

Giuseppe Biorci

CAMPI ELETTROMAGNETICI

2

onde di tipo più generale, linee di trasmissione, modi TE e TM, guida d'onda rettangolare, cavità, radiazione, bibliografia

Anno Accademico 1966-67

Onde di tipo più generale

Si intende la propagazione guidata il campo che si propaga in un mezzo dielettrico ^{perfetto} cilindrico con contorno di metallo perfetto. (Si noti che anche una linea bifilare rientra in questa categoria). Dato che il contorno ha ~~densità~~ $\sigma = \infty$ non i nodi di campo, ma i nodi in termini di corrente e di carica. Ha notevole importanza, come vedremo, che il contorno sia semplicemente chiuso o meno.

Ammettiamo che il campo si propaghi lungo l'asse z delle coordinate cilindriche, ed ammettiamo che ogni componente del campo sia della forma:

$$F(x, y, z) = A(x, y) B(z) \quad (1)$$

Ammettiamo ancora che $B(z)$ sia della forma:

$$B(z) = B e^{-\gamma^2 z} \quad (2)$$

facendo riferimento ad un'onda diretta soltanto; γ può assumere qualunque valore reale o complesso. Ammettiamo sempre di essere in regime sinusoidale. Sempre risulta:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\gamma F \quad (3)$$

poiché l'operatore $\partial/\partial z$ si può sostituire con l'operatore $-\gamma$. Tutte le grandezze sono complesse. Cominceremo a scrivere le equazioni del campo nei punti seguenti:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (4)$$

in componenti:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega \epsilon E_x \quad ; \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma H_x = j\omega \epsilon E_y \quad ; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \epsilon E_z \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega \mu H_x \quad ; \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma E_x = -j\omega \mu H_y \quad ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z \quad (6)$$

Esprimiamo le componenti secondo x ed y in funzione delle componenti secondo z

$$E_x = \left[1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} \right] = \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{\omega^2 \epsilon \mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (\text{introduciamo } k_c^2 = \gamma^2 + \beta^2) \quad (7)$$

(7) - Si intende che ogni grandezza va moltiplicata per $e^{j\omega t}$ e si disprezza la parte reale.

(*)

$$E_x = \frac{\beta^2}{k_c^2} \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] ; \quad E_y = \frac{\beta^2}{k_c^2} \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \quad (1)$$

$$H_x = \frac{\beta^2}{k_c^2} \left[\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] ; \quad H_y = \frac{\beta^2}{k_c^2} \left[\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \quad (2)$$

Si vede che il problema può essere ricondotto ad uno studio delle componenti x e y di $\vec{E}$ e $\vec{H}$ in grado di trovare le altre componenti ^{mediante le (1) e (2)}. Questo spiega perché i modi di propagazione sono ~~distinti~~ ^{sempre} individuati dalle condizioni sull'asse z . Se $E_z = H_z = 0$, $\gamma^2 = k_c^2 = 0$ ^{diversi} e le onde sono quelle trattate fino ad adesso e si chiamano TEM. Se $E_z = 0$ il modo è TE; se $H_z = 0$ il modo è TM.

Troviamo ora le equazioni del campo dalle (1) e (2) di pg. precedente. Risultato:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \gamma \left[\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \right] = j\omega\mu \left[-\frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] = j\omega\mu j\omega\epsilon E_z \quad (3)$$

dato che $\text{div } \vec{E} = 0$:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma \left[-\frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = -\omega^2 \mu \epsilon E_z = -\beta^2 E_z \quad (4)$$

ma:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (-\gamma^2 + \beta^2) E_z = 0 \quad (5)$$

che indiciamo così:

$$\nabla_{xy}^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad (6)$$

e analogamente:

$$\nabla_{xy}^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (7)$$

Cominciamo ora a considerare il modo TEM. Risultato:

$$E_z = H_z = 0 \quad k_c^2 = 0 \quad (8)$$

I modi TEM sono modi che non si trovano propagare in guide d'onda, però presentano grande interesse. Dalle (5) e (6) di pg. precedente:

$$\gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \quad -\gamma H_x = j\omega\epsilon E_y \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad -\gamma E_x = -j\omega\mu H_y \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

(*) - Questo spiega perché nel modo TEM non sorgono problemi di autovalori e frequenze di taglio, cosa che invece succede, come vedremo, per i modi TM e TE, legati al fatto che k_c può assumere un insieme di valori discreti.

(1) limite:

$$\mu \left[\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \right] = j\omega\mu \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

(2)

quindi:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

u=

v=

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

dalle quali segue:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

3,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

quindi:

$$\nabla_{xy}^2 \bar{E} = 0 \quad (6)$$

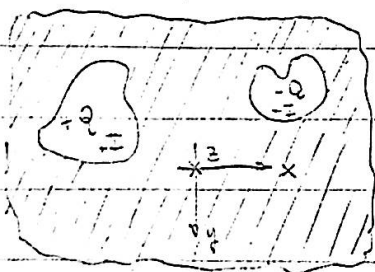
4,

analogamente:

$$\nabla_{xy}^2 \bar{H} = 0 \quad (7)$$

Dalle (6) e (7) segue in sep. precedente segue che $\bar{E}$ ed $\bar{H}$ sono perpendicolari tra

supponiamo che ci siano due conduttori in un dielettrico: $\bar{E}$ ~~risult~~ ha una costante
determina dei campi statici che si ottengono disponendo sulle superficie delle cariche
Q ~~effettive~~ ~~effettive~~; analogamente $\bar{H}$ è lo stesso che in un caso statico dove i



conduttori piano percorsi da corrente I ~~effettive~~.

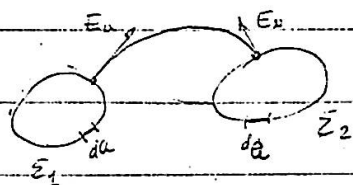
Cominciamo col vedere cosa succede nel caso ^{di $\bar{E}$} $\nabla^2 \bar{E} =$
statico, con i conduttori cilindrici ora caricati con $+Q$ e
 $-Q$. [Nota che solo un contorno duplicemente chiuso

può contenere un modo TEM, pochi un buco solo

ha il campo ^{statico} $\bar{E}$ interno completamente nullo]. Allora, nel caso statico, le
linee di forza sono normalizzate ai conduttori ed $E_z = 0$. L'equazione del campo è:

$$\nabla^2 \bar{E} = \nabla_{xy}^2 \bar{E} = 0$$

L'equazione differenziale è la stessa. Anche le condizioni al contorno sono le stesse, infatti, dato che le linee di forza sono normalmente ai conduttori, la componente tangenziale di $\vec{E} = 0$ sui contorni, il che accade anche nel caso variabile. Inoltre concludiamo per elemento ($da \cdot 1$) del contorno $\vec{z}_1$ risulta:



$$\int_{\vec{z}_1} \vec{E}_u da = \frac{Q}{\epsilon} = - \int_{\vec{z}_2} \vec{E}_u da \quad (1)$$

Si può esprimere il fatto che le cariche al finito hanno per somma zero, e cioè che i rapporti del campo stanno tutti al finito; se le cariche al finito non fossero nulle in totale ci sarebbero cariche all'infinito, e ci sarebbero delle linee di forza che vanno all'infinito.

Con i medesimi ipotesi è possibile trovare due distribuzioni di cariche che diano luogo a un $\vec{H}$ identico al caso variabile. Definiamo allora:

$$\vec{A} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{E} \quad (2)$$

ed il vettore $\vec{k}$ dell'asse z diretto dal foglio verso di noi. Definiamo:

$$\vec{A} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{k}}{\eta} \quad (3)$$

Risulta: $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4)$

E inoltre: $\nabla \wedge \vec{A} = 0 \quad (5)$

Come si vede dalle formule di calcolo vettoriale:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{k}) = \vec{k} \cdot \nabla \wedge \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \wedge \vec{k} = 0 \quad (6)$$

e ancora:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\vec{E} \wedge \vec{k}) &= \vec{E} (\nabla \cdot \vec{k}) - \vec{k} (\nabla \cdot \vec{E}) + \\ &+ (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{E} - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{k} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Tenendo presente che $\vec{k}$ è un vettore costante.

1° punto:

$$\nabla^2 \bar{A} = 0 \quad (2)$$

Le condizioni al contorno di $\bar{A}$ sono: $A_n = 0$ alle superfici di separazione, e

inoltre:

$$\int_{\bar{Z}_1} \eta A_t da = - \int_{\bar{Z}_2} \eta A_t da = \frac{Q}{\epsilon} \quad (2)$$

Come si ricava dalle condizioni al contorno $\mu = \epsilon$ (2) $\bar{A}$:

$$\int_{\bar{Z}_1} A_t da = - \int_{\bar{Z}_2} A_t da = \frac{Q}{\epsilon} = Q_0 \quad (3)$$

Immaginiamo di mandare una corrente nei due conduttori; risulta in tal caso statico:

$$\nabla^2 \bar{H} = 0 \quad (4)$$

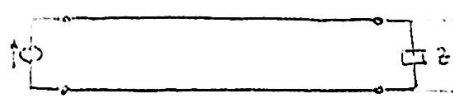
Inoltre sui contorni $H_n = 0$ e ancora:

$$\oint_{\partial \bar{Z}_2} \bar{H} \cdot d\bar{a} = \int_{\bar{Z}_1} H_t da = - \int_{\bar{Z}_2} H_t da = I \quad (5)$$

Allora basta che nei conduttori faccia passare una corrente $I = Q_0$ (poiché $A = H$). Quindi mandando una opportuna corrente si ottiene un campo statico $\bar{H}$ che è identico a quello elettromagnetico.

Linee di trasmissione

Consideriamo una linea bipolare: la tensione tra due punti $\bar{z}$:



$$V = \int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (6)$$

e la corrente $\bar{z}$:

$$I = \int_S \bar{J} \cdot \bar{a} dS \quad (7)$$

(8) - Infatti:

$$\eta \bar{E} = \bar{E} \wedge \bar{B}$$

$$\eta \bar{A} \wedge \bar{K} = (\bar{E} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{K} = + [(\bar{K} \cdot \bar{K}) \bar{E} - (\bar{E} \cdot \bar{K}) \bar{K}] = \bar{E} \quad (8)$$

e quindi, su $\bar{Z}_1$ e $\bar{Z}_2$:

$$\eta A_t = E_n$$

da cui la (3).

In una sezione qualsiasi $\bar{z}$:

$$V = V_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1)$$

avendo:

$$V_0 = \int_P \bar{E}_0(x, y) \cdot d\bar{l} \quad (2)$$

avendo:

$$\bar{E} = \bar{E}_0(x, y) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad (3)$$

Dato poi che risulta:

$$\bar{H} = \bar{H}_0(x, y) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad (4)$$

e quindi:

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5)$$

avendo:

$$I_0 = \oint_P \bar{H}_0 \cdot d\bar{l} \quad (6)$$

(Passiamo ad un conduttore). Le quantità trovate sono:

$$V = V(z, t) \quad I = I(z, t) \quad (7)$$

Le equazioni trovate hanno senso per le linee z infinitamente lunghe, perché non compare l'onda riflessa risultata in ogni punto:

$$\frac{V(z, t)}{I(z, t)} = \frac{V_0}{I_0} \quad (8)$$

Dalle (2) e (5) risulta:

$$V_0 = \int_P \bar{E}_0 \cdot d\bar{l} = \eta \int_P \bar{H}_0 \cdot d\bar{l} = \eta \int_P \frac{\mu \bar{H}_0}{\mu} \cdot d\bar{l} = \frac{1}{\mu} \eta \int_P \bar{B}_0 \cdot d\bar{l} = \eta \frac{\Phi}{\mu} \quad (9)$$

$$I_0 = \int_{\Sigma_1} \bar{H}_0 \cdot d\bar{a} = \frac{1}{\eta} \int_{\Sigma_1} \bar{E}_0 \cdot d\bar{a} = \frac{1}{\eta} \frac{Q}{\epsilon} \quad (10)$$

Se scriviamo:

$$\Phi = L I_0 \quad (11)$$

risulta:

$$V_0 = \eta \frac{L I_0}{\epsilon \mu}$$

e poiché $Q = cV_0$, risulta:

$$I_0 = \frac{1}{l} \frac{cV_0}{\varepsilon}$$

e quindi:

$$\frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1)$$

Si noti l'analogia formale $V \rightarrow \mathcal{E}$, $I \rightarrow H$, $L \rightarrow \mu$, $C \rightarrow \varepsilon$ per cui i dati sulle onde lineari sono utilizzabili immediatamente. Notare che una linea infinita è una resistenza, come risulta dalla (1). Ma terminando una linea su un resistore di valore $R_c = \sqrt{L/C}$ è come se la linea fosse indefinita, poiché non c'è altra grandezza che possa variare le proprietà della linea. Non c'è in questo caso una onda riflessa. Con una terminazione diversa nascono onde riflesse. Per linea in corto è come un'onda fissa che ricade normalmente su una lastra di metallo:

$$V = V_0 e^{j(\omega t - \beta z)} + V'_0 e^{j(\omega t + \beta z)} \quad (2)$$

$$I = 0 \quad \text{a} \quad z = 0 \quad (3)$$

e quindi:

$$V_0 e^{-j\beta 0} = -V'_0 e^{j\beta 0} \quad V_0 = -V'_0 \quad (4)$$

da cui si ricava che l'onda è stazionaria:

$$V = 2V_0 \sin \beta z \quad \sin(\omega t + \phi_0) \quad (5)$$

Una linea aperta è caratterizzata da:

$$I = 0 \quad \text{a} \quad z = l$$

(che può essere più accurato frico: non lo riscuto nella teoria dei campi). Si può dire che c'è una riflessione dell'onda di corrente (totale).

La chiusura su una linea impedenza diversa da quella caratteristica si caratterizza con:

$$V(z) / I(z) = R$$

Inoltre nella ~~diffusione~~ giunzione tra due linee aventi caratteristiche geometriche diverse c'è una riflessione.

In tutti questi casi si scrive sempre che il campo è la somma di un'onda diretta ed una riflessa, e poi si impongono le condizioni al contorno in modo opportuno.

Si vede che:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

e d'altra parte:

$$T_0 = \frac{1}{\mu} L I_0$$

$$I_0 = \frac{1}{L} \frac{CV_0}{\epsilon}$$

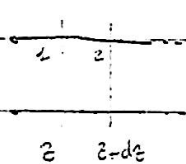
$$T_0 I_0 = \frac{1}{\mu\epsilon} LC T_0 I_0$$

$$LC = \mu\epsilon$$

quindi è anche:

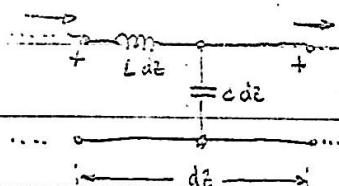
$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Proviamo che la linea ammette un circuito equivalente molto semplice. Consideriamo:



$$\Delta T_{21} dz = - \frac{\partial V}{\partial z} dz = + j\omega T dz = j\omega LC I dz = j\omega \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} I dz = j\omega L I dz$$

$$\Delta I_{12} dz = - \frac{\partial I}{\partial z} dz = + j\omega I dz = j\omega \frac{V}{Z_c} dz = j\omega \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} V dz = j\omega C V dz$$



Pertanto la linea è rappresentabile con la linea rappresentata a lato.

S'è trovato allora:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = j\omega L I$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = j\omega C V$$

da cui:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \omega^2 LC V = 0$$

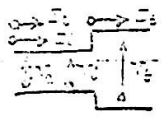
$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon C I = 0$$

Se il dielettrico avesse delle perdite tutto va bene lo stesso, perché nella trattazione del campo basta sostituire a ϵ le ϵ_c . Si trova però che l'adattamento di due linee con

perdite non è più possibile perché $\sqrt{\epsilon}/c$ diventa complesso e pertanto non c'è nessuno
bipolo realizzabile che ne realizzi, eccetto che a frequenza fissa. (*)

Per schematizzare le perdite nel dielettrico ci si mette una $q dz$ ~~esponente~~
trasversale; il migliore ~~risultato~~ una $r dz$ in serie alla linea non è detto,
perché questo è in contrasto con la separazione secondo il meccanismo, perché in tal
caso si ha una ϵ_2 . Dato che questo è un guasto, ~~non si può~~ si calcola
il campo come se i conduttori fossero perfetti, si modifica il tutto, ad esempio
si aggiunge la $r dz$ in serie, si studia il campo nelle parti assumendo come
condizioni al contorno i vettori del campo trovati assumendo $\epsilon = \infty$.

alla giunzione di due linee aventi impedenze diverse si ha riflessione e trasmissione
di tensione e di corrente. Dove sono alla giunzione:



$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_t \\ V_1 + V_2 = V_t \end{cases} \quad (1)$$

$$V_1 = Z_1 I_1 \quad V_2 = -Z_2 I_2 \quad V_t = Z_2 I_t \quad (2)$$

da cui si ricava:

$$I_2 = I_1 \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad I_t = I_1 \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad V_2 = V_1 \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad V_t = V_1 \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3)$$

Si vede che se si divide una linea nella sua impedenza caratteristica, non si hanno
onde di tensione e corrente riflesse.

La dimostrazione che precede vale ovviamente con tutta generalità, e cioè per una
linea di forma qualsiasi, non solo bifilare.

Per una linea in corto ($Z_2 = 0$):

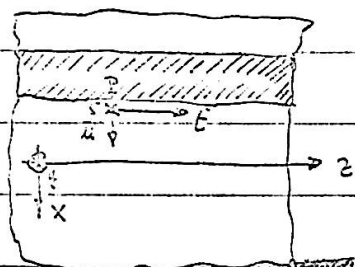
$$I_t = 2I_1 \quad I_2 = -I_1 \quad V_2 = -V_1 \quad V_t = 0 \quad (4)$$

Per una linea aperta ($Z_2 = \infty$):

$$I_2 = 0 \quad I_t = I_1 \quad V_2 = V_1 \quad V_t = 2V_1 \quad (5)$$

Modi TE e TM.

Riprendiamo le coordinate e le relazioni a pg. 56, 57; più precisamente le relazioni (6) e (7) di pg. 57. Vediamo le condizioni al contorno; sulle superfici dei conduttori dove sono poste sulle superfici dei conduttori e sulle sole H_z ed E_z ; pertanto nel contorno dove sono (componenti tangenziali di $\vec{E}$ sulle):



$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{u}$$

$$E_z = 0 \quad (E_y = 0) \quad (1)$$

ma dove sono anche, nel contorno (*):

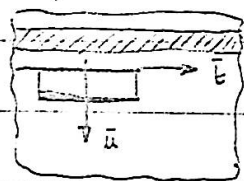
$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (2)$$



avendo $\vec{t}$ il vettore tangente al contorno nella direzione di z . Per H_z dove sono:

$$\frac{\partial H_z}{\partial u} = 0 \quad (3)$$

in quanto la derivazione di H_z nella spirale indicata sotto sarebbe diversa da



zero nel caso non fosse verificata la (3); ma questo non

può essere, perché corrente di conduzione non c'è; corrente di spostamento c'è, ma è parallela alla spirale, e pertanto

il suo valore attraverso la spirale è nullo.

Si può dimostrare che le (1) (2) e (3) bastano alla determinazione delle:

$$\nabla_{xy}^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad \nabla_{xy}^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (4)$$

Una qualunque onda si può rappresentare con una combinazione lineare dei modi TEM, TE e TM.

Introduciamo da ora in poi il numero d'onda $\beta = \omega/c$ con k ; sarà allora:

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 \quad (5)$$

e possiamo:

$$\beta = \text{Im}[\gamma] \quad (\gamma = \alpha + j\beta) \quad (6)$$

Notare che nel modo TEM $k_c^2 = 0$, e pertanto in tal caso:

$$k = \beta \quad (7)$$

Introduciamo a questo punto il concetto di velocità di gruppo. E' d'obbligo parlarne a questo punto, finché nel caso di un modo TE o TM la velocità di fase dipende dalla frequenza, e al contrario di quel che succedeva nel modo TEM, questo ha come conseguenza che un certo segnale TEM si propaga senza deformarsi, mentre nel modo TE o TM, nella propagazione il segnale si deforma, grazie al fatto che le varie armoniche spaziali componenti il segnale si riproducono con velocità differenti a seconda della frequenza.

Consideriamo allora un pacchetto d'onde, tale cioè che originariamente il campo sia diverso da zero solo in un intervallo limitato dell'asse z . Tuttavia ammettiamo che per un intervallo di tempo abbastanza lungo l'onda sia monodimensionale, cioè che il suo ripetersi sia governato da una riga. Definiamo allora come velocità di gruppo la velocità con cui si ripete ^{l'intervallo} ~~il pacchetto~~ dell'onda. Si può scrivere per una grandezza del campo:

$$\Phi(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega \quad (1)$$

e nel nostro caso:

$$f = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega + \int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega \quad (2)$$

Se ci faremo un'immagine di attenuazione $e^{-\alpha z}$, si può pensare che α vari poco tra $\omega_0 - \Delta\omega$ ed $\omega_0 + \Delta\omega$, e pertanto si potrebbe scrivere:

$$f \approx e^{-\bar{\alpha} z} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} F(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega + \dots \quad (3)$$

dove $\bar{\alpha}$ è calcolato in base alla dipendenza di α da ω . Valutiamo ora l'integrale (2). Se β non dipende molto da ω possiamo fare:

$$[\beta_0 = \beta(\omega_0)] \quad \beta \approx \beta_0 + (\omega - \omega_0) \left[\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right]_{\omega_0} \quad (4)$$

e anche:

$$F(\omega) \approx F(\omega_0) \quad (5)$$

(4) - E' evidente;



$$F(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f'(0,t) e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

Intanto:

$$p = F(\omega_0) \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{j \int_{\omega_0}^{\omega} [(\omega - \omega_0) + \omega_0] t - [\beta_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}] z} d\omega + \dots \quad (1)$$

cioè $(\omega - \omega_0 = \bar{\omega})$:

$$p = F(\omega_0) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} e^{j[\bar{\omega} t - \bar{\omega} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z]} d\bar{\omega} + \dots \quad (2)$$

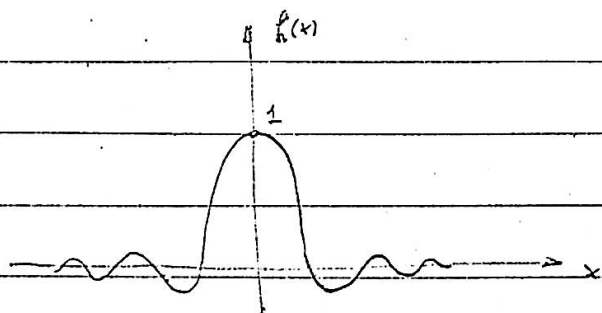
e infine:

$$p = F(\omega_0) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \frac{1}{j[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z]} 2j \sin \left\{ \Delta\omega \left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \right\} + \dots \quad (3)$$

cioè:

$$p = \Delta\omega F(\omega_0) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \frac{\sin \left\{ \Delta\omega \left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \right\}}{\Delta\omega \left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right]} + \dots \quad (4)$$

Tenendo presente che:



$$p_h(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (5)$$

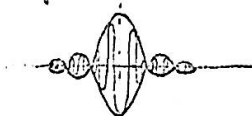
Quindi per un certo t , al variare di z , esiste una posizione individuata da:

$$z = \left[\frac{d\omega}{d\beta} \right]_{\omega_0} t \quad (6)$$

in cui $\frac{1}{2}$ è massima le pulsazioni di $\left\{ \Delta\omega \left[t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \right\}$. Il termine $e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}$ rappresenta una sinusoidale (o cosinusoidale) che si propaga lungo l'asse z con velocità ω_0 / β_0 . Il prodotto delle due componenti dà $f^{(1)}$. La velocità di gruppo è definita dalla velocità con cui si muove l'involucro della sinusoidale:

$$\left(v_g \right)_{\omega_0} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}} \quad (7)$$

(1) - Si tratta in sostanza di un'onda del genere:



che si propaga lungo l'asse z , variando però, la sinusoidale racchiusa, di fase -

in quanto il prodotto per $e^{j(\omega t - \beta_0 z)}$ non altera il punto di massimo di $\sin \left\{ \Delta \omega \left[t - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z \right] \right\}$. Notare che $e^{j(\omega t - \beta_0 z)}$ è estesa da $-\infty$ a $+\infty$, mentre il secondo termine è significativo solo per un breve tratto attorno al massimo. (2)

Torniamo ai modi TE e TM. È da osservare che γ può dipendere dal tipo di polarizzazione, in quanto fino ad ora non si è fatta alcuna ipotesi fisica su di essa (nel modo TEM abbiamo supposto che fosse $\gamma = \pm jk$). Così, nel modo TM $E_z = 0$; inoltre per soddisfare le condizioni al contorno che sono unicamente spaziali, pertanto k_z non dipende da ω , dato che k_y dipende da ω , allora γ dipende da ω in modo determinato. Inoltre si deve tenere presente che k_c è anch'essa da determinarsi mediante le condizioni al contorno, e non è determinata a priori: cioè a dire troviamo sempre che la equazione differenziale ha soluzioni solo se k_c assume valori ben determinati, e determinati sia dal modo di polarizzazione, sia dalla forma del contorno, sia dalle condizioni iniziali.

Trovato k_c si porrà una certa forma di γ . Si trova in generale una frequenza critica f_c di taglio tale che $\gamma = 0$ (nel qual caso $k_c = k$); risulta:

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = jk \sqrt{1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^2} \quad (1)$$

Se $\gamma = 0$ è $k_c = k = \frac{2\pi f_c}{c} = 2\pi \sqrt{\mu\epsilon'} f_c$ e quindi:

$$\boxed{k_c = 2\pi \sqrt{\mu\epsilon'} f_c} \quad ; \quad \boxed{\frac{k_c}{k} = \frac{f_c}{f}} \quad ; \quad \boxed{\gamma = jk \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (2)$$

Troviamo la velocità di gruppo. Notiamo che se $f_c > f$ è γ reale: cioè $\gamma = \alpha$

$$\gamma = k \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} = \alpha \quad (3)$$

se $f > f_c$ γ è immaginario:

$$\gamma = jk \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = j\beta \quad (4)$$

(5) - Si ha che i due termini si spostano alla stessa velocità solo se:

$$\frac{d\omega}{df} = \frac{\omega}{f} \Rightarrow \beta = k\omega = \frac{1}{v_g} \omega = \frac{1}{v_f} \omega \quad (5)$$

cioè soltanto se non c'è dispersione.

e pertanto si ha propagazione solo per $f > f_c$; in tal caso valutiamo la velocità di gruppo. Risulta:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \right] \quad (1)$$

e pertanto:

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (2)$$

dato che $f > f_c$ è sempre:

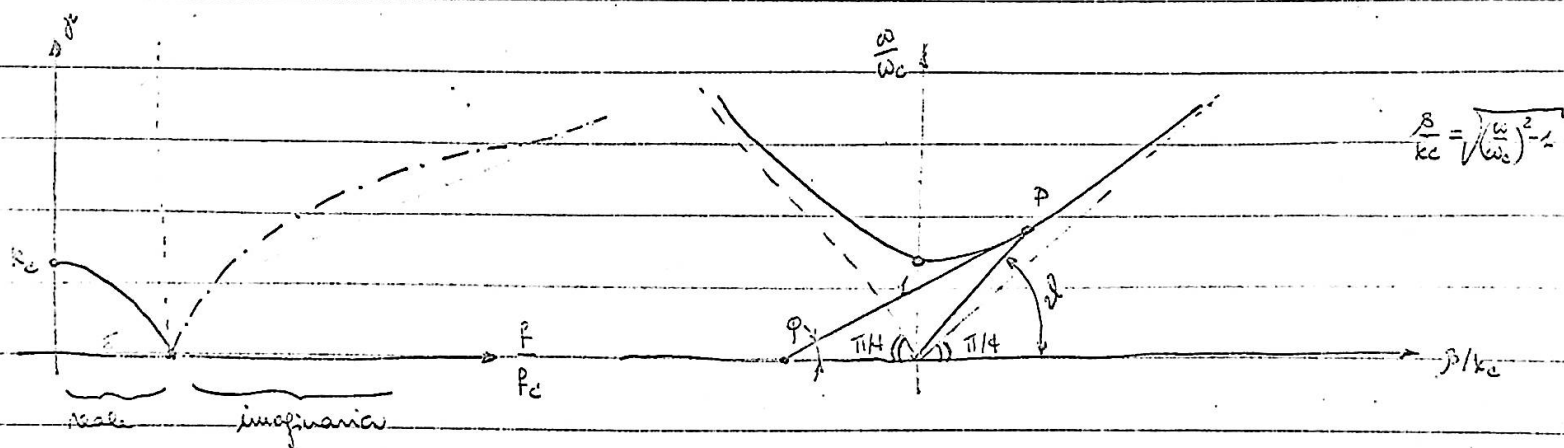
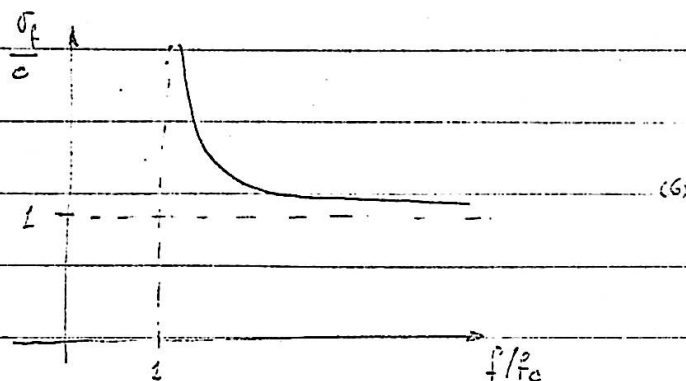
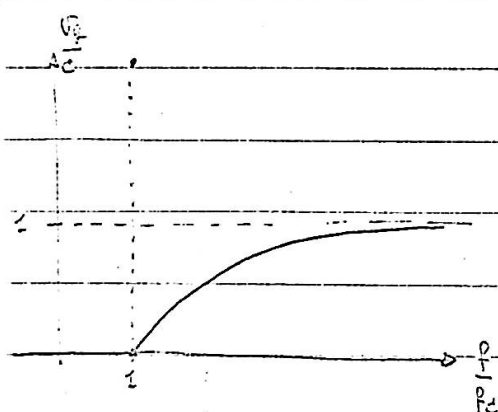
$$v_g < c \quad (3)$$

la velocità di fase è ($v_f > c$):

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (4)$$

e pertanto:

$$v_g v_f = c^2 \quad (5)$$



$$\tan \phi = \frac{\omega}{\omega_c} \frac{k_c}{\beta} = \frac{k_c}{\omega_c} \frac{v_g}{\beta} \quad \tan \phi = \frac{d(\frac{\omega}{\omega_c})}{d(\frac{\beta}{k_c})} = \frac{k_c}{\omega_c} \frac{v_g}{\beta}$$

(Questo, dato il punto di lavoro P.)

Consideriamo allora il modo TM : $H_z = 0$; risulta:

$$\nabla_{xy}^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad (1)$$

risulta da (1) si trovano le altre componenti del campo:

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad ; \quad E_y = -\frac{1}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad ; \quad H_x = \frac{\beta^2}{j\omega\mu k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad ; \quad H_y = \frac{\beta^2}{j\omega\mu k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2)$$

Dalle (2) risulta:

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{\beta^2} H_y = \frac{k_c \sqrt{\left(\frac{p}{f_c}\right)^2 - 1}}{\omega\epsilon} H_y = \frac{f_c}{f} \eta \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1} H_y \quad (3)$$

2 principi:

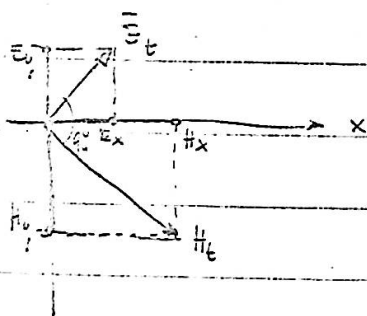
$$E_z = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} H_y = Z_{TM}^* H_y \quad (4)$$

e ancora:

$$E_y = -\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} H_x = -Z_{TM}^* H_x \quad (5)$$

Se $f > f_c$, E_x ed H_y sono in fase, ed E_y ed H_x sono in opposizione di fase [Zona di propagazione senza attenuazione]. Dalle (4) e (5) segue in tale caso che $\vec{E}_{(xy)}$ ed $\vec{H}_{(xy)}$ sono perpendicolari (per le solite ragioni). Anche $\vec{E} = \vec{E}_t$ ed $\vec{H} = \vec{H}_t$ (in xy) sono in fase, e questo lo si vede definendo l'impedenza d'onda

~~impedenza trasversale~~ trasversale:



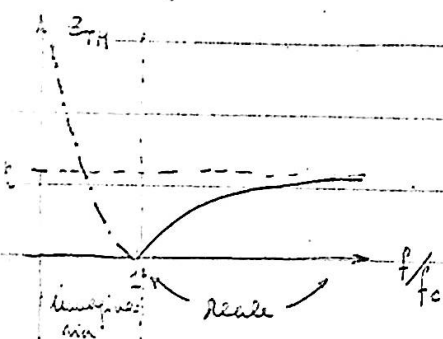
$$Z_{TM} = \frac{E_t}{H_t} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}$$

dice:

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

noto il tipo Z_{TM} è reale; sotto è l'impedenza immaginaria.

Tetrate di Poynting (notare che E_z non contribuisce al flusso lungo z di tale vettore, il che è l'unica cosa che ci interessa).



$$\vec{S} \cdot \vec{k} = S_z = E_t H_t$$

e quindi la potenza media che passa attraverso l'unità di superficie ortogonale all'asse z è:

$$P = \frac{E_z H_z}{2} = \frac{Z_{TH} H_z^2}{2}$$

sostituendo E_z ed H_z i valori massimi nel tempo di $\bar{E}_z$ ed $\bar{H}_z$ nella sezione considerata.

Quindi data S la sezione considerata:

$$W_t = \int_S \frac{E_z H_z}{2} dS = \frac{Z_{TH}}{2} \int_S H_z^2 dS$$

~~Quindi data S la sezione considerata:~~ risulta:

$$H_z^2 = H_x^2 + H_y^2 = \frac{\beta^4}{k_0^4 \omega^2 \mu^2} \left\{ \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)^2 \right\} = \frac{\beta^4}{k_z^4 \omega^2 \mu^2} |\nabla_{xy} E_z|^2$$

sostituendo:

$$\nabla_{xy} E_z = \frac{\partial E_z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \bar{j}$$

o anche:

$$H_z^2 = \frac{\beta^4}{k_0^4 \omega^2 \mu^2} (\nabla_{xy} E_z) \cdot (\nabla_{xy} E_z)$$

consideriamo il vettore:

$$E_z \nabla_{xy} E_z \quad (1)$$

il quale giace nel piano xy , (e pertanto la sua dividente rispetto a z è nulla).

Poniamo un tratto di dielettrico e facciamo il flusso del vettore (1) attraverso un

volume cilindrico di dielettrico di area S ed alto dz (sostituendo $\bar{u}$ la normale al ∂S):



$$\int_V \nabla_{xy} \cdot (E_z \nabla_{xy} E_z) dV = dz \int_S \nabla_{xy} \cdot (E_z \nabla_{xy} E_z) dS =$$

$$= dz \oint_{\partial S} (E_z \nabla_{xy} E_z) \cdot \bar{u} dl = dz \int_{\partial S} E_z \frac{\partial E_z}{\partial u} dl = 0 \quad (2)$$

perché nel contorno $E_z = 0$ risulta:

$$\nabla \cdot [\bar{a} \bar{b}] = \bar{b} \cdot \nabla \bar{a} + \bar{a} \cdot \nabla \bar{b} \quad (3)$$

e quindi:

$$\nabla_{xy} \cdot (E_z \nabla_{xy} E_z) = (\nabla_{xy} E_z) \cdot \nabla_{xy} E_z + E_z \nabla_{xy} \cdot \nabla_{xy} E_z \quad (4)$$

e quindi, dalle (2):

$$\int_V \nabla_{xy} \cdot (E_z \nabla_{xy} E_z) dV = dz \left[\int_S (\nabla_{xy} E_z)^2 dS + \int_S E_z \nabla_{xy}^2 E_z dS \right] = 0 \quad (5)$$

$$\int_S (\nabla_{xy} E_z)^2 dS = - \int_S E_z \nabla_{xy}^2 E_z dS = + \int_S k_z^2 E_z^2 dS \quad (6)$$

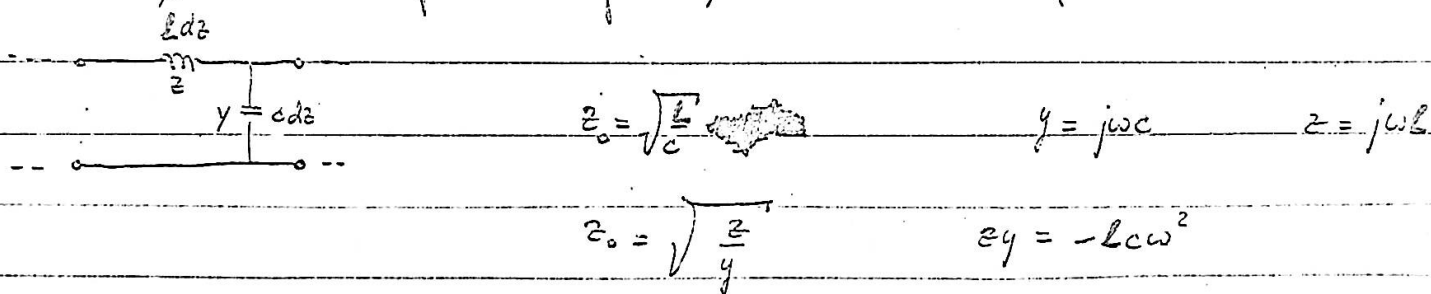
è pertanto:

$$W_e = \frac{Z_{TM}}{2} \frac{\beta^2}{k_c^2 \omega^2 \mu^2} k_c^2 \int_S E_z^2 dS = \frac{1}{2l} \left(\frac{f}{f_c} \right) \sqrt{\left(\frac{f}{f_c} \right)^2 - 1} \int_S E_z^2 dS \quad (1)$$

k_c è quindi reale, come si vede dalla (6) di p. precedente, dovendo essere reale lo integrale a primo membro. Per giungere alla (1) si manipola la costante moltiplicativa come segue:

$$\begin{aligned} \frac{Z_{TM}}{2} \frac{\beta^2}{k_c^2 \omega^2 \mu^2} &= \frac{Z_{TM}}{2} \frac{\omega^4 \mu^2 \epsilon^2}{k_c^2 \omega^2 \mu^2} = \frac{Z_{TM}}{2} \frac{\omega^2 \epsilon^2}{k_c^2} = \frac{Z_{TM}}{2} \frac{4\pi^2 f^2 \epsilon^2}{4\pi^2 \mu \epsilon f_c^2} = \frac{Z_{TM}}{2} \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 = \\ &= \frac{l}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2} \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 = \frac{1}{2l} \sqrt{\left(\frac{f}{f_c} \right)^2 - 1} \left(\frac{f}{f_c} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Si vede che, a causa della (2), W_e cresce al crescere delle frequenze; si fatti la (2) è nulla per $f = f_c$ e va all'infinito per $f \rightarrow \infty$ senza più annullarsi. Pertanto, a parità di W_e trasmessa, alle alte frequenze E_z è molto più piccola che alle basse frequenze. Si dice che il modo TM alle alte frequenze, tende a diventare un modo TEM . S'è visto un circuito equivalente per il modo TEM del tipo:



è pertanto $\sqrt{ZY} = j\omega\sqrt{LC}$, e pertanto:

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = \sqrt{ZY}$$

Per fare lo stesso nel modo TM , ad una frequenza fissa, bisognerebbe definire tensioni e correnti, il che non è possibile; però, da un punto di vista circuitistico si può ammettere un circuito equivalente come quello a lato, per cui:

$$\begin{cases} v+dv = v - i Z dz \\ i+di = i - Y dz (v+dv) \end{cases}$$

tenuto delle equazioni:

$$-\frac{di}{dz} dz = y dz \left(v + \frac{dv}{dz} dz \right) \Rightarrow yv = -\frac{di}{dz} \quad (1)$$

$$z dz = -\frac{dv}{dz} dz \Rightarrow z v = -\frac{dv}{dz} \quad (2)$$

da cui, derivando:

$$\frac{d^2 i}{dz^2} = zy i \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = zy v \quad (3)$$

che è l'equazione di una propagazione sinusoidale con costante di propagazione $\gamma = \sqrt{zy}$.

Notare che γ può avere una parte reale che definisce una attenuazione dell'onda.

Si trova anche che: ⁽¹⁾

$$z_0 = \frac{v}{i} = \sqrt{\frac{z}{y}} \quad (4)$$

Tuttavia, dalla (3) di pp. 56 segue:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \gamma^2 F \quad (4')$$

Allora risulta:

$$z = z_0 \gamma \quad \gamma = \frac{\gamma}{z_0} \quad (5)$$

dal fatto che deve essere:

$$\gamma^2 = \sqrt{zy}$$

$$z_0^2 = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

(5')

Quindi trovato un certo modo di propagazione con γ e z_0 , si possono trovare z

ed y , da cui il circuito equivalente. Le cose è opinabile, perché bisogna definire

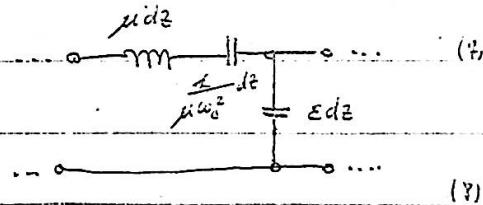
in modo preciso v ed i , e inoltre z_{TH} non è z_0 . Tuttavia, nel modo T.M.:

$$z_{TH} = j \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \gamma = j \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (6)$$

e si trova allora:

$$z = z_{TH} \gamma = j \omega \mu - j \frac{\mu \omega_c^2}{\omega}$$

$$y = \frac{\gamma}{z_{TH}} = j \omega \epsilon$$



Quindi y è realizzabile in modo semplice con una capacità ϵ unita di lunghezza pari a $j \omega \epsilon dz$. E z è composta da una induttanza $j \omega \mu dz$ in serie con un condensatore di capacità pari a $(1/\mu \omega_c^2) dz$.

(1) - Infatti:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{z i}{y v} \quad z di = \frac{\gamma}{z} v dv \quad \frac{i^2}{z} = \frac{\gamma}{z} \frac{v^2}{2} \Rightarrow \frac{v}{i} = \sqrt{\frac{z}{\gamma}} \quad (9)$$

Se esiste una conducibilità del dielettrico allora tutto ciò che mi è scritto resta valido se mi sostituisce ϵ con ϵ_c , e questo in modo assolutamente rigoroso. Quindi il modo TM mi propaga anche in un dielettrico con perdite, purché le pareti abbiano conducibilità infinita. [L'alternativa dovuta alle perdite dielettriche è in tal caso: (***)

$$\alpha_D = \text{Re}[\gamma] \quad (1)$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon (1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'})} = j k_0 \sqrt{-\left(\frac{k_c}{k_0}\right)^2 + 1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'}} = j k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'}} \quad (2)$$

quando k_0 la k dello stelo supera tutte le perdite: $k_0 = \sqrt{\mu \epsilon} \omega$; ancora:

$$\gamma = \gamma_0 \left\{ \sqrt{1 - \frac{j(\epsilon''/\epsilon')}{1 - (f_c/f)^2}} \right\} \quad (3)$$

quando:

$$\gamma_0 = j k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (4)$$

se $f \gg f_c$, quando $\epsilon''/\epsilon' \ll 1$, allora $\gamma \approx \gamma_0$; in prima approssimazione:

$$\gamma \approx \gamma_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} j \frac{\epsilon''/\epsilon'}{1 - (f_c/f)^2} \right\} \quad (5)$$

e quindi la parte reale è:

$$\alpha_D = k_0 \frac{1}{2} \frac{\epsilon''/\epsilon'}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (6)$$

e ancora:

$$\alpha_D = \frac{G \eta}{2 \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (7)$$

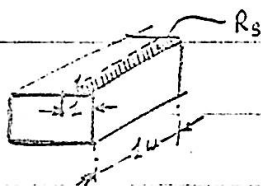
Si vede che α_D non dipende essenzialmente dalla geometria, eccetto che per f_c . (*)
 Se teniamo conto delle perdite del conduttore si deve fare una approssimazione concettuale che è la seguente: se si vuole tener conto delle conducibilità delle pareti bisogna di calcolare
 rifare tutte le equazioni e diventano complicatissime. Sappiamo allora che la

distribuzione del campo come se la conducibilità delle pareti fosse infinita; ridistribuiamo il campo nelle pareti di conducibilità finita assumendo come condizione al contorno il campo calcolato prima. Ammettiamo anche che pure H_T nel contorno dia luogo ad una corrente superficiale, ma non di volume, e questo perché la profondità δ di penetrazione delle correnti è molto piccola alle alte frequenze. Allora trattato δ si trova R_s (1) e si assume pure resistenza R_s su infinitamente piccola (corrente superficiale che incontra una resistenza R_s); inoltre sopra allo strato R_s ammettiamo che ci sia un materiale infinitamente conduttore. In tali ipotesi:

$$H_T = J_z \quad (1)$$

La potenza dissipata in guida è pertanto, per un metro di guida:

$$W_D = \oint_P \frac{1}{2} R_s J^2 dl \quad (2)$$



avendo P la linea che delimita la sezione della guida.

La densità di corrente è diretta secondo l'asse z ed è numericamente uguale ad H_T , quindi:

$$W_D = \frac{1}{2} \oint_P R_s H_T^2 dl \quad (3)$$

$$H_T^2 = \frac{J^2}{k^2} \left[+ \frac{1}{\mu^2} \left\{ \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)^2 \right\} \right]$$

$$W_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_s}{2} \cdot \frac{\partial k^4}{k^2 \omega^2 \mu^2} \oint_P \left(\nabla_{xy} E_z \right)^2 dl \quad (4)$$

Si introduce una attenuazione ammettendo che la potenza trasmessa dipende esponenzialmente da z :

$$W_T = W_0 e^{-2\alpha_c z} \quad (5)$$

Allora:

$$W_D = - \frac{dW_T}{dz} = + W_0 2\alpha_c e^{-2\alpha_c z} = 2\alpha_c W_T \quad (6)$$

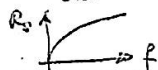
(1) - R_s si calcola come la resistenza di un parallelepipedo di parete, alto δ , e di superficie unitaria; e si ammette che la corrente superficiale incontra la resistenza R_s .



(2) - Tenere presente che risulta:

$$\frac{\partial E_z}{\partial u} = \nabla_{xy} E_z \cdot \vec{u} \Rightarrow \left| \frac{\partial E_z}{\partial u} \right| = |\nabla_{xy} E_z| \cos \psi \quad (7)$$

$$\left(R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \frac{1}{\sigma \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu}}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi f \mu}} \right) \Rightarrow R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$



Da cui:

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \frac{W_D}{W_T} \quad (1)$$

e vice del tipo:

$$\alpha_c = H \frac{\oint_{\partial S} \left(\frac{\partial E_z}{\partial u} \right)^2 dl}{\int_S E_z^2 dS} \quad \alpha_c = H \frac{\oint_{\partial S} (\nabla_{xy} E_z)^2 dl}{\int_S E_z^2 dS} \quad (2)$$

dove H è una opportuna costante. L'attenuazione totale per unità di $\alpha_D + \alpha_c$: $\gamma = \alpha_D + \alpha_c + j\beta$

[Tener presente che una linea di forza di H nel piano xy può essere chiusa solo se concatenata una corrente, cioè o c'è di mezzo un conduttore oppure c'è una corrente di spostamento lungo z cioè una E_z ; analogamente una linea chiusa di E in xy si può essere solo se c'è una H_z , etc.]

Passiamo ora al modo TE. È sempre $E_z = 0$; pertanto il modo è governato dalle equazioni:

$$\nabla^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (3)$$

risulta:

$$E_x = \frac{\beta^2}{j\omega\epsilon k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}; \quad E_y = -\frac{\beta^2}{j\omega\epsilon k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4)$$

ancora:

$$\gamma = jk \sqrt{1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^2} \quad (5)$$

Calcoliamo Z_{TE} definita come:

$$Z_{TE} = \frac{E_T}{H_T} \quad (6)$$

risulta:

$$Z_{TE} = \frac{\beta^4 k_c^4}{\sqrt{-j\omega\epsilon k_c^4 \gamma^2}} = \frac{k^4}{\sqrt{-j\omega\epsilon^2 \gamma^2}} = \frac{k^4}{\sqrt{j\omega\epsilon^2 k^2 \left(1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^2\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^2}} \quad (7)$$

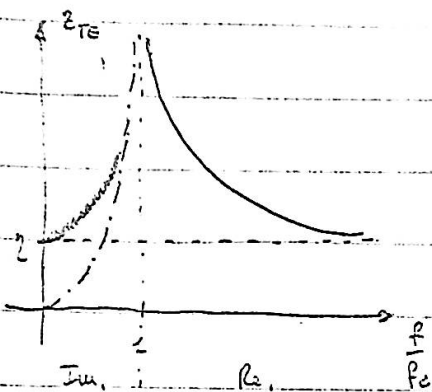
e quindi:

$$Z_{TE} = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^2}} \quad (8)$$

Troviamo il circuito equivalente:

$$Z = Z_{TE} \gamma = j K \eta = j \omega \mu \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{Z_{TE}} = j \omega \epsilon + \frac{\epsilon \omega_c^2}{j \omega} \quad (2)$$



Pertanto il ramo longitudinale è una induttanza di induttanza μ , il ramo trasversale è formato dal parallelo di un condensatore di capacità ϵ e di una induttanza ~~in parallelo~~ di valore $1/\epsilon \omega_c^2$.

Dalle (2) di γ precedente:

$$E_x = \frac{-\beta^2}{j \omega \epsilon k_c^2} \frac{k_c^2}{\gamma} H_y = - \frac{\beta^2}{j \omega \epsilon \gamma} H_y = Z_{TE} H_y \quad (3)$$

$$E_y = \frac{\beta^2}{j \omega \epsilon \gamma} H_x = - Z_{TE} H_x \quad (4)$$

da cui, se γ è immaginario puro (caso in cui si ha propagazione), E_x ed H_y sono in fase e E_y ed H_x sono sfasati di π ; inoltre E_T ed H_T sono perpendicolari, per i motivi ragionevoli.

Il calcolo della potenza trasmessa è analogo a quanto si è fatto per il modo T.M. ⁽⁴⁾

$$W_T = \int_S \frac{E_T H_T}{2} ds = \frac{1}{2 Z_{TE}} \int E_T^2 ds = + \frac{1}{2 Z_{TE}} \frac{(\beta/\epsilon c)^4}{\omega^2 \epsilon^2} \int (\nabla_{xy} H_z)^2 ds = + \frac{k_c^2 (\beta/\epsilon c)^4}{2 Z_{TE} \omega^2 \epsilon^2} \int H_z^2 ds \quad (5)$$

in definitiva:

$$W_T = \frac{l}{2} \left(\frac{\beta}{\epsilon c} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta c}{\omega} \right)^2} \int H_z^2 ds \quad (6)$$

Calcoliamo la energia dissipata nelle pareti; bisogna tener presente che esiste una $\vec{T}$ diretta come l'asse z (dovuta alle componenti trasversali del campo) ed una $\vec{T}$ diretta trasversalmente a z (dovuta alle componenti di $\vec{H}$ dirette secondo l'asse z). Sarà:

$$\vec{T}_z = H_T \quad (7)$$

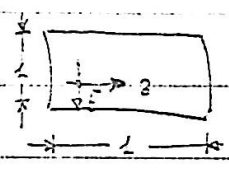
2) - Si trova:

$$\int_S (\nabla_{xy} H_z)^2 ds + \int_S H_z^2 \nabla_{xy}^2 H_z ds = \oint_{\partial S} H_z \nabla_{xy} H_z \cdot \vec{u} dl = 0$$

in quanto $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$, e pertanto è pure $\nabla_{xy} H_z \cdot \vec{n} = 0$, nel ∂S . Da cui si ricava la (5).

ed $\vec{T} = H_z$

essendo $\vec{T}$ le componenti di $\vec{T}$ nel piano xy , dirette tangenzialmente alle pareti. Consideriamo un elemento unitario di parete avente resistenza R_s (calcolata tenendo conto della profondità di penetrazione delle correnti e della resistività delle pareti, come si è già spiegato).



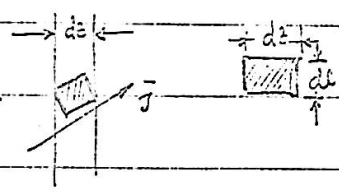
Rimettendo a parte una costante h che determineremo:

$$W_D = h R_s \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (\vec{T}_x^2 + \vec{T}_y^2) d\ell = \frac{h R_s}{2} \left[\oint_{\Gamma} H_z^2 d\ell + \oint_{\Gamma} H_z^2 d\ell \right] =$$

$$= \frac{h R_s}{2} \left[\oint_{\Gamma} H_z^2 d\ell + \frac{\gamma^2}{k_c^2} \oint_{\Gamma} (\nabla_{xy} H_z)^2 d\ell \right] \quad (2)$$



Consideriamo una striscia di profondità dz ; la $\vec{T}$ non è diretta secondo l'asse z .



Immaginiamo la striscia suddivisa in elementi infinitesimi ortogonali a $\vec{T}$. La resistenza nella direzione $\vec{T}$ è R_s moltiplicata per l'area del rettangolino; in particolare:

$$R_s \frac{dz d\ell \cos \theta}{d\ell \cos \theta} = R_s \frac{dz}{d\ell} \quad (2)$$

e quindi h nella (2) è unitaria. Pertanto:

$$W_D = \frac{R_s}{2} \left[\oint_{\Gamma} H_z^2 d\ell + \frac{\gamma^2}{k_c^2} \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \ell} \right)^2 d\ell \right] \quad (3)$$

In questo $\partial H_z / \partial n = 0$; prendendo x coincidente con $\vec{T}$, ed y con $\vec{E}$, $\nabla_{xy} H_z$ coincide con $\partial H_z / \partial \ell$.

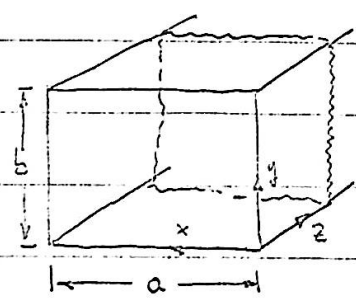
Guida d'onda a sezione rettangolare

Consideriamo il modo TM :

$$\nabla_{xy}^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

assumendo che sia:

$$E_z(x,y) = A(x) \cdot B(y)$$



referando le variabili si trova:

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} = -k_c^2 \quad (1)$$

ovvero:

$$\ddot{A} = -k_x^2 A \quad \ddot{B} = -k_y^2 B \quad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (2)$$

ed è:

$$\begin{cases} A = A \sin k_x x + B \cos k_x x \\ B = C \sin k_y y + D \cos k_y y \end{cases} \quad (3)$$

(Abbiamo scelto una soluzione periodica fuché deve essere E_z nulla sempre nel caso
bordo). Deve essere:

$$\begin{cases} \int E_z = 0 & x=0 & k_y \\ \int E_z = 0 & x=a & k_y \end{cases} \quad \begin{cases} D=0 \\ A \sin k_x a = 0 \end{cases} \quad k_x a = u\pi \quad k_x = u \frac{\pi}{a} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \int E_z = 0 & y=0 & k_x \\ \int E_z = 0 & y=b & k_x \end{cases} \quad \begin{cases} D=0 \\ C \sin k_y b = 0 \end{cases} \quad k_y b = v\pi \quad k_y = v \frac{\pi}{b} \quad (5)$$

ed è:

$$E_z(x,y) = H (\sin k_x x) (\sin k_y y) \quad (6)$$

ovvero $k_x = k_y$ forniti dalle (4) e (5). Ed è:

$$k_c = \pi \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} = k_{c,u,v} \quad (7)$$

La guida d'onda si può quindi propagare una duplice infinità di modi TM, ognuno
con una costante di propagazione propria e con una propria frequenza critica:

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} = f_{c,u,v} \quad (8)$$

Le $f_{c,u,v}$ sono tanto più elevate quanto più alto è l'ordine (u,v) del modo.

Se invio una frequenza fissa in guida, si propagano invece solo i modi che hanno

una $f_{c,u,v}$ più piccola di tale frequenza fissa.

Esiste per una f_c che è la più piccola possibile ed è f_{c11} ~~al di sotto di~~ al di sotto di f_{c12} tutto viene attenuato: i modi alternati caricano di energia un primo tratto di guida, e poi questa energia va avanti e indietro tra guida e generatore. Non può essere "m", o "n", nulli, perché in tal caso $E_z = 0$ ed ogni altro valore del campo è nullo; quindi m ed n devono essere al minimo uguali ad 1. Rimita:

$$\lambda_{c_{m,n}} = \frac{2\pi}{k_{c_{m,n}}} \quad (1)$$

(2) cioè:

$$\lambda_{c_{m,n}} = 2 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{(mb)^2 + (na)^2}} \quad (2)$$

Se una modalità perfettamente definita, in guida, bisogna trasmettere con una frequenza compresa tra f_{c11} e la f_c immediatamente superiore; in caso contrario tutti i modi che si possono propagare si propagano e si ha un'onda non perfettamente definita, e questo non è desiderabile nelle applicazioni.

La potenza trasmessa è funzione decrescente di m ed n; poiché $\frac{1}{\lambda}$ da f_c al denominatore. Anche per questo è conveniente usare frequenze il più possibile vicine alle f_{c11} . Inoltre le perdite dielettriche aumentano sempre con la frequenza. Consideriamo ora il modo TE. Sul contorno deve essere:

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad \forall x \quad C = 0$$

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial y} \right]_{y=b} = 0 \quad \forall x \quad D \sin k_y b = 0 \quad k_y b = m\pi \quad k_y = m \frac{\pi}{b}$$

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \quad \forall y \quad A = 0$$

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x=a} = 0 \quad \forall y \quad B \cos k_x a = 0 \quad k_x a = n\pi \quad k_x = n \frac{\pi}{a}$$

(3) - Saper che per λ_{c11} , nel caso sia $a=b$, si ha il valore $a\sqrt{2}$; cioè la λ_{c11} è la diagonale del quadrato che costituisce la sezione della guida.



come si vede subito ricordando che $\vec{z}$:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = (A \sin k_x x + B \cos k_x x) (C k_y \cos k_y y - D k_y \sin k_y y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (A k_x \cos k_x x - B k_x \sin k_x x) (D \cos k_y y + C \sin k_y y) \quad (2)$$

in fine:

$$H_z = H_0 (\cos k_x x) (\cos k_y y) \quad (3)$$

modi normali:

$$k_x = m \frac{\pi}{a} \quad k_y = n \frac{\pi}{b} \quad k_c = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (4)$$

per $m=n=0$, $\vec{z}$ $H_z = H_0 = \text{cte}$; niente onde:

$$E_x = -\frac{\beta^2}{j\omega \epsilon k_c^2} H_0 k_y \cos k_x x \sin k_y y \quad ; \quad E_y = +\frac{\beta^2}{j\omega \epsilon k_c^2} H_0 k_x \sin k_x x \cos k_y y \quad (5)$$

ed $\vec{z}$ $E_x = E_y = 0$ per $m=n=0$; quindi in tal caso non si ha propagazione. Se uno dei due, tra m ed n è nullo, allora è evidente che c'è propagazione; le frequenze critiche più piccole sono allora (vedi (4) di (4)):

$$f_{c_{02}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{b} = \frac{1}{2b\sqrt{\mu\epsilon}} \quad ; \quad f_{c_{20}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (6)$$

però: (2) sempre $a > b$) niente:

$$f_{c_{20}} < f_{c_{02}} \quad (7)$$

quindi $f_{c_{20}}$ è la più piccola frequenza critica. TE₁₀ è pertanto il modo fondamentale della guida d'onda a sezione rettangolare, poiché $f_{c_{20}}$ è la più piccola anche delle f_c dei modi TM, come risulta da ciò che si è detto.

Risultato:

$$\lambda_{c_{20}} = \frac{2\pi a}{\pi} = 2a \quad (8)$$

Nota: che $\lambda_{c_{20}}$ è nulla che si avrebbe nel vuoto, non è quella in guida.

(9) - Risultato anche:

$$\gamma = j\beta = j \frac{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4f^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (9)$$

Pertanto la dimensione più grande delle guide è mezza lunghezza d'onda, poiché si hanno sempre vicini a $\lambda_{c,0}$. A parità di a , bisogna che sia $b < a$, se non deve essere troppo piccola, perché a parità di pendenza trasversale H_z diventa troppo grande, e pertanto $|E|$ viene molto grande e può scaricare. Inoltre se b è troppo piccola l'attenuazione dovuta alle pareti aumenta, perché le pendenze dissipate dipendono dal perimetro, ed α_c diminuisce all'aumentare del perimetro.

In TE_{10} risulta:

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \quad ; \quad E_x = 0 \quad ; \quad E_y = \frac{k_z^2}{j\omega \epsilon k_c^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \quad ; \quad H_y = 0 \quad (1)$$

$$H_x = \frac{V_0}{k_c^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \quad (2)$$

Quindi $\vec{E}$ ha componenti solo secondo y . ~~Il campo elettrico è diretto lungo l'asse y~~; mentre il vettore del campo dipende da y ; pertanto le linee di forza di $\vec{E}$ sono rette parallele all'asse y ; nelle pareti ci sono cariche. Il secondo x ha lo stesso comportamento. Sul contorno è solo $H_z \neq 0$, e quindi ci sono correnti solo nelle pareti ortogonali ad H_z . (*)
Riscriviamo E_y come segue (tenendo conto $f_{c,0} = f_c = \frac{c}{2a}$):

$$\begin{aligned} E_y &= -j \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \frac{H_0 \pi}{\omega \epsilon a} \sin \frac{\pi x}{a} = -j \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \frac{H_0 \pi}{2\pi f \epsilon a} \sin \frac{\pi x}{a} = -j \frac{f}{f_c} \frac{1}{2\pi \epsilon f_c} H_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} = \\ &= -j \frac{f}{f_c} \frac{1}{2} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} = -j \frac{2a}{\lambda_0} \frac{1}{2} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \end{aligned} \quad (3)$$

ricorda: $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ e quindi $f/f_c = 2a/\lambda_0$. dato che $H_x = \frac{E_y}{Z_{TE}}$:

$$H_x = \frac{1}{2} H_0 \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda_0} \right)^2 - 1} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4)$$

In tutte queste equazioni manca ancora il fattore di propagazione lungo z ($\gamma = j\beta$) del tipo $e^{j(\omega t - \beta z)}$. Troviamo il β .

$$\beta_0 = j \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{k^2} \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)} = j \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4f^2} \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \right)} \quad (1)$$

e quindi:

$$\beta_{10} = -j\beta_{10} = -j\beta = j \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{2a} \right)^2} \quad (2)$$

per tanto:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{2a} \right)^2} \quad (3)$$

Ricordando che:

$$v_f = c / \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0} \right)^2} \quad (4)$$

la lunghezza d'onda si può dire:

$$\lambda_z = \frac{v_f}{f} = \frac{c}{f \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0} \right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0} \right)^2}} \quad (5)$$

Le componenti del campo sono pertanto le seguenti:

$$E_z = E_x = H_y = 0$$

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (6)$$

$$E_y = -j H_0 \left(\frac{2a}{\lambda_0} \right) \sin \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$H_x = +j H_0 \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda_0} \right)^2 - 1} \sin \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (7)$$

di cui bisogna prendere le parti reali. In definitiva:

$$E_z = E_x = H_y = 0$$

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z) \quad (8)$$

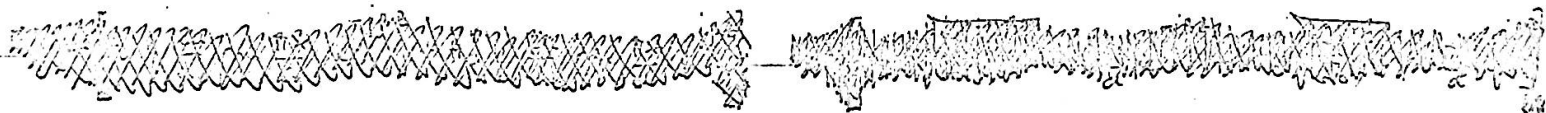
$$E_y = H_0 \left(\frac{2a}{\lambda_0} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_x = -H_0 \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda_0} \right)^2 - 1} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z) \quad (9)$$

Questo vale nel caso di onde puramente dirette, il che si ottiene terminando la guida con un resistore di resistenza pari a Z_{re} , o con una guida infinitamente lunga. Per il caso generale, trascurando il termine $e^{j\omega t}$, sarà, come per le onde stazionarie:

$$E_z = E_x = H_y = 0$$

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} + H'_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{j\beta z} \quad (10)$$



~~Espressioni~~

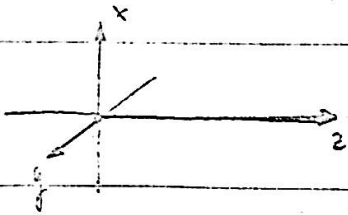
~~Espressioni~~

(11)

Si esprime cioè il campo come somma di un'onda diretta e di un'onda inversa.

Cavità (4)

Consideriamo una guida d'onda rettangolare terminata ad un estremo da una lamina perfettamente conduttrice; sia in $z=0$ tale lamina. Delle (10) di pag. 83.



83. segue che $H'_0 = -H_0$, in quanto per $z=0$ deve essere $H_z = 0$.

Potanto:

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \left[\frac{e^{-j\beta z}}{2j} - \frac{e^{j\beta z}}{2j} \right] = -2j H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \beta z$$

infine, moltiplicando per $e^{j\omega t}$ e prendendone la parte reale:

$$H_z = -2 H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \beta z \sin \omega t \quad (1)$$

Si vede che per distanze $\pm d$ dall'origine tali che:

$$(h=0,1,2,\dots) \quad \beta d = h\pi \quad d = \frac{h\pi}{\beta} = \frac{h}{2} \frac{a_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{2a}\right)^2}} \quad (2)$$

è identicamente nullo; pertanto nulla cambia se interpretiamo una superficie metallica a distanze $\pm d$ dall'origine e perpendicolare all'asse z , e se togliamo la lamina metallica in $z=0$, etc. Pertanto si ha una cavità parallelepipedica formata da

una guida d'onda rettangolare limitata da due superfici metalliche perfette il campo H_z è fornito dalle (2) qualora la lunghezza d del tronco di guida soddisfi la (2).

Ricordando ora le considerazioni fatte a pag. 56, dato che un'onda diretta si esprime come $B e^{-\gamma z}$ ed un'onda inversa come $B e^{+\gamma z}$, similiter nel nostro caso:

$$\begin{cases} E_{dy} = -\frac{k^2}{j\omega\epsilon k_c^2} \frac{\partial H_{zd}}{\partial x} = j \frac{2a^2}{\pi d_0} \eta \frac{\partial H_{zd}}{\partial x} \\ E_{dz} = -\frac{k^2}{j\omega\epsilon k_c^2} \frac{\partial H_{zd}}{\partial x} = j \frac{2a^2}{\pi d_0} \eta \frac{\partial H_{zd}}{\partial x} \end{cases} \quad \begin{cases} H_{dx} = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_{zd}}{\partial x} = -j \frac{a}{\pi} \sqrt{\left(\frac{2a}{d_0}\right)^2 - 1} \frac{\partial H_{zd}}{\partial x} \\ H_{dz} = +\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_{zd}}{\partial x} = j \frac{a}{\pi} \sqrt{\left(\frac{2a}{d_0}\right)^2 - 1} \frac{\partial H_{zd}}{\partial x} \end{cases}$$

Scrivendo ora la (10) di pag. 83 come segue:

$$H_z = H_{zd} + H_{zi} = \left(H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} - H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{j\beta z} \right) \quad (3)$$

(1) È molto più semplice trattare direttamente E_y nella forma (9), sommandogli un'onda riflessa, e porre $E_y = 0$ in $z=0$

limita:

$$E_y = E_{yd} + E_{yi} = j \frac{2a^2}{\pi d_0} \eta \left[\frac{\partial H_{2d}}{\partial x} + \frac{\partial H_{2i}}{\partial x} \right] = j \frac{2a^2}{\pi d_0} \eta \left[-H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{j\beta z}{a}} + H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{\frac{j\beta z}{a}} \right] \quad (1)$$

$$H_x = H_{xd} + H_{xi} = j \frac{a}{\pi} \sqrt{\left(\frac{2a}{d_0}\right)^2 - 1} \left[-\frac{\partial H_{2d}}{\partial x} + \frac{\partial H_{2i}}{\partial x} \right] = j \frac{a}{\pi} \sqrt{\left(\frac{2a}{d_0}\right)^2 - 1} \left[+H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{j\beta z}{a}} + H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{\frac{j\beta z}{a}} \right] \quad (2)$$

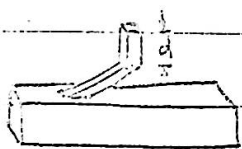
in definitiva, moltiplicando per $e^{j\omega t}$ e prendendone la parte reale:

$$\begin{cases} E_y = -2H_0 \frac{2a}{d_0} \eta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \beta z \cos \omega t \\ H_x = -2H_0 \sqrt{\left(\frac{2a}{d_0}\right)^2 - 1} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \beta z \sin \omega t \end{cases} \quad (3)$$

$$H_x = -2H_0 \sqrt{\left(\frac{2a}{d_0}\right)^2 - 1} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \beta z \sin \omega t \quad (4)$$

lasciamo quindi il campo totale, presente nelle cavità, sotto al modo TE_{10} .

Un tronco di guida d'onde rettangolare, con un estremo in derivazione ad una guida d'onda, e l'altro estremo chiuso con una lamina metallica (spessa mobile), è usato in microonde come risonatore (cavità). In effetti, se d è tale da far sì



che la frequenza ^{che è} f della guida, formi onde stazionarie, il campo nell'antenna è tale che alla sua ricarica nelle guide d'onda è come se ci fosse una lamina metallica, ed il

generatore posto all'imbocco della guida non si accorge. Se d non è tale allora il generatore vede un carico fortemente reattivo.

Per tener conto delle perdite che si hanno in una cavità si definisce un fattore di merito Q pari al rapporto tra ω volte l'energia massima immagazzinata nelle cavità e la potenza dissipata nelle pareti della cavità stessa:

$$Q = \frac{W_H \omega}{P_D} \quad (5)$$

Infine dalle (2) di pg. 84 si ricava che la frequenza minima alla quale si risona la cavità è finita da:

$$\beta = \frac{\pi}{d} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4f^2 a^2}} \quad (1)$$

da cui:

$$f = \frac{c}{2ad} \sqrt{(a^2 + d^2)} \quad (2)$$

in particolare, per $a = d$: $f = \frac{c}{a\sqrt{2}}$ $\lambda_0 = \frac{c}{f} = a\sqrt{2}$ (3)

cioè la lunghezza d'onda corrispondente è la diagonale del quadrato di lato a .

Radiatione

Se è possibile considerare come sorgenti del campo la densità di corrente e le cariche, allora il campo è completamente determinato dalle equazioni:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4)$$

In ogni caso dovremo risolvere quattro equazioni scalari, di Kirchhoff, del tipo:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = h \quad (5)$$

ovvero h una funzione nota dello spazio e del tempo. Risolte le (5) avremo i vettori del campo:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \wedge \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (6)$$

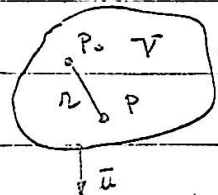
$\vec{E}$ e $\vec{J}$ sono da considerarsi note quando lo spazio si possa dividere in due regioni finite: una dielettrica ed una conduttrice nelle quali sia rispettivamente nota la corrente. Non occorre che si considerino le cariche, infatti, ricordando la condizione di Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

sembrerebbe che, trovato $\vec{A}$ e ϕ dalle (4), si devono verificare le (7); se questo non avviene la cosiddetta soluzione non è valida. Se può ritenersi che le sole cariche che debba mettere sul contorno sono solo quelle che salvaguardano la equazione di

continuità, la condizione di Lorentz è allora automaticamente verificata⁽⁴⁾. Da questo fatto segue che il campo è descrivibile con il solo potenziale vettore; infatti, per fare questi calcoli è necessario conoscere delle spten finché su $\bar{V}$; da ciò segue $\bar{S}$, poiché deve sempre essere salvaguardata l'equazione di continuità; ma basta trovare $\bar{A}$ data la $\bar{S}$, e ricavare φ dalle condizioni di Lorentz che tutto va a posto, in base a quanto abbiamo detto.

Il risultato dell'integrazione delle equazioni di Kirchhoff, su un volume V limitato dal ∂V , dello P_0 un punto fisso in V e P un punto mobile in V o sul ∂V ; dello r la distanza tra P e P_0 , è, in un caso di simmetria sferica:



$$4\pi f(P, t) = - \int_V \frac{h(P, t^*)}{r} dV + \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u} f(P, t^*) + \left[\frac{1}{r^2} f(P, t^*) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial u} f(P, t^*) \right] \frac{dS}{du} \right] \quad (1)$$

essendo:

$$t^* = t - \frac{r}{v} \quad (2)$$

il tempo ritardato, che è il tempo attuale meno il tempo necessario a percorrere la distanza r alla velocità v .

La (1) esprime in forme esatta il principio di Huyghens-Fresnel; infatti non è detto che V contenga le sorgenti; sufficerebbe ad esempio che non le contenga ($h \equiv 0$); allora il primo integrale della (1) è nullo; quello che rimane dice che in tale regione il campo in tutti i punti interni della regione dipende esclusivamente dal campo sul bordo di tale regione, e questo è proprio il principio di Huyghens, il quale dice che posta una superficie d'onde è possibile dedurre per altro si può anche dire che l'integrale superficiale costituisce il contributo al campo interno dovuto alle sorgenti esterne alla regione.

Sufficerebbe se che V comprenda una regione in cui $h \neq 0$, e mostreremo che h è stato nullo per $t < 0$. Allora per $t < 0$ il campo generato da h è ovunque nullo; pertanto in particolare è nullo nel ∂V .

(4) Se cioè $\rho = \nabla \cdot \bar{D}$ $\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ $\nabla \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ $\nabla \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \nabla \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = 0$ che è la derivata della ~~la~~ condiz. di Lorentz.

Quando $h \neq 0$ ($\mu t \geq 0$) il campo comincia ad internarsi i punti di ∂V solo per $t^* \geq 0$, cioè per $t \geq \frac{2}{v}$, che è come dire che il campo si propaga alla velocità v ; cioè a dire finiamo sempre trovare una superficie all'esterno della quale il campo è istantaneamente nullo; consideriamo allora una ∂V tale che il campo non ci sia ancora arrivato; l'integrale superficiale è nullo e rimane solo quello di volume (caso dello spazio infinito):

$$P(P_0, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\ddot{r}(P, t^*)}{r} dV \quad (1)$$

L'integrale di volume va esteso poi alle sole regioni dello spazio in cui $h \neq 0$.
 Notare ancora che l'integrale di superficie della (1) di eq. (1), si può dire anche che tutto il campo esterno al ∂V si può ricondurre a sorgenti nel solo ∂V , cosa importantissima con numerose applicazioni anche nei casi statici. Il campo interno dovuto a sorgenti esterne è noto e si nota $\vec{f}$ e $\partial f / \partial n$ sulle normali. Dalle (1) segue che l'elemento di sorgente in P crea un campo in P_0 che coincide con il campo in P , $2/v$ istanti prima, ma attenuato come $1/r$. Tenere presente che in tale caso (mezzo dielettrico) non è ovvio che il campo non si diffonda ma si attenui soltanto. ^(*)

Consideriamo ora un filo di sezione ΔS percorso da corrente i .

~~Il campo magnetico in un punto P_0 è dato da:~~ Risultata allora, nel nostro caso:

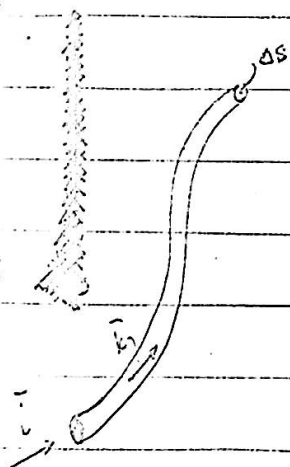
$$\vec{A}(P_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{+\vec{r} \ddot{J}(l, t^*)}{r} dl \Delta S \quad (2)$$

cioè:

$$\vec{A}(P_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_l \frac{+\mu \ddot{i}(l, t^*)}{r} dl \quad (3)$$

Assumiamo che " i " vari nel tempo con legge sinusoidale. Risultato:

$$\ddot{i}(l, t) = k R_0 \left[I e^{j\omega t + j\phi(l)} \right] \quad (4)$$



In fase complessa futuro risulta:

$$\bar{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_V \frac{e^{j[\omega(t-\frac{r}{c})+\phi(l)]}}{r} dV \quad (2)$$

La condizione di Lorentz $\bar{e}$, nel caso di regime sinusoidale:

$$\nabla \cdot \bar{A} + j\omega\mu\epsilon\phi = 0$$

da cui:

$$\phi = j \frac{\nabla \cdot \bar{A}}{\omega\mu\epsilon} \quad (2)$$

futuro:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \wedge \bar{A} \quad \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla\phi = -\frac{\partial}{\partial t} j\omega\bar{A} - j \frac{\nabla \nabla \cdot \bar{A}}{\omega\mu\epsilon} = -j \left[\frac{\nabla \nabla \cdot \bar{A}}{\omega\mu\epsilon} + \omega\bar{A} \right] \quad (3)$$

Nota: $df = v$, risulta: $\omega(t - \frac{r}{v}) = \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}$. Nel caso quasi stazionario $\nabla \cdot \bar{E} = 0$, quindi $\bar{I}$ non dipende da l , né ϕ dipende da l quindi la prima parte uguale a zero. Rischia:

$$\bar{A} = \frac{\mu I}{4\pi} e^{j\omega t} \int_V \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{r} dl = \quad (4)$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} e^{j\omega t} \int_l \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{r} dl = \frac{\mu I}{4\pi} e^{j\omega t} \bar{G} e^{j\phi} \quad (5)$$

avendo il fase dell'integrale risulta pari:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \wedge \bar{A} = -\frac{I}{4\pi} e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} [\nabla \wedge \bar{G}] \quad (6)$$

In tale caso risulta, se la sorgente $\bar{e}$ il filo di cui a pag. precedente:

$$i = I e^{j\omega t} \quad (I = I_0 e^{j\phi(l)} e^{j\omega t}) \quad i(l, t^*) = I e^{j\omega t^*} = I e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \quad (4)$$

e quindi:

$$A(P, t) = e^{j\omega t} \frac{1}{4\pi} \int_l \frac{\mu I^*}{r} dl = \frac{1}{4\pi} \int_l \frac{\mu I}{r} e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} dl = e^{j\omega t} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_l \frac{\mu I}{r} e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} dl \right\} \quad (5)$$

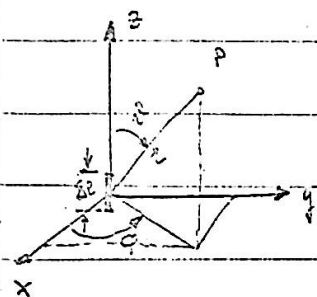
avendo noto:

$$I^* = I e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \quad (6)$$

E' ovvio che nella (5) si può sempre sottrarre il fattore $e^{j\omega t}$.

(*) Consideriamo un elemento di corrente infinitesimo nell'origine di lunghezza δl disposto lungo l'asse z . E' $\phi(z) = e^{j\omega t}$, e quindi $\phi(z) = 0$ con opportuna scelta del tempo.

Risultato:



$$\delta \bar{A} = \frac{I e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})}}{2} \delta l \bar{k} \left(+ \frac{\mu}{4\pi} \right)$$

$$\delta A_x = \delta A_y = 0$$

$$\delta A_z = \delta A = \left(\frac{\mu I \delta l e^{j\omega t}}{4\pi} \right) \frac{e^{-\frac{2\pi r}{\lambda}}}{2} = \delta A \frac{e^{-\frac{2\pi r}{\lambda}}}{2}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \wedge \bar{A} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial A}{\partial y} \bar{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \bar{j} \right\}$$

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{2y}{2r} \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{y}{\mu r} \frac{\partial A}{\partial r} \quad H_z = 0$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{2x}{2r} \frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{x}{\mu r} \frac{\partial A}{\partial r}$$

Analogaente si trova:

$$\frac{\partial^2 \delta A}{\partial x \partial y} = \frac{x y}{r^2} \frac{\partial^2 \delta A}{\partial r^2} - \frac{\partial \delta A}{\partial r} \frac{x}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{x y}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \delta A}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \delta A}{\partial r} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \delta A}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \delta A}{\partial r^2} + \frac{\partial \delta A}{\partial r} \left(\frac{x}{r^2} \frac{x}{r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{x^2}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \delta A}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \delta A}{\partial r} + \frac{2}{x^2} \frac{\partial \delta A}{\partial r} \right]$$

e risulta ancora:

$$\frac{\partial \delta A}{\partial r} = \delta A e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \left(-\frac{1}{r^2} - j \frac{1}{r} \frac{2\pi}{\lambda} \right) = -\delta A \frac{e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}}}{r} \left(\frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) = -\delta A \left(\frac{1}{r^2} + j \frac{2\pi}{\lambda r^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \delta A}{\partial r^2} = + \left(\frac{1}{r^2} + j \frac{2\pi}{\lambda r^2} \right)^2 \delta A + \frac{\delta A}{r^2} = \delta A \left[\frac{2}{r^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{4\pi}{\lambda r^2} \right]$$

Pertanto:

$$H_x = \frac{y}{\mu r} \delta A \left(\frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

$$H_y = -\frac{x}{\mu r} \delta A \left(\frac{1}{r} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

Trasliamo tali componenti in coordinate sferiche:

$$H_\phi = -H_x \sin\varphi + H_y \cos\varphi, \quad H_\theta = H_x \cos\varphi \cos\vartheta + H_y \sin\varphi \cos\vartheta - H_z \sin\vartheta; \quad H_r =$$

$$H_r = H_x \cos\varphi \sin\vartheta + H_y \sin\varphi \sin\vartheta + H_z \cos\vartheta$$

nel nostro caso:

$$H_\phi = \frac{1}{\mu r} SA \left(\frac{1}{2} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) [-x \sin\varphi - y \cos\varphi] \cos\vartheta = 0$$

$$H_r = 0$$

$$H_\theta \neq 0$$

x indica la direzione di propagazione, $\vec{H}$ è sempre perpendicolare alla direzione di propagazione; risulta:

$$H = H_\theta = \frac{SA}{\mu r} \left(\frac{1}{2} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) [y \sin\varphi + x \cos\varphi] = \frac{SA}{\mu r} \left(\frac{1}{2} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) r \sin\vartheta =$$

$$= \frac{I S \ell}{4\pi} e^{j[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r]} \left(\frac{1}{r^2} + j \frac{2\pi}{\lambda r} \right) \sin\vartheta$$

Consideriamo punti molto vicini all'elemento radiante ($r \ll \lambda$), il che è sempre verificato nei circuiti a bassa frequenza:

$$H = H_\theta = \frac{I S \ell}{4\pi} e^{j\omega t} \frac{\sin\vartheta}{r^2}$$

che è la nota legge di Laplace; H è temporaneamente in fase con I .

Sopprimiamo ora r qualunque fisso, e facciamo variare ω verso valori decrescenti (λ cresce):

$$H = H_\theta = \frac{I S \ell}{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{r^2} e^{j[\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}]}$$

Si vede che H obbedisce alle leggi di Laplace, ma per leggi di Laplace ritardata. Pochi valga tale approssimazione dove sono ω basse e $\lambda \gg r$.
Concludiamo che a piccole distanze dal radiatore o basse frequenze coincide, a meno di un piccolo ritardo, con il campo di Laplace.

Se invece $r \gg \lambda$:

$$H = H_0 = \frac{I \delta l}{4\pi} \sin \theta e^{j[\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda}]} j \frac{2\pi}{\lambda z}$$

si vede che H è in quadratura con le correnti nel radiatore z/v istanti prima.
 Le linee di forza di H sono cerchi concentrici con massimo rispetto a O nel piano equatoriale. L'operatore di H è una propagazione onicamente. Come già per la legge di Laplace classica si può rilevare che le leggi trovate non sono a rigore verificabili sperimentalmente, anche se in questo caso siamo in una situazione migliore, perché due cariche che oscillano sono approssimabili mediante un δl di corrente.

Calcolo:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial \delta A_z}{\partial z} = \frac{\partial \delta A}{\partial z} \quad \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{\partial^2 \delta A}{\partial z \partial x} \vec{i} + \frac{\partial^2 \delta A}{\partial z \partial y} \vec{j} + \frac{\partial^2 \delta A}{\partial z^2} \vec{k}$$

$$[\nabla (\nabla \cdot \vec{A})]_x = \frac{\partial^2 \delta A}{\partial z \partial x} = \frac{z x}{\lambda^2} \left[\delta A \left(\frac{2}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{4\pi}{\lambda z} \right) + \frac{\delta A}{z} \left(\frac{1}{z} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) \right] =$$

$$= \frac{z x}{\lambda^2} \delta A \left[\frac{3}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{6\pi}{\lambda^2} \right]$$

$$[\nabla (\nabla \cdot \vec{A})]_y = \frac{z y}{\lambda^2} \delta A \left[\frac{3}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{6\pi}{\lambda^2} \right]$$

$$[\nabla (\nabla \cdot \vec{A})]_z = \frac{\delta A z^2}{\lambda^2} \left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{6\pi}{\lambda z} - \left(\frac{1}{z} + j \frac{2\pi}{\lambda} \right) \left(-\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{\delta A z^2}{\lambda^2} \left[\frac{3}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{6\pi}{\lambda z} - \frac{1}{z^2} - j \frac{2\pi}{\lambda z^2} \right]$$

Da risulta:

$$\vec{E} = -j \left[\frac{\nabla \nabla \cdot \vec{A}}{\omega \mu \epsilon} + \omega \vec{A} \right]$$

si trova:

Espresso

$$\epsilon_0 = 0$$

$\vec{E}$ non ha componenti secondo $\vec{H}$, cioè $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$, quindi $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ sono ortogonali tra

di loro - ancora:

$$E_z = - \frac{j \cos \vartheta}{\omega \epsilon \mu} \frac{SA \epsilon}{r^2} \left[\frac{3}{r^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{6\pi}{\lambda^2} \right] (x \cos \varphi + y \sin \varphi) +$$

$$+ j SA \sin \vartheta \left\{ \frac{z^2}{\omega \epsilon \mu \epsilon} \left[\frac{3}{r^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{6\pi}{\lambda^2} - \frac{1}{z^2} - j \frac{2\pi z}{\lambda^2} \right] + \omega \right\} =$$

e ricordando che $z = x \cos \varphi + y \sin \varphi = r \cos \vartheta$ e $\frac{\epsilon}{r} = \cos \vartheta$!

$$E_z = + j SA \sin \vartheta \left[\omega - \frac{1}{r^2 \omega \mu \epsilon} - j \frac{2\pi}{\lambda^2 \omega \mu \epsilon} \right] = j SA \sin \vartheta \left[\omega - \frac{1}{r^2 \omega \mu \epsilon} - j \frac{v}{r^2} \right]$$

$$E_z = - j \frac{I S \ell}{4\pi} \sin \vartheta e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r)} \left[\frac{\omega \mu}{r^2} - \frac{1}{r^2 \omega \mu \epsilon} - j \frac{v}{r^2} \right]$$

ancora:

$$E_r = E_x \cos \varphi \sin \vartheta + E_y \sin \varphi \sin \vartheta + E_z \cos \vartheta = j SA \cos \vartheta \left[\frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left(-\frac{2}{r^3} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - j \frac{6\pi}{\lambda^2} \right) - \omega \right] =$$

$$= j \frac{S I S \ell}{4\pi} \cos \vartheta e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r)} \left[\frac{1}{\omega \epsilon} \left(-\frac{2}{r^3} - j \frac{6\pi}{\lambda^2} \right) \right]$$

per $\lambda \gg r$ (dipolo elettrico):

$$\left\{ \begin{aligned} E_z &= - j \frac{I S \ell}{4\pi} \cos \vartheta e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r)} \frac{2}{\omega \epsilon r^3} \\ E_\theta &= - j \frac{I S \ell}{4\pi} \sin \vartheta e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r)} \frac{1}{r^2 \omega \mu \epsilon} \end{aligned} \right.$$

E_θ ed E_z vengono in quadratura con la corrente e quindi in fase con le cariche che oscillano. Il che è giusto, perché siamo in un caso quasi stazionario, e quindi è giusto che $\vec{E}$ sia quello creato dalle cariche come nel caso statico. A grande distanza dal dipolo $r \gg \lambda$:

$$\left\{ \begin{aligned} E_\varphi &= E_z = 0 \\ H_\varphi &= H_z = 0 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} E_\theta &= \frac{j I S \ell}{4\pi \cos \vartheta} e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r)} \sin \vartheta \frac{\omega \mu}{r} \\ H_\varphi &= j \frac{I S \ell \sin \vartheta}{2\lambda} e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r)} \frac{1}{r} \end{aligned} \right.$$

