamento $(\nabla \wedge \vec{H})_z = 0 \rightarrow$

$$\sigma E_z + \varepsilon \frac{dE_z}{dt} = 0$$

se è dielettrico ($\sigma = 0$) ne segue $E_z = 0$ campo TEM

se è conduttore $E_z = E_{z0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$ dove $E_{z0} = E_{z0}(P)$

quindi dopo un po' anche qui $E_z = 0$

Concludendo la conseguenza di avere un'ortogonale

$$\vec{H}(z, t) \text{ e } \rightarrow H_z = E_z = 0$$

(per quanto riguarda le parti variabili)

perciò manca la derivata prima

Studiamo ora il mezzo dielettrico ^{senza cariche}, ma con altre ipotesi -

Supponiamo che sia un TEM, cioè

$$H_z = E_z = 0$$

qui intendiamo ora il campo globale

NB qui non vale più $M(z, \epsilon)$; abbiamo una limitazione del campo lungo l'asse z , ma guadagniamo (lo vedremo subito) generalità nel piano \perp a z

L'equazione è

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = 0 \quad \square$$

ricordando l'espressione del rotore e Maxwell

$$\begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{pmatrix}$$

lungo z per Maxwell

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Poiché non ci sono cariche

$$[\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0]$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3') \quad (74)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0 \quad (2')$$

da cui

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sostituendo nella} \quad \square$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

analogamente per la E_y , le (4) e (5) sono formalmente identiche

Concludendo, la conseguenza di avere supporto

$$H_z = E_z = 0 \quad \text{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = 0$$

e cioè formalmente l'equazione di Hume, ma questa volta

$$M = M(x, y, z, t) \quad \text{e non} \quad M(z, t)$$

quindi questo caso è più generale -

30-1-69

75

abbiamo visto che da $H_z = E_z = 0$ in un dielettrico senza cariche segue

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dove } M = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix}$$

questa equazione e' risolta da

$$M = M_d(x, y, a) + M_i(x, y, b)$$

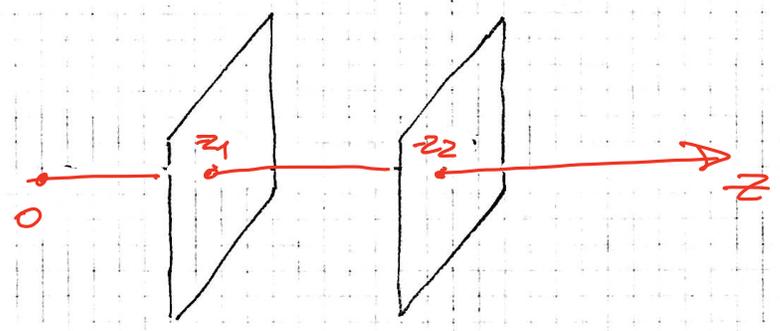
dove $a = z - vt$

$b = z + vt$

per dimostrare che e' soluzione sostituiamo e verificiamo. Cominciamo ad eseguire le derivate

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{\partial M_d}{\partial a} + \frac{\partial M_i}{\partial b} ; & \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 M_d}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 M_i}{\partial b^2} \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial M_d}{\partial a} (-v) + \frac{\partial M_i}{\partial b} v ; & \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} &= v^2 \left(\frac{\partial^2 M_d}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 M_i}{\partial b^2} \right) \end{aligned} \right.$$

sostituendo si vede che viene proprio una identita'

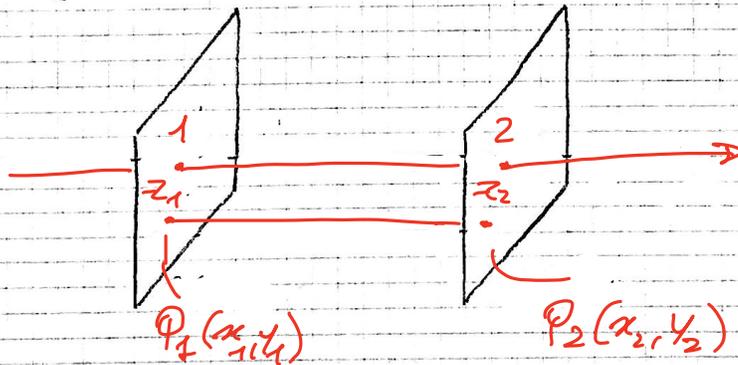


questi due termini esprimono il fatto che un'onda si propaga verso il + di z e l'altra in direzione contraria.

In particolare per M_d cio' significa che la distribuzione di campo al tempo t_1 e' uguale a quella che ho al tempo t_2 rispettivamente nei punti z_1 e z_2 , dove $t_2 - t_1$ e' il tempo necessario per percorrere $z_2 - z_1$ alla velocita' v , cioe'

$$v = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \quad *$$

(76)



$$a_1 = z_1 - vt_1$$

$$a_2 = z_2 - vt_2$$

$$a_1 - a_2 = z_2 - z_1 - v(t_2 - t_1) = 0$$

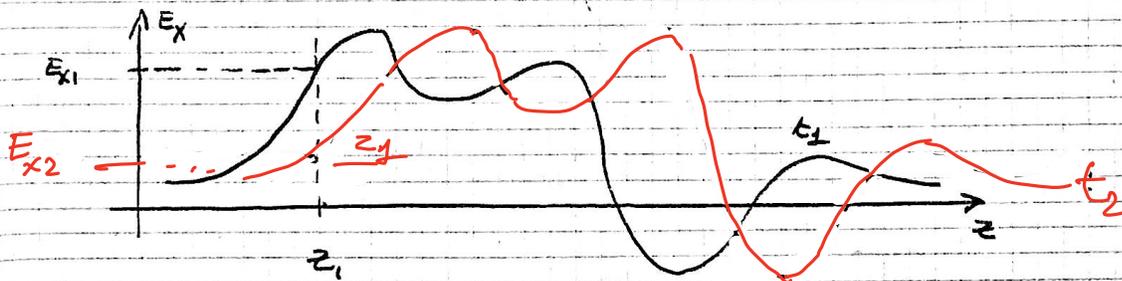
per la *

da cui $a_1 = a_2$

quindi $M_1 = M_2$

Supponiamo che $M_1 = 0$ e di poter misurare il campo in un certo pt ad un dato istante. Se misuriamo dopo un pt' troviamo la stessa distribuzione traslata dello spazio per un certo $spazio$ con velocità v .

Ad un dato istante lungo P_1, P_2 sono rilevare il campo. Rilevo ad esempio E_x



al tempo t_1 rilevo una arbitraria configurazione

al tempo t_2 la configurazione non è più arbitraria ma legata a quella in t_1 .

In z_1 all'istante t_1 vedo E_{x1}

" " " " t_2 " E_{x2} e con via

ora teniamo conto delle 0 e *

(78)

$$\frac{\partial E_{yd}}{\partial a} + \frac{\partial E_{yi}}{\partial b} = -\mu \frac{\partial H_{xd}}{\partial a} + \mu \frac{\partial H_{xi}}{\partial b}$$

confrontiamo

$$\frac{\partial H_{xd}}{\partial a} + \frac{\partial H_{xi}}{\partial b} = \frac{1}{R_0} \left(-\frac{\partial E_{yd}}{\partial a} + \frac{\partial E_{yi}}{\partial b} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_{xd}}{\partial a} + \frac{\partial E_{xi}}{\partial b} = R_0 \left(\frac{\partial H_{yd}}{\partial a} - \frac{\partial H_{yi}}{\partial b} \right)$$

confrontiamo

$$-\frac{\partial H_{yd}}{\partial a} - \frac{\partial H_{yi}}{\partial b} = \frac{1}{R_0} \left(-\frac{\partial E_{xd}}{\partial a} + \frac{\partial E_{xi}}{\partial b} \right) \quad (1)$$

modifichiamo la (1)

$$-\frac{\partial E_{xd}}{\partial a} + \frac{\partial E_{xi}}{\partial b} = R_0 \left(-\frac{\partial H_{yd}}{\partial a} - \frac{\partial H_{yi}}{\partial b} \right)$$

sommando

$$\frac{\partial E_{xi}}{\partial b} = -R_0 \frac{\partial H_{yi}}{\partial b} \rightarrow \frac{d}{db} (E_{xi} + R_0 H_{yi}) = \Rightarrow \text{a parte}$$

un termine che non dipende da b

$$\frac{E_{xi}}{H_{yi}} = -R_0$$

sottraendo

$$\frac{\partial E_{xd}}{\partial a} = R_0 \frac{\partial H_{yd}}{\partial a}$$

$$\frac{E_{xd}}{H_{yd}} = R_0$$

moltiplichiamo la (2)

$$-\frac{\partial E_{yd}}{\partial a} + \frac{\partial E_{yi}}{\partial b} = R_0 \left(\frac{\partial H_{yd}}{\partial a} + \frac{\partial H_{xi}}{\partial b} \right)$$

sommando

$$\frac{E_{yi}}{H_{xi}} = R_0$$

sottraendo

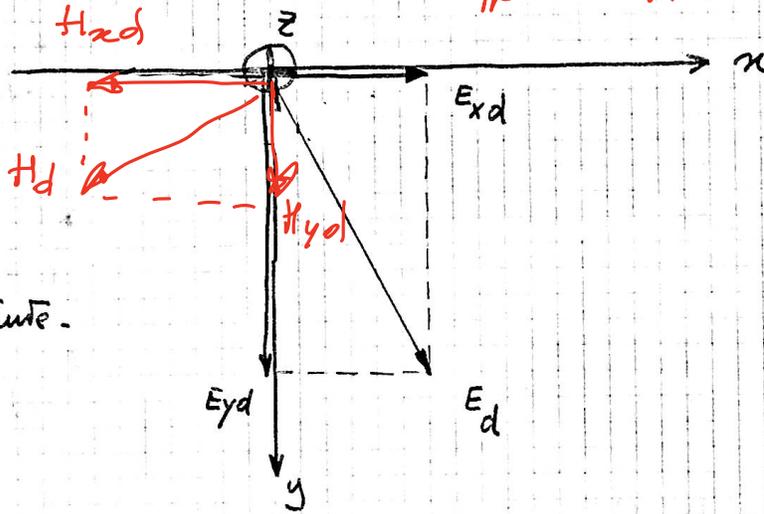
$$\frac{E_{yd}}{H_{xd}} = -R_0$$

si scopre che sono legate assieme le componenti dell'onda
diretta con assi misti (x e y non xx o yy) (79)

sull'onda x y z destrorsa, per la diretta abbiamo

sull'onda $|R_0| = \frac{1}{2}$

questo grafico
vale in un W_0
ad un dato istante.



Dalla similitudine nasce $\hat{H}_d \hat{E}_d = 90^\circ$ e che

$E_d H_d z$ destrorsa

Esaminando l'onda inversa abbiamo risultati analoghi
(σ e' cambiato, il disegno e' come questo ma ribaltato)

Conclusioni

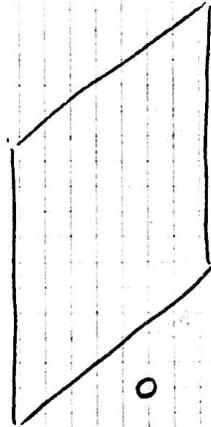
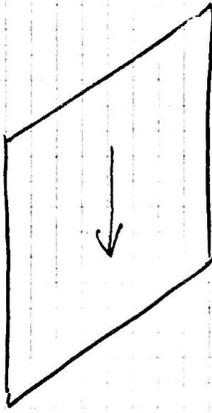
E H trasversali (\perp a z) sempre

H E totali non sempre ortogonali

Lo si può vedere col grafico in un caso semplificato

$$E_{yi} = 0$$

corrente



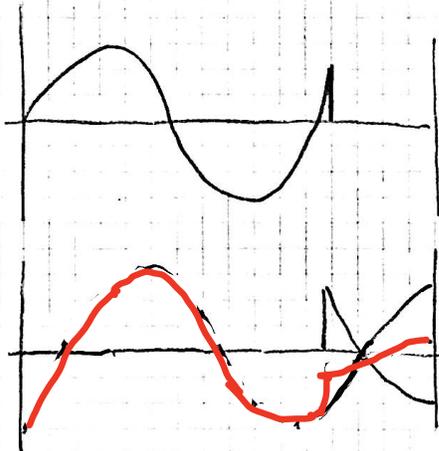
(81)
viene largamente
riflettente

- 1) il fronte arriva sino ad o [c'è solo M_d]
- 2) l'onda si riflette [c'è una regione di spazio in cui c'è M_d e M_i]
- 3) l'onda riflessa colpisce il generatore [qui il campo magnetico è imposto] per cui viene riflessa totalmente ... e così via
ora rimane difficile dire chi è M_d e chi M_i

le cose si complicano se al di là di o si ha dissipazione -
Però quando c'è dissipazione si è certi che il fenomeno si stabilizza -

Se E_x è sinusoidale si ha un campo stazionario sinusoidale
somma di tutte le sinusoidi riflesse che si generano (è una
sinusoide perché le onde riflesse hanno la stessa frequenza
di quella incidente). Prima del regime si ha

al tempo



intorno la
risultante

Dopo un po' di tempo ci si stabilisce sulla sinusoidale
(perché $w = \cos t$) (82)

Se generasse onde riflesse con w diverse il mezzo
non sarebbe più ~~sinusoidale~~ e il mezzo non lineare -

Per verificare che la soluzione ora detta ξ , la ipotizzo e
sostituisco nell'equazione, ottengo una identità -

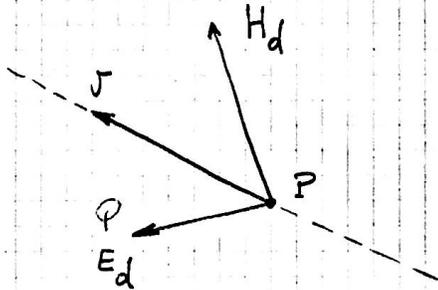
Concludendo: abbiamo visto $M = M_d + M_i$ una
 M_d non è quella che viene annullata: gli ostacoli -

M_d è la Σ di tutti i contributi in una direzione (parte
generata e parte riflessa) -

10-2-69

(83)

Ricordiamo che E_d , H_d , J formano una terna destrorsa

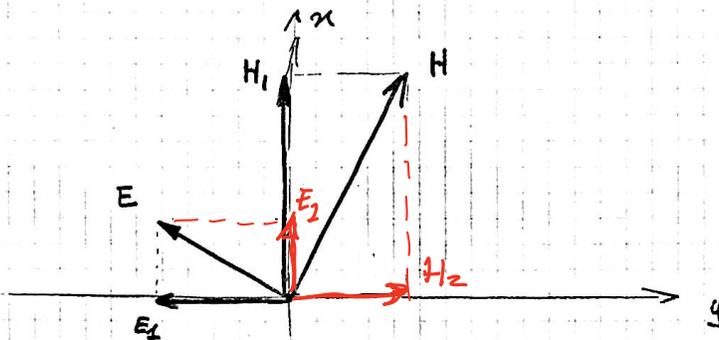


Supponiamo di essere fidi in P e di osservare in presenza di onde piane cosa descrive l'estremo q di E_d .

In generale esso può descrivere una curva arbitraria.

Caso particolare sarebbe se il q descrivesse una retta [onda piana rettilineamente in quel q]. Se in tutta una regione di spazio le varie traiettorie sono rette parallele, si dice che la regione è retta di un'onda piana [ci può essere anche l'onda riflessa che qui trascuriamo per semplicità].

Infatti un'onda piana arbitraria si può sempre pensare come somma di due onde:



Vediamo ora di introdurre campi sinusoidali. Studieremo poi la riflessione e la rifrazione. Note il campo sinusoidale con Fourier otterremo un campo arbitrario.

NB Con campo sinusoidale intendiamo campo temporalmente sinusoidale [∃ campi con sola distribuzione spaziale sinusoidale]

Diciamo che il nostro campo è sinusoidale se preso

$$\vec{A}(P, t) = A_x(P, t) \cdot \vec{i} + A_y(P, t) \cdot \vec{j} + A_z(P, t) \cdot \vec{k} \quad (84)$$

si ha

$$A_z = A_{M_z}(P) \cdot \cos[\omega t - \varphi_z(P)] \quad z = x, y, z$$

Proprietà fondamentale è che l'estremo del vettore \vec{A} descrive una ellisse. Infatti risulta da due modi sinusoidali in piani \perp .

Esiste quindi un cilindro a sezione retta ellittica che contiene la traiettoria (e questo per tutte e tre le direzioni).

NB Ciò non vuol dire in generale che l'onda sia polarizzata ellitticamente (potrebbe per es. non essere un'onda piana). Ciò che noi osserviamo vale $\forall t_0$ per t_0 , ma può non avere relazione col t_0 successivo, se non di continuità.

Si ha polarizzazione ellittica se

- 1) si hanno onde piane
- 2) sul piano le ellissi hanno le stesse direzioni degli assi principali.

Condizioni sufficienti per avere un simile campo sono: mezzo lineare, sorgenti sinusoidali.

Si possono introdurre le notazioni simboliche, allora si ragiona in questi termini:

$$A_z(P, t) = A_{M_z}(P) \cos[\omega t - \varphi_z(P)] = \text{Re} [\dot{A}_{M_z}(P) e^{j\omega t}]$$

dove $\dot{A}_{M_z}(P) = A_{M_z}(P) \cdot e^{j\varphi_z(P)}$

• Ciò ci è permesso dal fatto che siamo in presenza di sistemi lineari a coefficienti reali per cui dato $s = \sigma + j\omega$

non esiste proprietà che non sia comune a σ e ω (85)
 In somma le due parti, la reale e la immaginaria, si
 comportano in egual modo e distintamente -

Col sistema simbolico conoscere $A_z(p, t) \equiv$ conoscere
 $\dot{A}_{Mz}(p)$ e $e^{j\omega t}$ e poiché ω normalmente è noto
 a priori mi basta conoscere $\dot{A}_{Mz}(p)$ -

Vediamo di introdurre semplificazioni nella notazione -
 Pensiamo al vettore complesso $\vec{A}(p)$ tale che

$$\vec{A}(p) = \dot{A}_{Mx}(p) \cdot \vec{i} + \dot{A}_{My}(p) \cdot \vec{j} + \dot{A}_{Mz}(p) \cdot \vec{k}$$

• qualora sia chiaro ^{di} che cosa si tratta si può sottintendere
 il \vec{H}_0 -

Suffociamo di avere (cioè usiamo il metodo simbolico)

$$\begin{cases} \vec{A}(p, t) = A_x(p, t) \cdot \vec{i} + A_y(p, t) \cdot \vec{j} + A_z(p, t) \cdot \vec{k} \\ A_z(p, t) = A_{Mz}(p) \cdot \cos[\omega t - \varphi_z(p)] \end{cases}$$

Vediamo come diventano le nostre equazioni; cominciamo con lo studio della derivata

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(p, t) = \sum_r \frac{\partial A_r}{\partial t} \vec{r} \quad \text{o anche}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(p, t) = \text{Re} [j\omega \dot{A}_z] \quad \text{levando Re ed } e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{A}} = j\omega \dot{\vec{A}}$$

NB attenzione alla simbologia!

di qui se voglio il vettore, moltiplico per $e^{i\omega t}$ e
ne prendo la parte reale - (86)

Studio del rotore Ricaviamo le componenti di $\nabla \bar{A}$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(P,t) & A_y(P,t) & A_z(P,t) \end{vmatrix}$$

Si vuol dimostrare

$$\text{Re} \left\{ (\nabla \bar{E}) e^{i\omega t} \right\} = (\nabla \bar{E})_z$$

$$\underbrace{\left[(\nabla \bar{A})_x \right]}_A = \frac{\partial A_{Mz}}{\partial y} \cos[\omega t + \varphi_z(P)] - A_{Mz} \sin[\omega t + \varphi_z(P)] \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} -$$

$$\underbrace{- \frac{\partial A_{My}}{\partial z} \cos[\omega t + \varphi_y(P)] + A_{My} \sin[\omega t + \varphi_y(P)] \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}}_B$$

mettiamo tutto in termini di coseno

$$(\nabla \bar{A})_x = A - B + A_{Mz} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \cos\left[\omega t + \varphi_z + \frac{\pi}{2}\right] - A_{My} \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \cos\left[\omega t + \varphi_y + \frac{\pi}{2}\right]$$

col metodo simbolico possiamo pensare

$$(\nabla \bar{A})_x = \text{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left[\underbrace{\frac{\partial A_{Mz}}{\partial y} e^{i\varphi_z}}_1 + A_{Mz} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} e^{i(\varphi_z + \frac{\pi}{2})} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial A_{My}}{\partial z} e^{i\varphi_y} + A_{My} \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} e^{i(\varphi_y + \frac{\pi}{2})} \right\}$$

Ma tutto ciò entro parentesi (soppimendo Re e $e^{i\omega t}$)
 non è altro che questo

$$\begin{array}{|c|} \hline \vec{r} \\ \hline \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \\ \hline \vec{A}_x \quad \vec{A}_y \quad \vec{A}_z \\ \hline \end{array}$$

* Vediamo per es. la componente lungo x esaminandone per semplicità solo il primo addendo

$$\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{A_{Mz} e^{j\varphi_z}}_{\text{è un prodotto}} = \frac{\partial}{\partial y} A_{Mz} e^{j\varphi_z} + j A_{Mz} e^{j\varphi_z} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} =$$

$$= \boxed{\frac{\partial}{\partial y} A_{Mz} e^{j\varphi_z}} \quad 1 \quad + \quad \boxed{A_{Mz} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} e^{j(\varphi_z + \frac{\pi}{2})}} \quad 2$$

ma questi non sono altro che i due termini seguenti in pagina precedente -

Discorso analogo vale per tutti i termini mancanti

NB è fondamentale ricordarsi che $\varphi_z = \varphi_z(P)$ -

Essenzialmente questo fatto si spiega osservando che c'è una interazione tra diagramma temporale e spaziale: la dipendenza di φ dal \vec{r}_0 provoca uno sfasamento temporale dei vettori in P_1 contigui. Se φ è invariante non si hanno sfasamenti temporali -

Vediamo con le nuove convenzioni come si scrivono le equazioni del campo

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \dot{\vec{E}} = - \frac{\partial \dot{\vec{B}}}{\partial t}$$

↓

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}}$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + \frac{\partial \dot{\vec{D}}}{\partial t}$$

↓

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}}$$

Introduciamo la linearità

(88)

$$\nabla \wedge \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H}$$

$$\nabla \wedge \bar{H} = (\sigma + j\omega \epsilon) \bar{E}$$

Per il dielettrico

$$\nabla \wedge \bar{E} = -\mu \frac{d\bar{H}}{dt}$$

$$\nabla \wedge \bar{H} = \epsilon \frac{d\bar{E}}{dt}$$

de poniamo $\sigma + j\omega \epsilon = j\omega \epsilon_c$

si ha

$$\nabla \wedge \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H}$$

$$\nabla \wedge \bar{H} = j\omega \epsilon_c \bar{E}$$

lineare

[simbolico]

Vediamo per il dielettrico

$$\nabla \wedge \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H}$$

$$\nabla \wedge \bar{H} = j\omega \epsilon \bar{E}$$

dielettrico

[simbolico]

Le due equazioni diventano molto simili - Le due equazioni si vanno così integrare - Ricordiamo che il caso lineare non era generalmente solubile dato la presenza della derivata prima - Ora lo è nel caso sinusoidale - Con Fourier si trovano tutti gli altri.

In pratica uno risolve il campo dielettrico e alla fine (per quanto detto nella lin. coeff. reali) sostituisce ϵ con ϵ_c .

Vediamo i modi fin' comuni di scrivere ϵ_c

$$a) \quad \epsilon_c = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)$$

si vede subito come nei materiali che si notano poco dal dielettrico $\epsilon_c \approx \epsilon$ - Si ha l'impressione solamente della aggiunta di un termine correttivo -

Inoltre si vede molto bene come la definizione di buon dielettrico ϵ' è legata non solo a σ e ϵ ma anche a ω - Qualunque sia il materiale, esiste sempre ω tale per cui diventa dielettrico -

$$b) \quad \epsilon_c = \epsilon_0 (\epsilon' - j \epsilon'') \quad \text{confrontando con la espressione precedente}$$

$$\epsilon' = \epsilon_r$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}$$

di qui

$$\frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\epsilon \omega} = \tan \delta$$

(per le proprietà dei n° complessi)

questo $\tan \delta$ è proprio quello del materiale -

3-3-63

(90)

Abbiamo visto come si inquadra il problema della frustrazione simbolica dei campi.

L'uso del metodo simbolico consente di superare la integrazione della equazione.

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0$$

ricombinandola in

$$(*) \quad \nabla^2 \bar{E} = h^2 \bar{E} \quad \text{che è affrontabile con l'analisi.}$$

Il passaggio si fa ponendo

$$h^2 = -\mu \epsilon \omega^2 + j \omega \mu \sigma \quad (1)$$

La (*) è quindi l'equazione fondamentale;

h^2 nel caso dielettrico è

$$h^2 = -\mu \epsilon \omega^2$$

L'introduzione di mezzi non dielettrici si fa introducendo al posto della $\epsilon \rightarrow \epsilon_c$

$$\epsilon_c = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)$$

$$|\epsilon_c| = \epsilon \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}}$$

La presenza di σ in un materiale in cui \exists campo elettromagnetico, se tale campo ha in ogni pt andamento sin, è da intendersi come correzione dielettrica.

La h è importante perché contiene tutte le caratteristiche della propagazione ed è spesso indicata come

$$h = \alpha + j\beta \quad (1)$$

si tratta di trovare α e β

Basterà identificare la (1) con la (2) elevata al quadrato - Si ha:

$$h^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma \\ \alpha^2 - \beta^2 = -\mu\epsilon\omega^2 \end{cases}$$

$$\text{Si ha } \beta = \frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}$$

$$4\alpha^2 - \omega^2\mu^2\sigma^2 + 4\mu\epsilon\omega^2\alpha^2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \left[-2\mu\epsilon\omega^2 \pm \sqrt{(2\mu\epsilon\omega^2)^2 + 4\omega^2\mu^2\sigma^2} \right] =$$

$$= -\frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\omega^2\mu^2\sigma^2}{4\mu^2\epsilon^2\omega^4}} \right] =$$

$$= -\frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \right] =$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{|\epsilon_c|}{\epsilon} - 1} \quad (\bullet)$$

Intre le volte che vale il + per α vale il + anche per β .

$$\beta = \pm \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}} \quad (\square)$$

Ma le consideriamo col segno +

Ricordiamo che

(92)

$$\frac{|E_c|}{E} = \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}}$$

Vediamo cosa accade per $\omega = 0$ nelle (a) e (b)

Si può infatti scrivere:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega^2 \frac{|E_c|}{E} - \omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

$$\text{per } \omega \rightarrow \infty \quad \frac{|E_c|}{E} \rightarrow 1 \Rightarrow \begin{aligned} \beta &\rightarrow \omega \sqrt{\mu \epsilon} \\ \alpha &\rightarrow \end{aligned}$$

4-3-69

partiamo da $\nabla^2 \bar{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0$

in regime sinusoidale $\nabla^2 \bar{E} = h^2 \bar{E}$ [dove $h = \alpha + j\beta$]

di qui $\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{|E_c|}{E} - 1} \right) \\ \beta &= \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{|E_c|}{E}} \right) \end{aligned} \right.$ con $|E_c| = E \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}}$

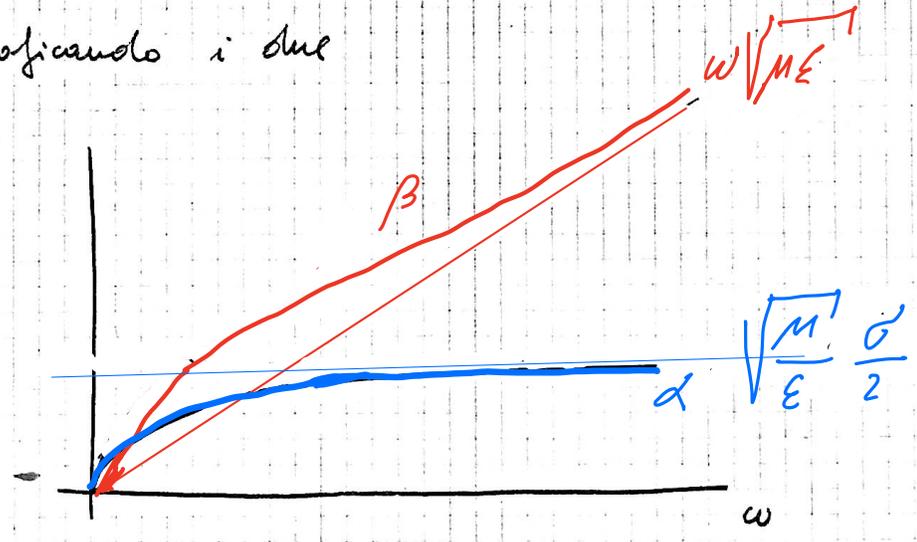
per ω grande $\beta \rightarrow \omega \sqrt{\mu \epsilon} = K$

quindi K è anche il β del dielettrico

di qui poiché $2\alpha\beta = \mu\sigma\omega$

$$\alpha = \frac{\mu \sigma \omega}{2\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sigma}{2} = \alpha$$

graficando i due



• Quanto più un materiale è dielettrico tanto più bassa è α e tanto più resistivo è β

Vediamo una applicazione alle onde piane -

(Ricordiamo che l'impedire la componente secondo z nulla porta ad una semplificazione del ∇² nella derivata seconda di una qualsiasi componente del campo rispetto alla direzione di propagazione, cioè qui si arriva a)

$$\frac{d^2 \bar{E}}{dz^2} = h^2 \bar{E} \quad \text{questa la sappiamo integrare}$$

NB qui $\bar{H}(x, y, z)$

$$\bar{H} = \bar{H}_d(x, y) e^{-hz} + \bar{H}_i(x, y) e^{hz}$$

formalmente è identica a quella per il dielettrico

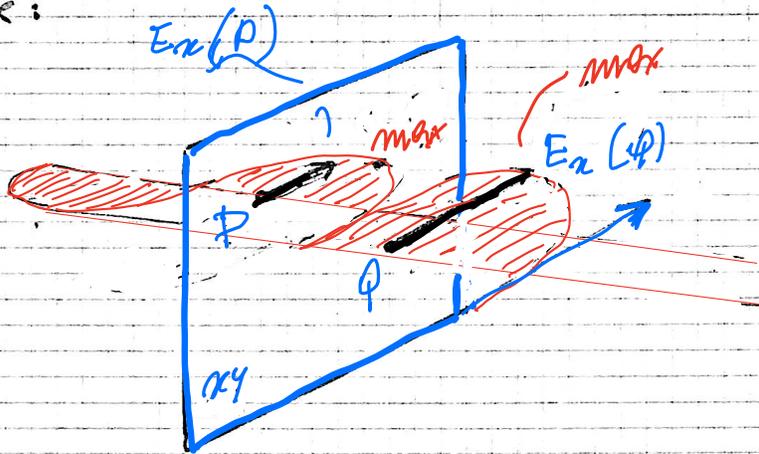
- si scopre che α è un coefficiente di attenuazione
- " " " β " " " " " rotazione di fase

di qui si può ricavare il reale comportamento nel tempo (94)
 di π

NB Ricordiamo che siamo sempre nell'ambito del metodo simbolico -

~~Il~~ π_d è complesso: vuol dire che spostandoci sul piano \perp a z si ha un cambiamento di fase -

Per capire meglio la cosa ragioniamo solo su π_d (cose analoghe valgono per π_i) e vediamo graficamente:



Si vede chiaramente come cambia sia modulo che fase -

Per le convenzioni adottate $e^{j\omega t}$ è sottinteso (questo è la ragione per cui in π_d non compare il tempo)

i vari esponenti sono
$$e^{j\omega t} \quad e^{-j\beta z} \quad e^{j\varphi_d(x,y)} \quad e^{-\alpha z} \quad \Rightarrow$$

$$M(x,y,z,t) = \left| M_d(x,y) \right| e^{-\alpha z} \cos \left[\omega t - \beta z + \varphi_d(x,y) \right] +$$

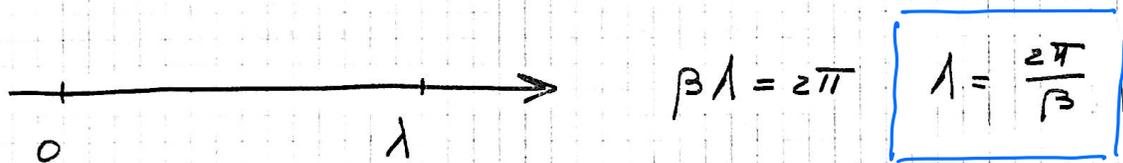
$$+ \left| M_i(x,y) \right| e^{\alpha z} \cos \left[\omega t + \beta z + \varphi_i(x,y) \right]$$

Si vede di aver di fronte un fenomeno propagativo -

possiamo studiare su una rete con n, y cost (più facile estendere) - Si sape che su questa rete si ha propagazione sinusoidale attenuata. (95)

Introduciamo ora λ distanza fra due zeri crescenti (con ciò λ è solo funzione della parte sinusoidale) -

Spesso ci si riferisce al dielettrico equivalente



Velocità di fase Velocità con cui transitano gli zeri lungo l'asse z per uno che sta fermo sullo stesso.

$$\omega t_1 - \beta z_1 + \varphi_d(n, y) = \frac{\pi}{2}$$

fotografiamo la situazione in t_2 tale che si abbia la stessa cosa [$t_2 > t_1$]

$$\omega t_2 - \beta z_2 + \varphi_d(n, y) = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega(t_2 - t_1) - \beta(z_2 - z_1) = 0$$

$$\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$v_f = 1 f$$

nel mezzo non dielettrico

(96)

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

velocità di fase

$$v_f = \frac{2\pi}{\beta} f = 1 f$$

studiamo $v_f(\omega)$

$$v_f = \frac{\omega \sqrt{2}}{\omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}}}$$

per ω abbastanza elevate $\left| \frac{\epsilon_c}{\epsilon} \right| \approx 1$

e quindi ci si riduce a

$$v_f \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v$$

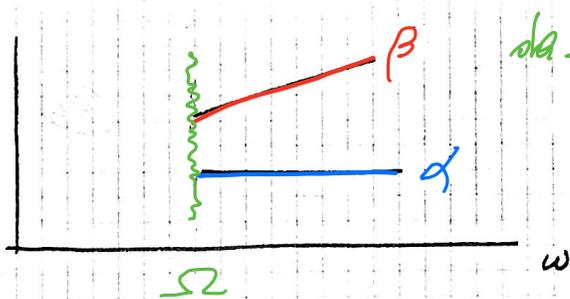
velocità onda piana nel mezzo dielettrico

Si vede quindi che anche in un conduttore se ω è alta

$$v_f \approx v$$

mezzo dielettrico equivalente: μ , ϵ e $\sigma = 0$

Ciò implica che se abbiamo una onda qualunque con un determinato contenuto armonico (spettro limitato) ma al di sopra di una certa ω limite, il mezzo gode della stessa proprietà del dielettrico equivalente tranne che c'è una attenuazione identica per tutte le frequenze \rightarrow il segnale è indistorto



da Ω in su le caratteristiche sono lineari

(97)

Ω dipende da σ - Più piccola è σ , più piccolo è Ω .

Un'onda che occupa tutto lo spettro finisce per farsi distorta.

Esaminiamo meglio le cause di deformazione

1) v_f non costante con ω

$$v = v(\omega)$$

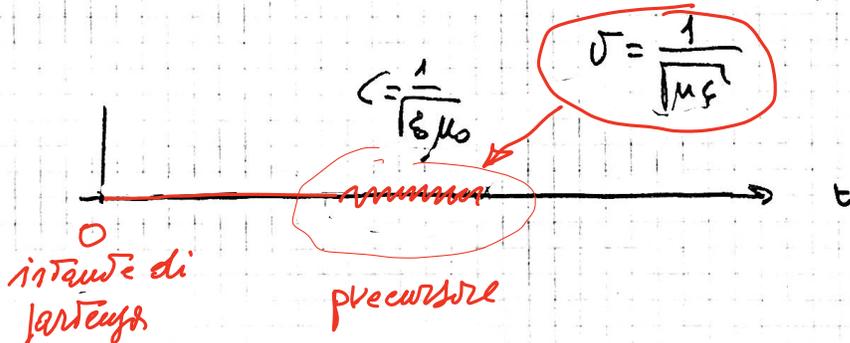
la parte in alta frequenza non è deformata.

Se abbiamo un gradino la sua parte in alta frequenza arriva indeformata con la velocità della luce nel vuoto.

La bassa frequenza arriva deformata con una v minore caratteristica di quel mezzo.

Purtroppo la parte h. f. è la meno importante del gradino.

Un osservatore distante vede nel tempo



Quindi da quanto visto

(98)

$$\frac{v_p}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}}}$$

memoria a mo' di fattore correttivo.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \sqrt{\frac{2\pi \sqrt{\epsilon_2}}{\omega \sqrt{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}}}} = \frac{v_p}{f} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}}} = \lambda$$

ma $\frac{v_p}{c}$ è il λ se $v_p = c$ cioè quello nel diel.
equivalente

se lo chiamiamo $\lambda_0 = \frac{v_p}{f}$ ho

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}}}$$

Inseriamo che il tipo di campo misto ora è singolare: per
in un mezzo con perdite si propaga un'onda con $E_z = 0$.
Sarebbe molto facile pensare ad attenuazioni nella dire-
zione di propagazione. Invece si hanno cadute di tensio-
ne nel piano xy e non lungo z .

- per una certa ω si ha un buon conduttore se

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$$

- per una certa ω si ha un buon dielettrico se

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1 \quad \text{ricordiamo } |\epsilon_c| = \epsilon \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}}$$

5-3-69

(99)

Riprendiamo:

Buon conduttore

$$\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \gg 1$$

Buon dielettrico

$$\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \ll 1$$

se ricordiamo che nel dielettrico

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \implies \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \quad \text{nel conduttore}$$

Con sola onda diretta e am: / solo $E_x \neq 0$

$$M = M_d(x, y) e^{-hz} \begin{cases} \rightarrow E_x = E_{xd}(x, y) e^{-hz} \\ \rightarrow H_y = H_{yd}(x, y) e^{-hz} \end{cases}$$

1

in riferimento alla sola diretta $\frac{\partial M}{\partial z} = -h M$ \times si ottiene

derivando la 1

con Maxwell

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

lungo y

$$-h E_x = -j \omega \mu H_y$$

si ha anche

$$\eta_c = \frac{E_x(x, y)}{H_y(x, y)} = \frac{E_x}{H_y} = \boxed{\frac{j \omega \mu}{h} = \eta_c}$$

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{j\omega\mu}{h} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{-\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{-\omega^2\mu^2}{-\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \quad \text{C.V.D.}$$

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{j\mu\omega}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}}}$$

infatti:

$$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_0(\epsilon' - j\epsilon'')$$

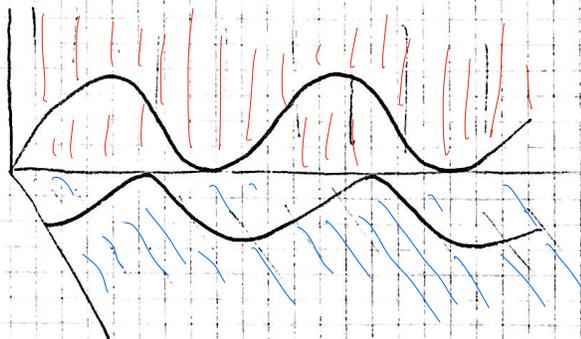
$$\Rightarrow \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

η_c pertinente al dielettrico equivalente \Rightarrow

$\frac{E_x}{H_y}$ che per la sola diretta $\equiv \frac{E}{H}$ come numeri

complessi hanno rapporto costante (complesso) plangolodi

Con ciò la \perp di E e H è conservata $\Rightarrow \eta_c$ esprime
uno sfasamento temporale di E, H



Buon conduttore $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$

(101)

$$\alpha = \frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{|\epsilon_c|}{\epsilon} - 1} = \quad (*)$$

con $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

se buon conduttore

$$\frac{|\epsilon_c|}{\epsilon} = \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \approx \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

includendo in (*)

$$(*) = \frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon}} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \epsilon \sigma}{2 \omega \epsilon}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

α esprime una reale attenuazione

• si sa che $e^{-\sigma t} \Rightarrow e^{-t/2}$

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

spessore di penetrazione

cioè ad $e^{-\alpha z}$ sostituisco $e^{-z/\delta}$

effetto pelle

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

δ è tabulato

l'effetto pelle cresce con la frequenza

Caso limite $\sigma = \infty \rightarrow \delta = 0$

in un conduttore perfetto il campo non entra (102)

Calcolo impedenza caratteristica

$$\eta_c = \frac{j\omega\mu}{h} = \frac{j\omega\mu}{\alpha + j\beta} = (*)$$

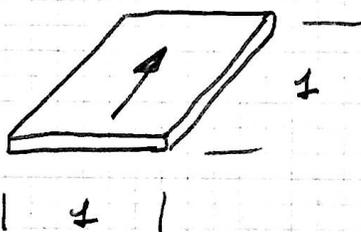
$$\beta = \frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{|\epsilon|}{\epsilon} + 1} \approx \frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

ma allora $\alpha = \beta$

$$\Rightarrow (*) = \frac{j\mu\omega}{\sqrt{\pi f \mu \sigma} (1+j)} = \frac{\omega\mu\delta}{1-j} = \frac{\omega\mu\delta}{2} (1+j) =$$

$$= \pi f \mu \delta (1+j) \frac{\sigma}{\sigma} = \frac{1}{\delta \sigma} (1+j)$$

Prendo un blocchetto di quel conduttore


$$R_s = \frac{\rho}{\sigma \delta} = \frac{1}{\sigma \delta}$$

R_s resistenza lungo la faccia

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \quad \text{coefficiente di } \eta_c \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_c = R_s (1+j)$$

cioè impedenza induttiva con resistenza e reattanza induttiva uguali numericamente a R_g - (103)

⇒ H ritarda di 45° rispetto a E

Il problema si impone supponendo le condizioni al contorno ma se il dielettrico fosse ideale -

Nel caso ideale si trova campo magnetico \vec{H} .

⇒ densità di corrente laminare

Lo spessore della guida deve essere maggiore di $3 \text{ o } 4 \delta$ altrimenti irradia -

Buon dielettrico

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$$

sempre

$$\alpha = \frac{K}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{|\epsilon_c|}{\epsilon} - 1}$$

dove $\frac{|\epsilon_c|}{\epsilon} = \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2$ serie

⇒ $\alpha = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{K}{2} \frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{K}{2} \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$

ne viene che per un certo K, cioè per un certo $\mu \epsilon \omega$, α è proporzionale a $\tan \delta$

Consideriamo

(10)

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{Z}{K} \frac{\epsilon'}{\epsilon''} = \frac{Z \sqrt{\epsilon'}}{\omega} \frac{\epsilon'}{\epsilon''} \quad (\square)$$

Porto $\sigma = \lambda_0 f$

nel dielettrico equivalente

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

NB

$$\lambda_0 = \lambda_0 \left(\frac{f}{f_0}\right)$$

$$(\alpha) = \frac{Z \lambda_0 f \epsilon'}{2\pi f \epsilon''}$$



$$\zeta = \frac{\lambda_0 \epsilon'}{\pi \epsilon''}$$

fattore di merito del dielettrico

ζ e' grande $\zeta \gg 1$

ζ cresce al crescere di ω

Vediamo ora β

$$\beta = \frac{K}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} =$$

$$= K \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}$$

sviluppo in serie

$$\beta \approx K \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 \right]$$



$K = \beta$ nel dielettrico puro ($\epsilon'' = 0$)

~~105~~ $\frac{1}{8} (\sqrt{\epsilon} \delta)^2$ fattore di correzione

(105)

Riprendiamo la velocità di fase

$$v_f = \frac{v \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}}} = \frac{v \sqrt{2}}{\sqrt{2 \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]}} \approx$$

$$\approx v \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]$$

sviluppo in serie

poiché

$$\sqrt{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}} = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2} = \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]$$

se usiamo un dielettrico con $\sqrt{\epsilon} \delta = 0,1$

v_f risulta ridotta di 0,001

$$v_f = v (1 - 10^{-3})$$

analogamente la lunghezza d'onda risulta più bassa che nel dielettrico equivalente

$$\mu_c = \sqrt{\frac{\mu_0^2 (1 + j \frac{\epsilon''}{\epsilon'})}{1 + (\frac{\epsilon''}{\epsilon'})^2}} \approx \mu_0 \sqrt{1 + j \frac{\epsilon''}{\epsilon'}} =$$

(106)

≈ 1

$$= \mu_0 \left[1 + \frac{1}{2} j \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right) \right]$$

as' sviluppato nel campo complesso -

anche nel caso dielettrico si trova un termine correttivo complesso \Rightarrow impedenza induttiva

— m — 000 —

Di questi fattori correttivi non teniamo conto

$$\nabla \cdot \epsilon E = \epsilon \nabla \cdot E + E \nabla \epsilon$$

$$\nabla \wedge \epsilon E = \epsilon \nabla \wedge E + \nabla \epsilon \wedge E$$

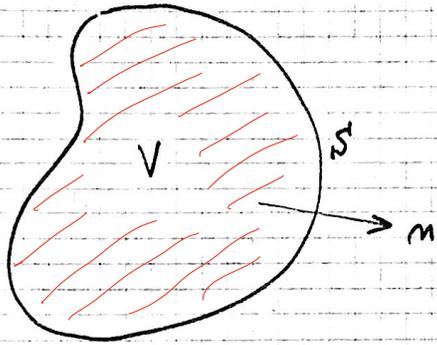
$$\nabla^2 a \cdot b = a \nabla^2 b + b \nabla^2 a + 2 \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_i}$$

$$\nabla \cdot \nabla \wedge A \equiv 0$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge A = \nabla \nabla \cdot A - \nabla \cdot \nabla A = \nabla \nabla \cdot A - \nabla^2 A$$

17-3-68

(107)



$$P(\epsilon) = \int_V \left[\bar{E} \cdot \left(\bar{J} + \frac{d\bar{D}}{dt} \right) + \left(\frac{d\bar{B}}{dt} \cdot \bar{H} \right) \right] dV =$$

potenza assorbita nel volume

$$= \int_V \left[\bar{E} \cdot (\nabla \wedge \bar{H}) - (\nabla \wedge \bar{E}) \cdot \bar{H} \right] dV =$$

$$= - \int_V \nabla \cdot (\bar{E} \wedge \bar{H}) dV = - \int_{S'} (\bar{E} \wedge \bar{H}) \cdot \bar{n} dS$$

proprietà matematica

poniamo $\bar{S} = \bar{E} \wedge \bar{H}$

quindi la potenza assorbita è il flusso di \bar{S}

\bar{S} vettore di Poynting.

NB ciò non implica che la potenza passante attraverso un elemento di superficie sia il vettore di Poynting in quel punto moltiplicato scalarmemente per dS (quella deve è una legge integrale).

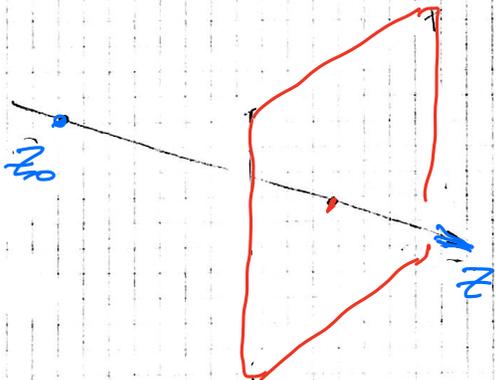
Infatti sono possibile \bar{S} + ∇ vettore solenoidale e i contorni formano lo stesso (in microonde trattano in ragione come se ...).

Discontinuità nella propagazione onde piane.

Caso generale (mezzo dielettrico)

" solenoidale (anche con conduttività)

Perché ciò che cambia è solo $\epsilon \leftrightarrow \epsilon_c$ facciamo una trattazione unica supponendo tutto dielettrico. (108)



Supponiamo di avere la sola onda diretta

$$\left(\begin{array}{l} E, H \perp z \\ E, H, z \text{ destrorsa} \end{array} \right)$$

in ogni z_0 , in ogni istante $\frac{E}{H} = \eta$

Vediamo cosa succede se ci sono ostacoli che però conservano la natura piano.

Supponiamo un piano conduttore $\perp z$ e studiamo la riflessione

- Da z_0 per $t = t_0$ parte un'onda diretta
- finché non arriva sulla lastra c'è solo onda diretta
 più c'è anche la inversa. Dopo che è ritornata in z_0 bisognerebbe conoscere la natura del generatore
- a noi interessa solo la 1^a riflessione
- supponiamo l'onda diretta polarizzata linearmente.

Mettiamo ora per comodità la sfera in $z = 0$ e andiamo a studiare in modo più approfondito cosa succede



(109)

In $z=0$ si è in presenza di discontinuità

• in 0^+ spaziale $E=H=0$

quindi deve esser prodotto un campo tale da compiere questo annullamento in $z=0^+$.

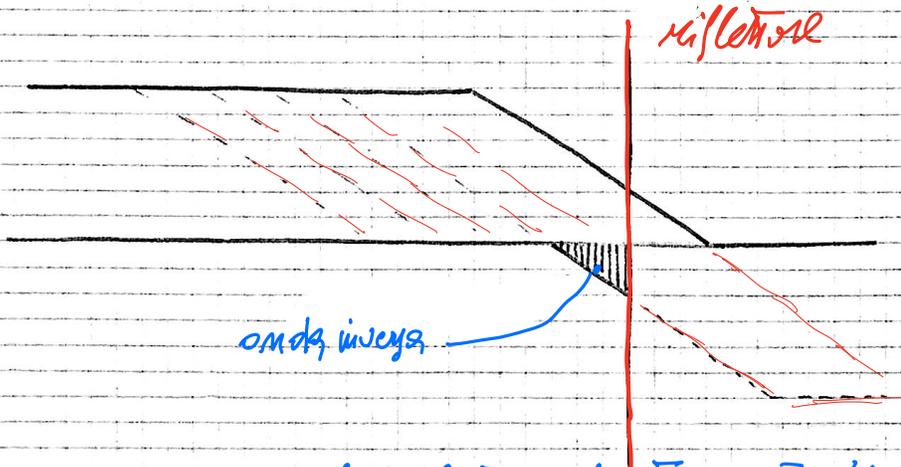
- Poiché si conserva E_t $E=0$ anche in 0^- spaziale

H non necessariamente è nullo (si conserva se non ci sono correnti superficiali) però qui ci possono essere in quanto la superficie è conduttrice

- Quindi in $z=0$ ho $E_x(t,0)$ e per quanto detto si deve produrre un campo A inverso tale che

$$E_A(t,0) = -E_x(t,0) \quad \forall t$$

ciò non significa che E è nullo in altri z ; lo possiamo capire in modo grafico:



l'onda inversa è portata dal riflettore al tempo \bar{t} di incidenza

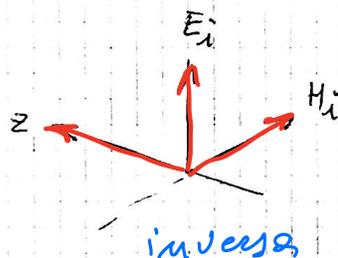
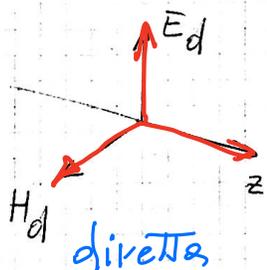
ora in un po' abbiamo $E_d(t, z) + E_i(t, z)$

(110)

il campo H_i è legato a E_i con

$$H_i(t, z) = -\frac{E_i(t, z)}{\eta}$$

segno - perché E_i H_i z sono destrorsi, ma ora z è contrario (onda inversa)

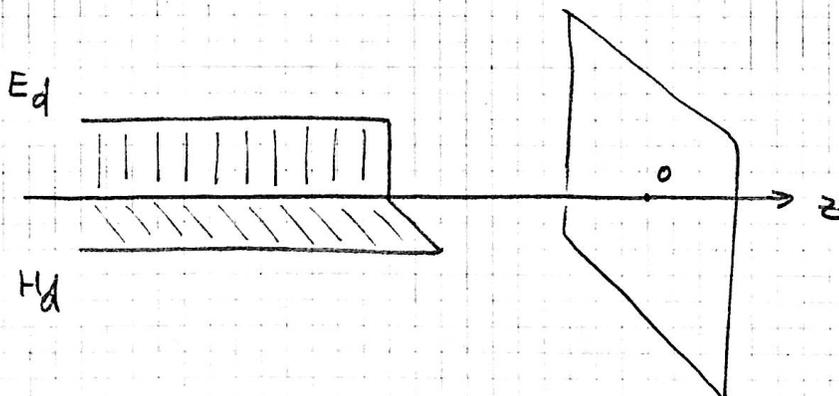


Vediamo cosa succede sulla superficie $z=0$

$$H_i(t, 0) = H_d(t, 0) \quad \forall t$$

c'è il segno + per le regioni viste prima, quindi il campo totale in 0 è il doppio che se non ci fosse l'ostacolo.

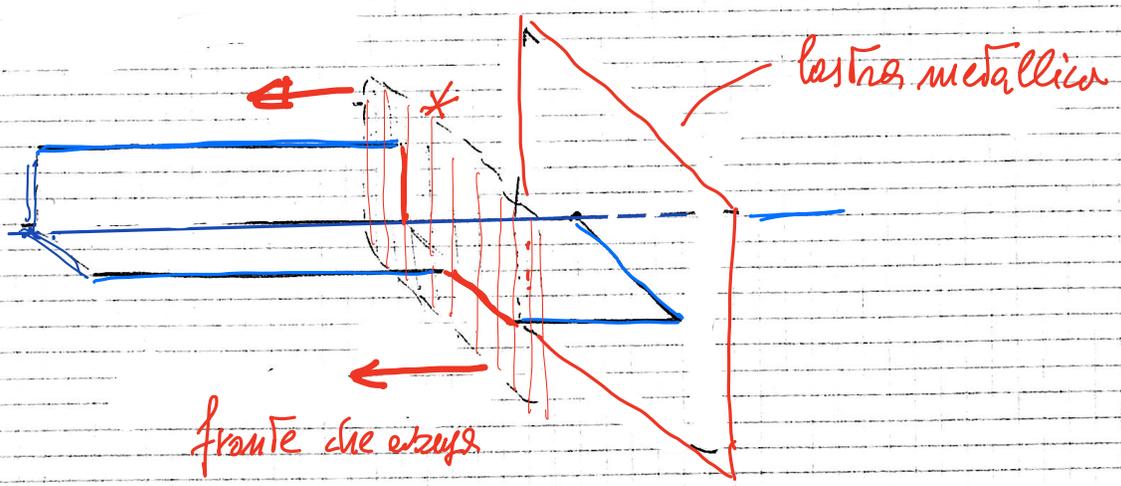
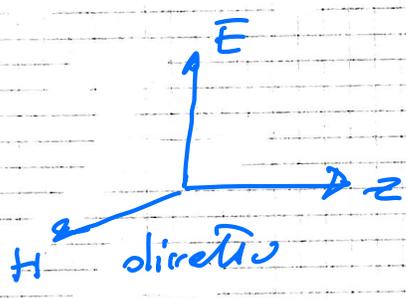
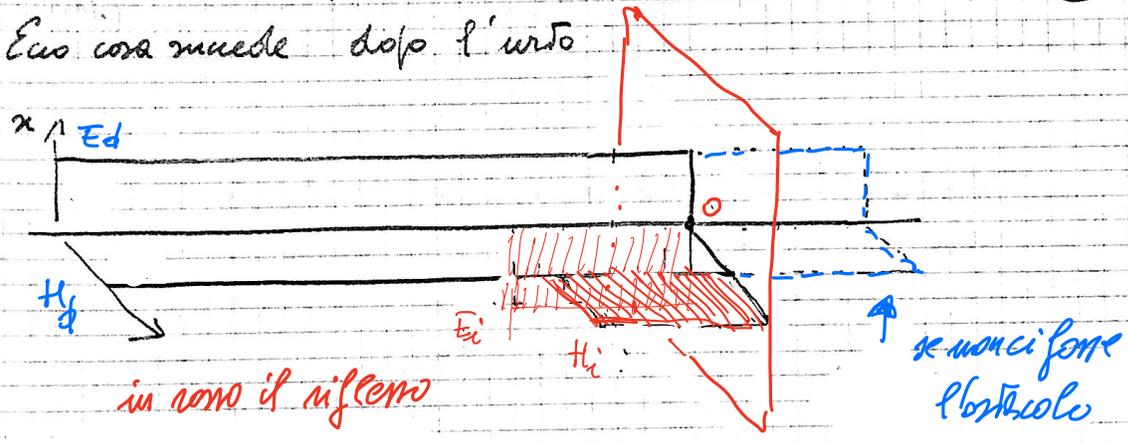
Vediamo graficamente il caso di un gradino che urta



Noi ragioniamo a x, y fissati, per diverse x, y magari E_d e H_d sono diversi.

(111)

Cos'è cosa succede dopo l'urto



- Sulla lastre x ha corrente superficiale (in questo caso stazionaria) tale da rendere nullo il campo elettrico globale.
- La potenza in x è zero $\rightarrow \vec{S} = 0 \rightarrow$ la lastre non assorbe energia - ('è' zero' presenza di potenza perché è presente un campo magnetico -

NB l'energia che in \times è trasmessa all'inizio è finita
nessa per la creazione del campo magnetico tra generatore e
riflettore. (112)

Passiamo ora al caso sinusoidale

NB qui bisogna fare bene attenzione perché è ricordato
che il campo è diretto o inverso abbiamo $e^{-j\beta z}$ o $e^{+j\beta z}$

$$E_d(t, z) = \operatorname{Re} \left[\dot{E}_d e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right] = |\dot{E}_d| \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$$

dobbiamo imporre campo nullo in $z=0$

osserviamo che formalmente vale sempre

$$\boxed{\dot{E}_i = -\dot{E}_d}$$

questo però non è più una funzione del tempo ma una
uguaglianza tra numeri complessi - cioè noto \dot{E}_d
ho tutto (noto β e ω)

Se \dot{E}_d è reale vuol dire $\varphi = 0$; supponiamo $\varphi = 0$ per
comodità -

Il campo elettrico risultante è

$$\operatorname{Re} \left[\dot{E}_d e^{-j\beta z} e^{j\omega t} + \dot{E}_i e^{j\beta z} e^{j\omega t} \right] =$$

$$= E_0 \left[\cos(\omega t - \beta z) - \cos(\omega t + \beta z) \right] = E(t, z) =$$

reale \Rightarrow nota la condizione al contorno
ho il campo ovunque

Sviluppando:

$$= E_0 [\cancel{\cos d \cos \beta} + \sin d \sin \beta - \cancel{\cos d \cos \beta} + \sin d \sin \beta] =$$

$$= \left[2 E_0 \sin \omega t \sin \beta z = E(z, t) \right]$$

(113)

• È scomparso il termine propagativo \Rightarrow

t fisso E sinusoidale spazialmente

z fisso E " nel tempo

(cio' vale anche con fenomeno propagativo con sola onda diretta) - Qui ci sono degli zeri fissi

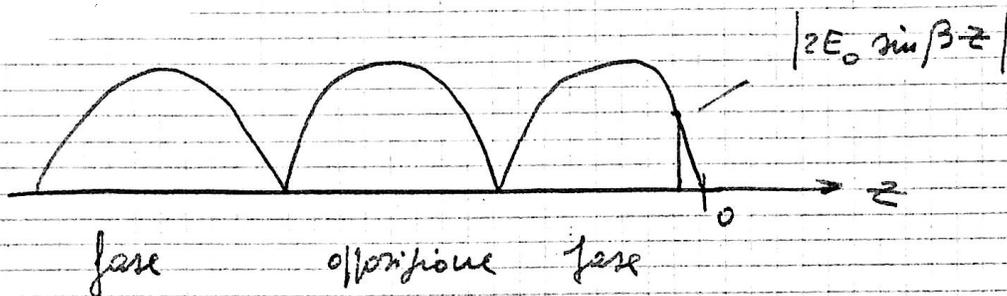
$$\left[\beta z = K\pi \quad \text{tempo} \equiv 0 \right]$$

$$z = K \frac{\lambda}{2}$$

$$z = K \frac{z\pi}{2\beta}$$

$$\text{ma } \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

questo tipo di onda si dice stazionaria



dobbiamo tenere il grafico moltiplicato per sin omega t \Rightarrow
 si vede che per sin omega t = 0 il campo = 0 ovunque

Vediamo il campo magnetico

$$\vec{H}_i = \vec{H}_d$$

in termini reali

(114)

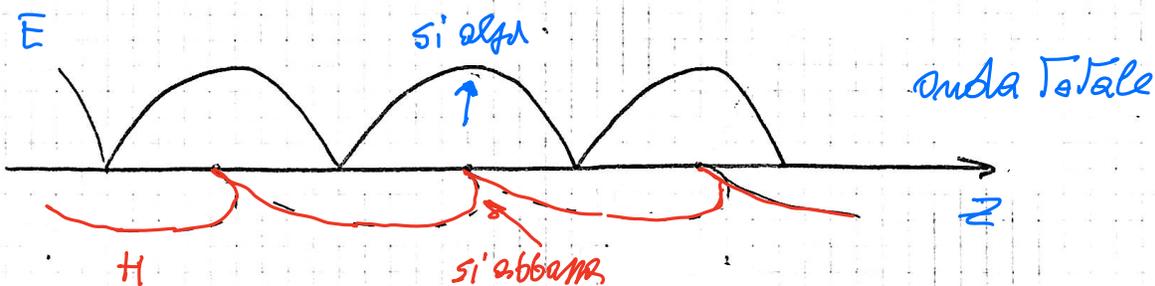
$$\text{Re} \left[H_d e^{i(\omega t - \beta z)} + H_i e^{i(\omega t + \beta z)} \right] \quad \text{ma}$$

$$\frac{E_d}{H_d} = \eta \quad \text{reale se il mezzo e' dielettrico}$$

$$\eta H_0 = E_0$$

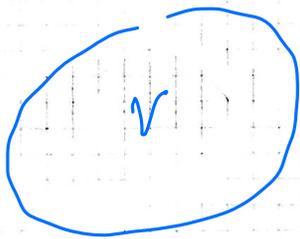
$$H(t, z) = H_0 \left[\cos(\omega t - \beta z) + \cos(\omega t + \beta z) \right] =$$

$$= \boxed{2H_0 \cos \omega t \cos \beta z = H(t, z)}$$



$$\text{quando } E=0 \Rightarrow H = H_{\text{max}}$$

Sul piano energetico S e' uguale ogni quarto d'onda
quindi l'energia tra due sezioni e' una costante



sistema

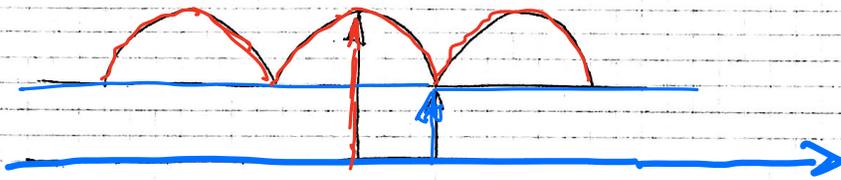
*

- o c'e' una potenza media netta che esce o non c'e'.
- ciò può significare che c'e' una sorgente
- un ostacolo che riflette la potenza

In questo caso devono esistere i nodi di cui prima, cioè il S deve essere nullo \Rightarrow in X ci sono onde stazionarie

Se il flusso medio di potenza uscente è $\neq 0$ ho una onda stazionaria + onda diretta in direzione della uscita. \Rightarrow (115)

Diretta: parte che è stazionaria e c'è la inversa + la parte che esce graficamente



Il rapporto di onda stazionaria ROS (SWR)

Valore 1 se l'onda non ha riflessione

$1 =$ assenza di riflessione

quindi se l'onda ROS = 1

adita ROS $\rightarrow \infty$

20-3-68

(116)

Calcolo impedenza in una certa sezione; per una certa z il rapporto

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -j \eta \tan \beta z$$

infatti

$$\begin{aligned} E_x = z E_0 \sin \omega t \sin \beta z &\rightarrow \begin{cases} \dot{E}_x = -j z E_0 \sin \beta z \\ \dot{H}_y = z \frac{E_0}{\eta} \cos \beta z \end{cases} \rightarrow \\ H_y = z \frac{E_0}{\eta} \cos \omega t \cos \beta z &\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -j \eta \tan \beta z$$

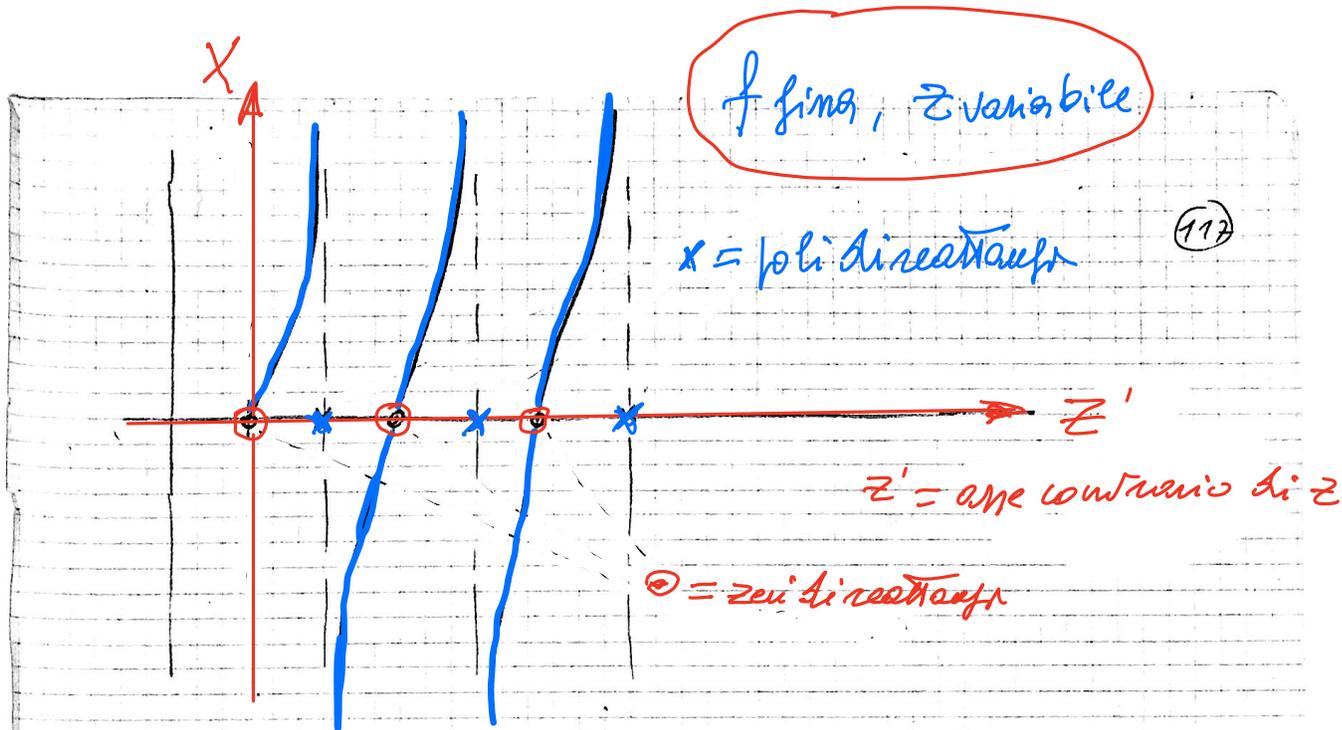
$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\left\{ z = -j \eta \tan \frac{2\pi}{\lambda} z \right\} \text{ impedenza}$$

- Si scopre che z è indipendente da x e y
- z perfettamente reattiva. Se perdiamo la nota diretta viene $z = \eta$ reale (impedenza caratteristica) - È puramente reattiva perché c'è un'onda che va avanti e indietro e non si consuma energia
- si può definire $X = -\eta \tan \frac{2\pi}{\lambda} z$

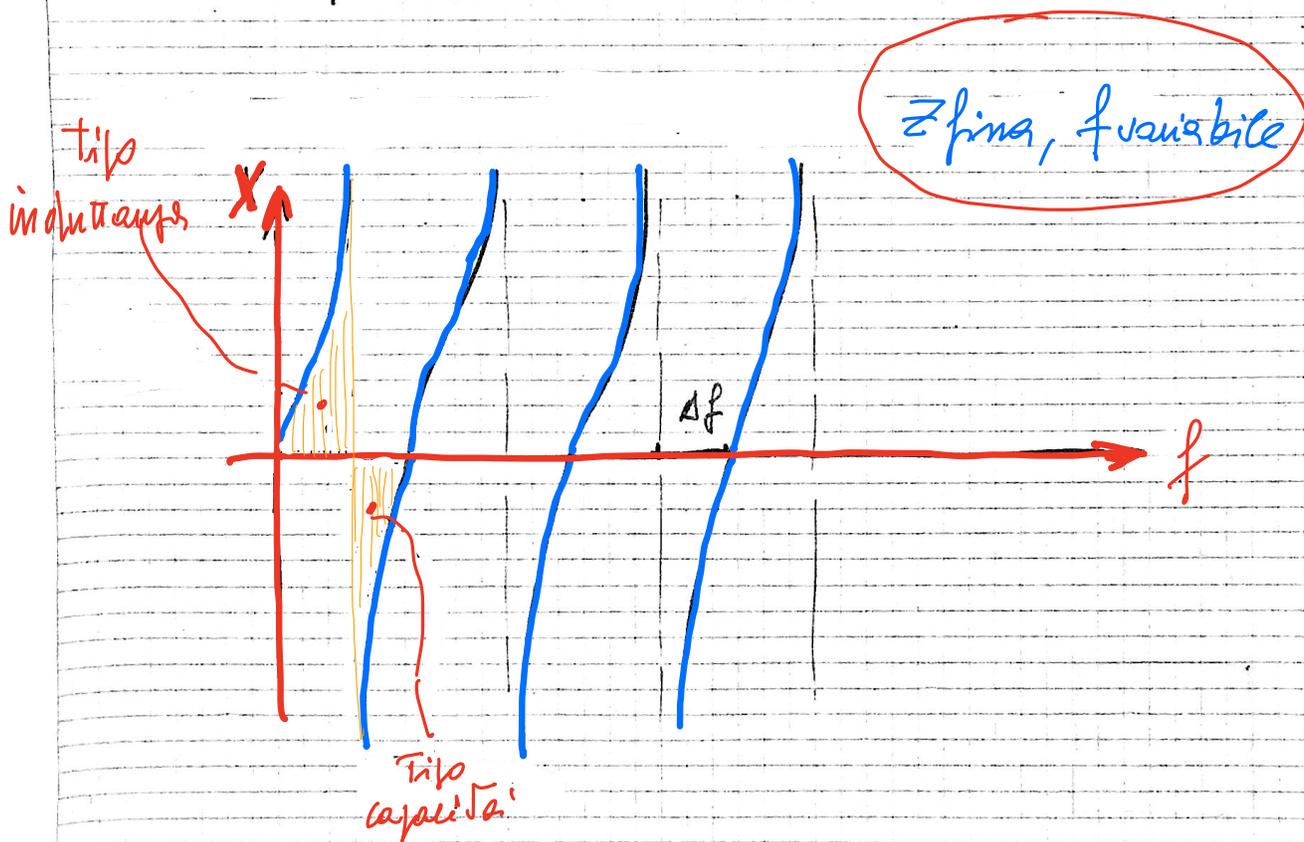
quindi z è periodica in $\frac{z}{\lambda}$

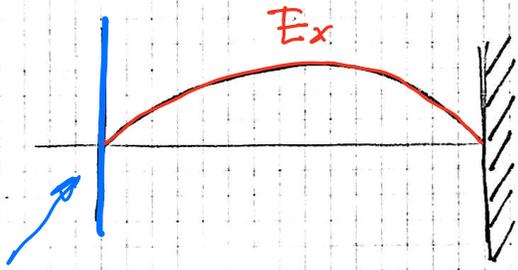
esaminiamo l'impedenza nei vari pts ragionando a $\frac{z}{\lambda}$ lina z variabile



Sono i poli in cui l'arco vale $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \dots$
 quindi Δz tale che $2\pi \frac{\Delta z}{1} = \frac{\pi}{2} \implies$

$$\Delta z = \frac{1}{4}$$

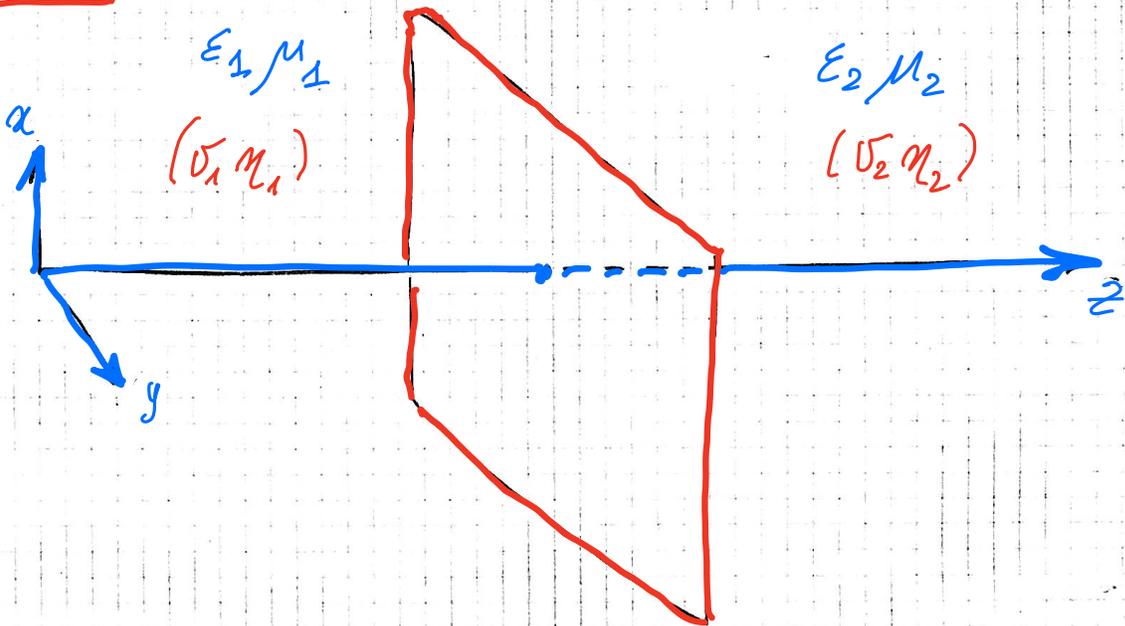




Qui c'è un modo per mettere un piano virtuale
tanto $E_x = 0$ ottenendo una cavità.

NB osserviamo che è equivalente ad un LC

Incidenza in due mezzi dielettrici con caratteristiche diverse.



i due dati sono equivalenti, infatti

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \Rightarrow \quad \eta\nu = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{1}{\eta\nu}$$

$$\frac{\eta}{\nu} = \mu$$

Supponiamo nota $E_d \rightarrow$ troviamo le altre

(12)

$$E_d + E_i = E_t$$

$$\frac{E_d}{\eta_1} - \frac{E_i}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2} \Rightarrow 2E_d = E_t \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right)$$

coefficiente di trasmissione
per il campo Elettrico

$$E_t = E_d \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

$$E_i = -E_d + E_t = E_d \left[-1 + \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\right] \rightarrow$$

$$E_i = E_d \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

coefficiente di riflessione
per il campo elettrico

1) Se $z = 1$ hanno la stessa impedenza caratteristica (anche con ν diverse) non c'è onda riflessa. Ciò equivale a dire $\frac{\mu_1}{\epsilon_1} = \frac{\mu_2}{\epsilon_2}$ e sono separatamente uguali

2) E_t coincide con E_d

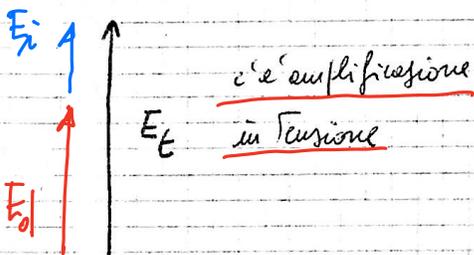
3) E_t in un po' \forall e per $t \forall$ si ricava conoscendo $E_d \forall z$
 $E_d \forall t$ in 0, dato questo $E_d \forall z$

è il campo dopo il tempo necessario per percorrere z alla velocità ν .

4) E_i può essere concorde o no (NB concorde in direzione come settore, ma il verso di propagazione è sempre lungo $-z$) - Distinguiamo: (121)

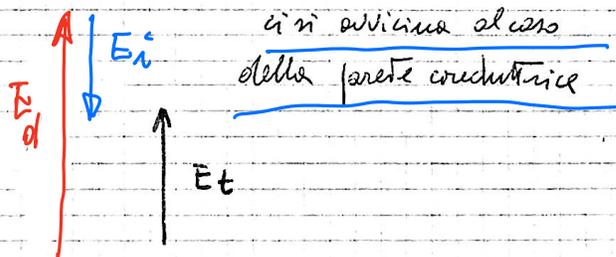
$$\mu_2 > \mu_1$$

E_i concorde con E_d



$$\mu_2 < \mu_1$$

E_i discorde con E_d



Facciamo ora il conto sui campi magnetici

$$H_i = -\frac{E_i}{\mu_1} = H_d \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) = H_i$$

$$H_t = \frac{E_t}{\mu_2} = \frac{E_d}{\mu_2} \cdot \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = H_d \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = H_t$$

si vede che quando c'è amplificazione in tensione c'è decremento in campo magnetico.

Caso risonante

Se le condizioni al contorno sono formalmente le stesse

$$\dot{E}_i = \dot{E}_d \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

$$\dot{E}_t = \dot{E}_d \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

(122)

se sono reali $\rightarrow \dot{E}_i, \dot{E}_t, \dot{E}_d$ sono in fase

se sono reali $\rightarrow \dot{E}_i, \dot{E}_t, \dot{E}_d$ sono in fase

non può succedere che lo siano ovunque, ma solo nella
origine

Se \dot{E}_d reale anche gli altri sono reali -

Se c'è dispersione basta sostituire ϵ con ϵ_c

\rightarrow η sono complessi $\rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}}$ \rightarrow avremo
anche sfasamenti temporali

• Se z è perfettamente conduttore $|\eta_2| = 0 \rightarrow$

$$\dot{E}_t = 0 \quad \text{e} \quad \dot{E}_i = -\dot{E}_d$$

Explicitiamo (per es. nel mezzo 1)

$$\dot{E}_d = E_0 e^{-j\beta z} \rightarrow E_d = \text{Re} [E_0 e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] =$$
$$= E_0 (\cos \omega t - \beta z) = E_d$$

• origine di z nel piano di divisione

• " " e tale che per $t=0$ $E_d > 0$ e massimo

Applicando le relazioni trovate:

$$\Gamma_{\lambda_0} = E_{d_0} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$$

NB vale solo per $z=0$

(123)

per tanto $E_i = \operatorname{Re} \left[e^{i\beta z} E_0 e^{j\omega t} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \right] =$

$$= E_0 \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \cos(\omega t + \beta z)$$

+ perché è l'onda inversa

- Essere in fase vuol dire che in $z=0$ le due onde sono in fase

Il campo elettrico totale è

$$E_{\text{tot}} = E_0 \left[\cos(\omega t - \beta z) + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \cos(\omega t + \beta z) \right]$$

esso si può scrivere come una stazionaria, fin'una non;
per fare venire i coefficienti

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} + \left[1 - \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right] = 1$$

normalizzazione di 1

$$E_{\text{tot}} = 2 E_0 \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \sin \omega t \sin \beta z + 2 E_0 \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cos(\omega t - \beta z)$$

stazionaria

uguale a E_0

è sempre possibile ridere le cose così, anche nel caso di
dissipazione - Cambiano solo i coefficienti e le fasi -

(124)

Quindi sempre

$$E_x = E' \cos(\omega t - \beta z) + E'' \cos(\omega t + \beta z + \varphi)$$

valida
sempre

queste sono espressioni fondamentali per i modi TEM
(trasverso elettromagnetico) -

Incidenza obliqua

Di ora studieremo brevi cenni -

Si si studia per la propagazione guidata in modi diversi
dal TEM -

Nel caso dielettrico si ha

• legge riflessione e rifrazione

• concetto di angolo limite

• fibre ottiche

• Angolo di Brewster: se l'onda incidente è polarizzata
linearmente \exists un angolo tale che se l'onda
incide con quello (e solo con quello) manca la
onda riflessa -

Quindi se mando un raggio di luce non polarizzata
emerge polarizzato nel piano di riflessione -

