

1969 – appunti di

Campi elettromagnetici 1

*campi – dielettrici – conduttori –
semiconduttori – equazioni di Maxwell
cariche – potenziali – dissipazione*

13 novembre

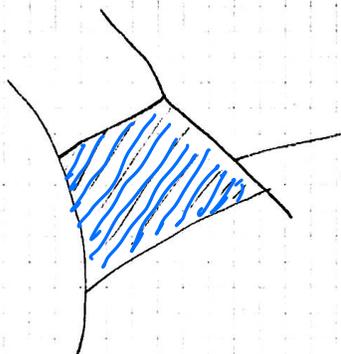
Campo

regione di spazio dove è sentito un certo effetto
il fenomeno stesso in questione

①

nel nostro studio ci limitiamo al campo elettromagnetico

" " " " " a mezzi omogenei e isotropi



Cioè 3 regioni che riempiono lo spazio
in esame nelle quali il mezzo è

isotropo omogeneo lineare

omogeneo : ha le stesse proprietà in tutti i pt

isotropo : " " " " " tutte le direzioni

lineare : le grandezze che caratterizzano la regione non dipendono
dalla entità dei fenomeni stessi

Tutto ciò matematicamente si esprime dicendo che agiamo in uno
spazio che è un insieme di pt regolari e le superf. di separa-
zione sono superfici geometriche

Naturalmente questa è una schematizzazione, ma in casi semplici
è il corrispondente reale -

Spesso \exists corpi che non soddisfano : i materiali ferromagnetici
(non sono né isotropi né lineari)

La omogeneità ha anche importanza per il fatto che, se vogliamo
studiare il fenomeno in un pt, facciamo tendere un limite
in quel pt - Però la materia è granulare \rightarrow non
sarebbe mai a riga verificata questa ipotesi, ma in pratica ci
vogliamo discontinnuità ben fin' prone per risentirne.

Per esempio sulle leggi di materiale ferromagnetico può darsi che i componenti siano così grandi che quanto detto non sia applicabile -

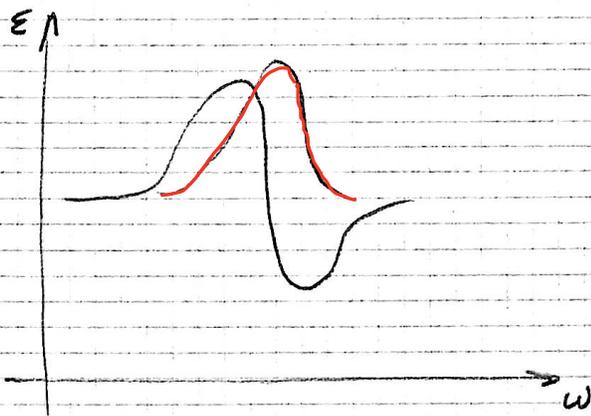
(2)

La maggioranza degli altri mezzi sono sensibilmente li-
neari (aria, atmosfera), dentro le microonde e cavità (aria)
sulle pareti metalliche (guide) per es. fili -

La quantità σ è molto indipendente dai campi (eccezione:
i semiconduttori) ↳ Assunzione

μ, ϵ dipendono poco dalla intensità dei campi
" molto della frequenza

io' è meglio spiegato dal grafico



variazioni parte
reale e complessa di ϵ

NB tutte le quantità suddette dipendono dalla temperatura

NB Noi consideriamo i nostri mezzi con osservatore e strumenti
solidali con una certa terza di riferimento in cui non
sono in moto relativo tra loro (io' non è una limitazio-
ne concettuale ma solo una semplificazione) *

* bisogna conoscere il moto degli strumenti rispetto alla terza

per adesso ci limitiamo allo studio di campi stazionari (cioè le grandezze elementari che alimentano il campo sono tempo invarianti) - ③

Quali sono gli strumenti occorrenti per definire il campo?

Cominciamo col Volmetro con cordoni



naturalmente quello che noi facciamo è uno strumento ideale:
 dimensioni trascurabili
 cordoni infinitamente sottili coperti da guaina
impedenza interna infinitamente grande

Lo mettiamo in opera mettendo A e B in posizione e il cordone secondo una linea voluta - Il fatto si esprime con

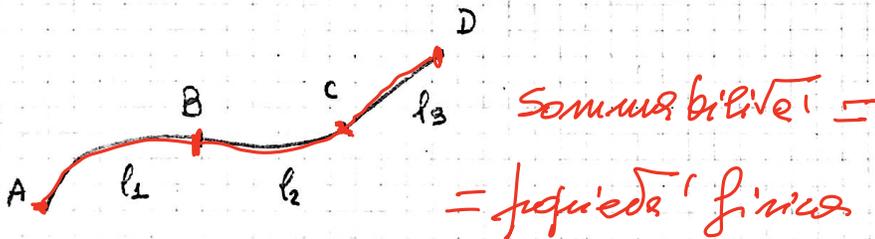
$V_{AB}(l)$ Tensione da A a B secondo una linea l

osserviamo che vale

$$V_{AB}(l) = -V_{BA}(l)$$

ma non è una proprietà fisica, bensì una proprietà del volmetro che è capace di dare anche il segno.

è invece una proprietà fisica la sommabilità



in questo caso si può dunque scrivere

(4)

$$V_{AB}(l_1) + V_{BC}(l_2) + V_{CD}(l_3) = V_{AD}(l)$$

I *summabilità*

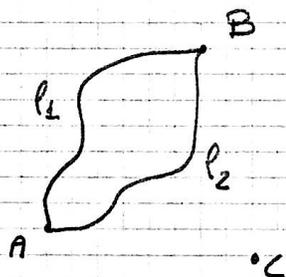
si può anche scrivere

$$V_{AA}(l) = 0$$

II *valida se il campo è stazionario*

NB queste valgono solo se il campo è stazionario

Vediamo alcune conseguenze di questi fatti:



$$V_{AA}(l_1, l_2) = 0 \text{ per la II}$$

$$\text{ma } V_{AA} = V_{AB}(l_1) + V_{BA}(l_2) =$$

$$= V_{AB}(l_1) - V_{AB}(l_2) = 0$$

quindi V è funzione solo dei pt [(l) è inutile]

Se poi prendo un pt come riferimento [per es. B]

$$V_{AB} = V_A$$

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = V_{AB} - V_{CB} = V_A - V_C$$

questi fatti ci permettono di dare una visione globale di tutto ciò che può dire il potenziale (per esempio col tracciamento di superfici equipotenziali)

Posso procedere così: fisso B e con A esploro il campo e ⑤
segno tutti i P_i che danno la stessa indicazione; il loro insieme è una superficie equipotenziale. Questo è un metodo sperimentale per il tracciamento dei campi.

NB Le superfici che si ottengono non sono generali perché riferite al pto B. Vediamo cosa succede se prendo come riferimento B': osserviamo che

$$V'_A = V_{AB'} = V_{AB} + V_{BB'} = V_A - V_{B'} \rightarrow$$

$$\boxed{V'_A = V_A - V_{B'}} \Rightarrow \text{le superfici che erano}$$

equipotenziali sono ancora equipotenziali, cambia solo il valore -
le superfici equipotenziali sono ∞^4

Un buon criterio visivo è quello di tracciare superfici che differiscono per $\Delta V = \text{cost.}$

Indicheremo il potenziale con V o φ .

Proprietà superficie:

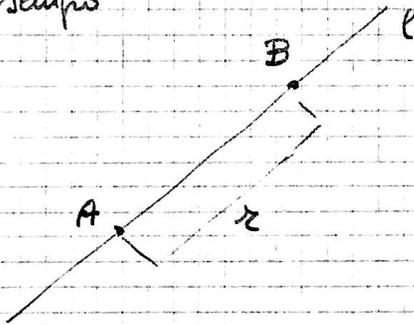
- 1) Non si intersecano
- 2) Comprendono tutto lo spazio
- 3) Contengono tutte le informazioni sulle tensioni

Queste sono enti integrali dello spazio - Quando voglio esaminare un pto devo sempre fare limitazioni, per es. soffrire

quel pto regolare

⑤

Esempio



dispongo un volmetro su A, B e misuro V_{AB}

Se voglio qualcosa di caratteristico di A faccio tendere B ad A

con semplicemente altri zero. Per avere qualcosa di significativo
costo divido per una cosa che $\rightarrow 0$ con V_{AB} , per es. z

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{V_{AB}}{z} = E_z(A)$$

forza elettrica nel pto A
secondo z

$E_z(A)$ è uno scalare

Posso ora a cambiare z e ripeto lo esperimento:

se A è pto regolare, gli sc. valori di $E_z(A)$

al variare di z sono compatibili con un vettore $\vec{E}(A)$, cioè
si possono ottenere da una grandezza vettoriale come proiezione
su z

in formula $E_z = \vec{E} \cdot \vec{u}_z$ [\vec{u}_z versore di z]

sarà compito importante trovare le relazioni tra le equazioni integrali e quelle puntuali, ad es. è chiaro che ⁽⁷⁾

$$V_{AB}(e) = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

25 novembre

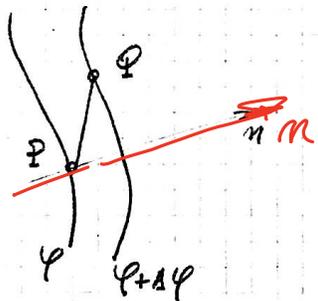
abbiamo dunque scoperto che V_{AB} indipendente dal percorso

$$V_{AA} = 0$$

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla V$$

(relazioni che valgono nei tti regolari)



facciamo il rapporto tra $\frac{\Delta\varphi}{|PQ|}$

esso è max quando siamo su m

ma allora quando passiamo al limite abbiamo

il gradiente

campo V_{AA} :

troviamo:

$$V_{AA} = 0 \Rightarrow \text{Rot } \vec{E} = 0 \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0 \text{ dimo.}$$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ il $V_{AA} = 0$ si può intendere come una circolazione infinitesima attorno ad A . Però anche un vettore irrotazionale se integrato su un circuito infinitesimo dà zero:

ora l'integrale va a zero per due motivi:

③

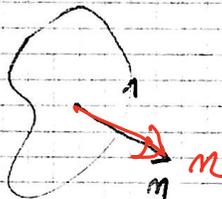
- 1) perché il percorso è infinitesimo \square
- 2) " i valori nei lati opposti del percorso con piccoli elementi contribuiscono uguali e contrari

quindi va a zero con il quadrato -

Se dunque voglio una informazione locale di $\phi = 0$ devo dividere per una cosa che va a zero col quadrato (per esempio una superficie), quindi:

$$(\nabla \cdot \vec{E})_{(n)} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}{A}$$

questa relazione esprime il comportamento in una direzione \perp alla superficie A



$\Rightarrow \text{rot } \vec{E}$ ha per modulo il massimo di questo limite (max rispetto alle varie direzioni di m) - m è orientata in modo che se ho la testa sulla

faccia e i piedi su A vedo girare in senso antiorario -

vale per \vec{V} è regolare; $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ se \vec{E} è irrotazionale perché allora $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ è già zero senza passare al limite

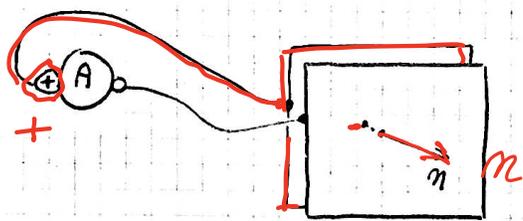
NB i potenziali qui in gioco sono riferiti ad un V_0 del campo. Il riferimento può essere all' ∞ , ma per i problemi concreti ciò è irrilevante (sarebbe scomodo)

Dare potenziale 0 all'infinito e definire che le leggi ci dicono che l'esso e' costante [nessa con e' una definizione] ; da un po' di vista finito si puo' pensare (ad esempio un generatore in terra) che all' ∞ esso non abbia piu' alcun effetto - Di solito si pensa ai potenziali degli elettrodi come a cose note - Nella maggioranza dei casi i generatori sono noti come tensione, ma non il potenziale degli elettrodi rispetto all' ∞ - Eso dipende dalla natura del generatore, dal terreno, dalla convenzione che all' ∞ il potenziale sia zero -

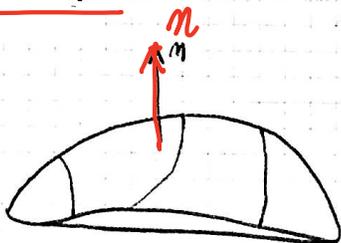
Condizioni necessarie e sufficienti affinché la struttura delle linee equipotenziali siano invariante sono: (inf.)

- 1) mappe lineari
- 2) nuove tensioni proporzionali a quelle originarie

Le misure di corrente si fanno con un amperometro dotato di lamine infinitamente sottili con dielettrico interposto infinitamente sottile -



Facendo esperimenti su una data superficie si ricava un criterio di summabilità



Suddividiamo l'area della ~~sola~~ superficie, facciamo la misura della corrente in ciascuna; prendiamo la sonda coincidente con ⁽¹⁰⁾ tutta la superficie, si ottiene:

$$i_{\text{tot}} = \sum_n i_n$$

Si può osservare un'altra proprietà notevole:
se manteniamo fisso il contorno e deformiamo la sonda, la indicazione dello strumento non cambia \Rightarrow la corrente è solenoidale \Rightarrow
 la corrente uscente da una superficie chiusa è nulla.



qui dunque si scopre $I_1 - I_2 = 0$

Ciò ci permette il tracciamento di tubi di flusso.

Si procede così: si mette la sonda in un certo p_0 e si orienta finché si ha la descrizione massima; ora ci si sposta di Δx e si gira la sonda fino ad avere la ~~max~~ indicazione max e così via.

In questo modo si possono tracciare tubi di flusso contigui.

La descrizione con tubi di flusso va pensata come alternativa di quella con superfici equipotenziali e dotata di una sua indipendenza. Per passare ora alla descrizione locale consideriamo

$$J_{(n)} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{I}{A}$$

NB la n percorre la sonda dal + al -

supponiamo che l'insieme dei \vec{J} può essere rappresentato con un vettore tale che

$$\vec{J}_{(m)} = \vec{J} \cdot \vec{n}$$

versore

(11)

tutto va bene se il pto è regolare. Da quanto detto segue

$$\int_A \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} ; \quad I_{tot} = 0 \equiv \oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

per vedere dunque il comportamento locale io posso stringere la superficie A fino a farla diventare infinitesima; in questo modo qualunque integrale tende a zero. Per conservare una informazione significativa posso ad esempio dividere per una quantità che tende a zero allo stesso modo. Qui si tende a zero col cubo (\propto per A superficie che $\rightarrow 0$, \propto perché $\vec{J} \rightarrow 0$), quindi

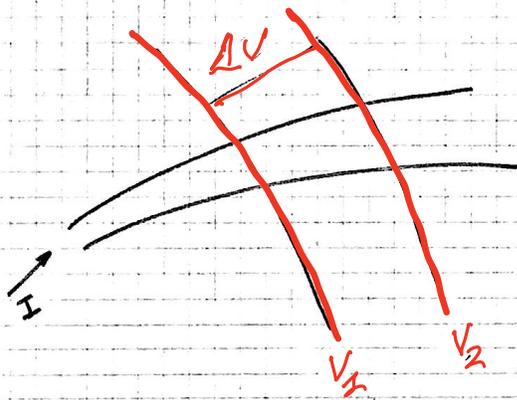
$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{J} \cdot d\vec{A}}{V} = \text{div } \vec{J} = \nabla \cdot \vec{J}$$

Si pone ora un problema: le due rappresentazioni quella data dal vettore e quella dell'empiremetro sono legabili tra di loro? Si, e il legame è dato dalla natura del mezzo [nota l'analogia coi circuiti].

L'analogia si può spingere oltre: consideriamo un tubo di tubo di flusso limitato da due superfici equipotenziali.

Se la configurazione rimane invariata esso può essere considerato come un bipolo e ammettere una certa caratteristica

* ciò si riconduce a mezzo lineare con $V \ll$ e quelle infiniti



$$\nabla^2 = \text{div. grad} = 0 \quad (12)$$

Sostanzialmente ci si possono presentare due casi:

- 1) in quella regione non ci sono sorgenti
- 2) " " " ci sono "

la legge $V + e = RI$ comprende entrambi i casi.

Facciamo ora tendere il bipolo a zero; quando siamo in un W_0 , il modo di variare del campo non interviene più:

- se e è concentrata e siamo proprio in quel W_0 avremo un contributo e , altrimenti 0.
- se e è distribuita possiamo scrivere con:

$$E \cdot \Delta l + E_f \cdot \Delta l = RJ \Delta A$$

- se il tronco non ha eccitazione (fem) $E \cdot \Delta l = RJ \Delta A$

$$R = \frac{E}{J} \frac{\Delta l}{\Delta A} \quad \text{ma } R \text{ non dipende dalla eccitazione,}$$

quindi anche il 2° membro non dipende $\rightarrow \frac{E}{J} = \int [\cos \alpha]$

$$\text{cioè } E = \int J \quad \circ \quad J = \sigma E$$

- se ci sono forze distribuite

$$\cancel{E \cdot \Delta l} + \cancel{E_f \cdot \Delta l} = \int \frac{\cancel{\Delta l}}{\cancel{\Delta A}} \cdot \cancel{J} \cdot \cancel{\Delta A} \Rightarrow E + E_f = \int J$$

la precedente va bene per un tubo infinitesimo -

(13)

Di solito però i generatori sono considerati come \mathbb{N} singolari

→ si usa $\vec{E} = \rho \vec{J}$

se ρ è scalare → \vec{E}, \vec{J} hanno le stesse proprietà

26 novembre

Abbiamo visto $\nabla \cdot \vec{E} = 0; \nabla \cdot \vec{J} = 0$

se sono vere contemporaneamente il \mathbb{N} è regolare -

se il mezzo è lineare $\vec{E} = \rho \vec{J}$

[più generalmente $\vec{E} + \vec{E}_f = \rho \vec{J}$] ⊗

Dalle proprietà fatte segue $\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{J} = 0 \end{cases}$ Campo armonico

Data la \bullet segue che i tubi di flusso di $\vec{E} \equiv$ con quelli di \vec{J}

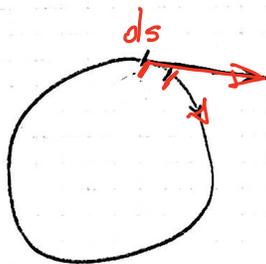
→ \vec{J} emerge dalle superfici equipotenziali -

Se abbiamo una linea di forza di \vec{J} , poiché è solenoidale, essa deve essere chiusa, o deve chiudersi all'∞ -

Ma lungo questo cammino $\Rightarrow \mathbb{N}$ per cui vale la ⊗ infatti, per esempio se $\rho = \text{cost}$ vediamo che in ogni \mathbb{N} \vec{E} è diretto come \vec{J} e ogni elemento di linea dà un contributo dello stesso segno →

affinché l'integrale sia nullo deve $\exists \vec{E}_f$ / facci vedere

il bilancio - NB \vec{E}_f non è irrotazionale



Se faccio la circolazione di \otimes ho

(14)

$$0 + \oint \vec{E}_p \cdot d\vec{s} = \oint \rho \vec{s} \cdot d\vec{s} \quad \text{cioè}$$

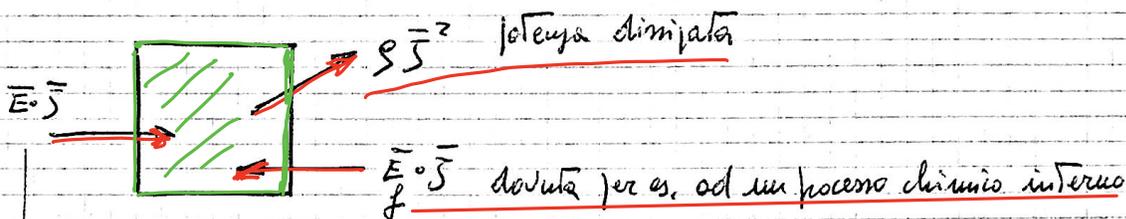
la circolazione è uguale alla totale caduta di tensione

Considerazioni energetiche [analoghe al bipolo]

$$\left\{ \begin{array}{l} V + E = RI \\ VI + EI = RI^2 \end{array} \right. \quad \text{se faccio tendere il bipolo a zero}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} + \vec{E}_p = \rho \vec{s} \\ \vec{E} \cdot \vec{s} + \vec{E}_p \cdot \vec{s} = \rho \vec{s}^2 \end{array} \right.$$

con uno schema



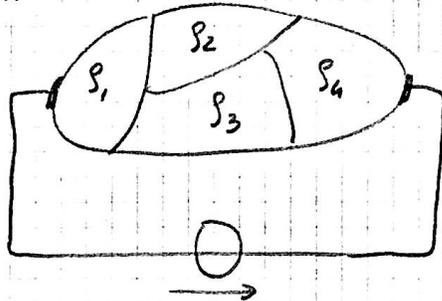
potenza entrante attraverso le linee di forza

NB le misure elettriche riguardano solo $\vec{E} \cdot \vec{s}$ cioè con lo strumento è possibile individuare un solo terminale: quello che arriva per via elettrica

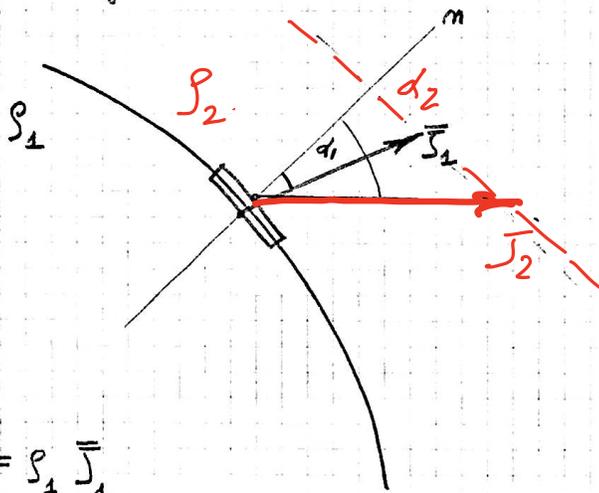
Discontinuità

(15)

Prendiamo ad es. un mezzo lineare a tratti: ρ costante nelle singole regioni



Pensiamo al generatore solo in quanto il suo effetto è quello di dare una ΔV ; ciò che succede dentro il generatore non ci interessa - Vediamo i fenomeni sul confine tra le regioni - È chiaro che qui le leggi puntuali cadono, usiamo allora quelle integrali -



Cilindro di area dA -

L'altezza è infinitesima di ordine superiore rispetto alla base \rightarrow possiamo trascurare il flusso laterale -

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \rho_1 \vec{J}_1 \\ \vec{E}_2 = \rho_2 \vec{J}_2 \end{cases}$$

ma sappiamo che il flusso è nullo, cioè

$$dA J_1 \cos d_1 - dA J_2 \cos d_2 = 0 ;$$

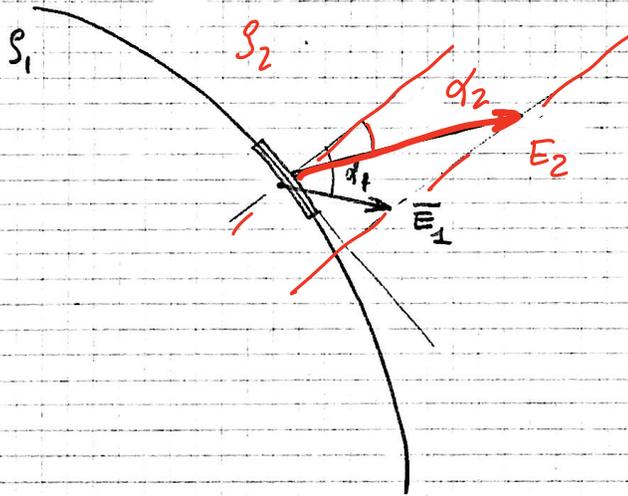
(entrante) (uscite)

$$J_1 \cos d_1 = J_2 \cos d_2$$

● campo armonico

eseguiamo ora la circolazione di \vec{E}

(16)



linea chiusa con
due lati paralleli inf.
interiori di ordine
superiore agli altri
due

$$E_1 \sin d_1 = E_2 \sin d_2$$

con le

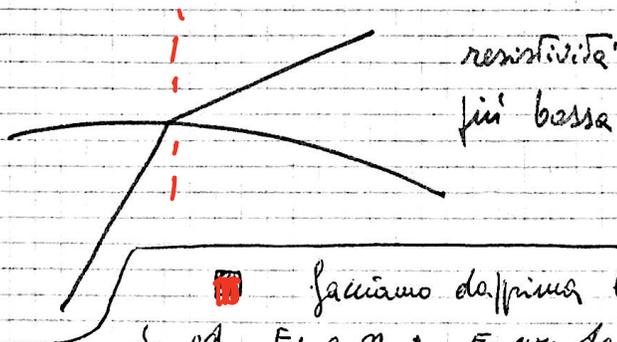
$$\boxed{\rho_1 \tan d_1 = \rho_2 \tan d_2}$$

*

la * ci dice che la linea di forza ha una spigolosità
per rimanendo nel piano

$$\frac{\tan d_1}{\tan d_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{se } \rho_2 < \rho_1 \Rightarrow d_2 > d_1$$

cioè passando da un mezzo meno conduttore ad uno più
conduttore le linee di forza si allontanano dalla normale



facciamo dapprima la circolazione in un piano
 \perp ad E_1 e n : E_1 non dà contributo $\rightarrow E_2$ non deve
dare contributo $\rightarrow E_2$ è nullo e $e' \perp \Rightarrow$ sono complanari

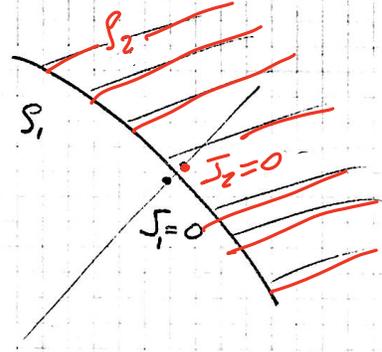
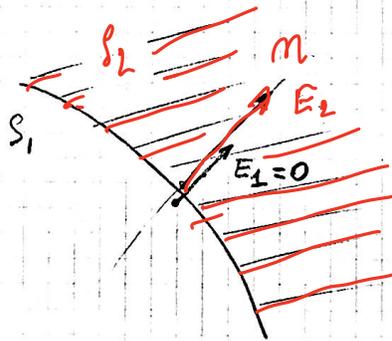
Li sono da prendere ora in esame alcuni casi limite

(17)

1) $S_2 \rightarrow \infty$

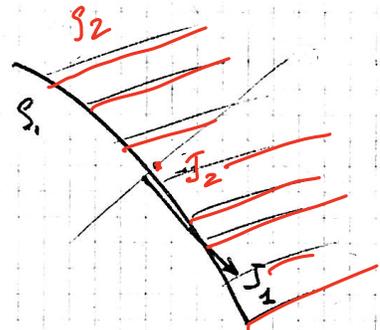
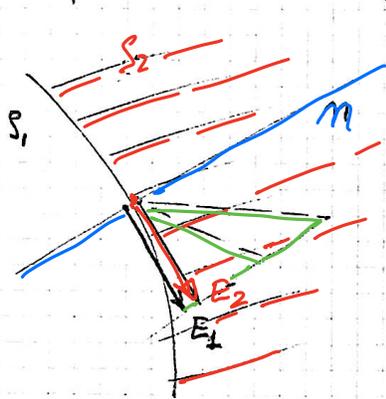
di conseguenza $d_2 = 0$, $d_1 = \frac{\pi}{2}$

a) $d_2 = 0$



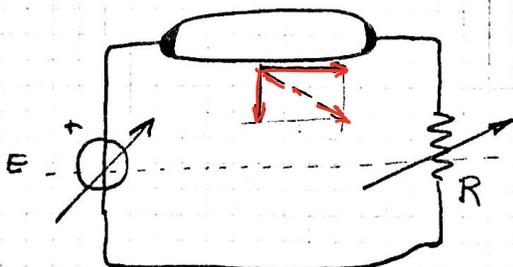
quindi la prima soluzione equivale al caso statico -

b) $d_1 = \frac{\pi}{2}$



questo equivale invece ad un caso dinamico, c'è corrente che fluisce nel mezzo S_1

Osserviamo che nel caso b) E_2 può anche avere componente verticale $\neq 0$. Questa componente verticale è dovuta alla presenza di cariche che formano il conduttore e che è dovuta a fattori esterni ad esso:



se si mantengono R ed E assieme in modo che $I = \text{cost}$, la componente tangenziale di E rimane la stessa, quella verticale muta.

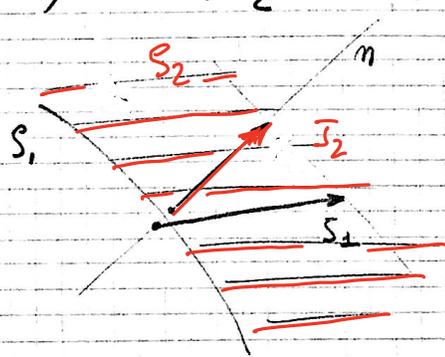
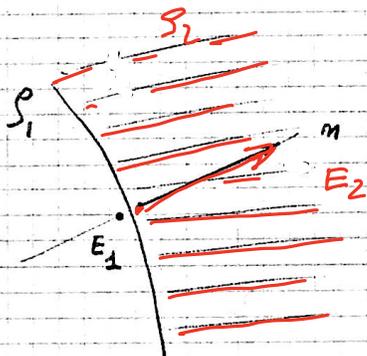
NB dentro il conduttore tutto rimane costante come se nulla fosse successo.

2) $\rho_1 = 0$ ρ_2 finito (0 anche $\rightarrow \infty$)

(18)

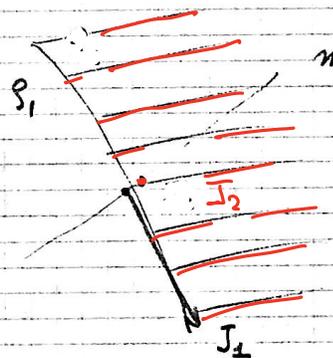
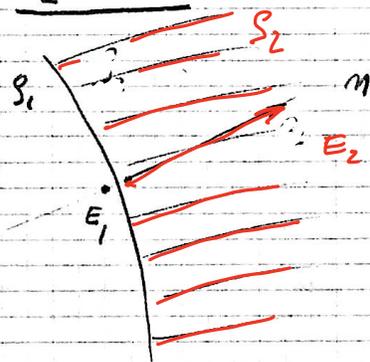
a) finito

$$\frac{\int \rho_2 d_2}{\int \rho_1 d_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0 \Rightarrow \theta d_2 = 0, \quad \theta d_1 = \frac{\pi}{2}$$



$$\vec{E}_1 = \rho_1 \vec{S}_1 = 0 \cdot \vec{J}_1 \text{ questo che } \vec{S}_1 \rightarrow \infty, \quad \vec{E}_2 = 0$$

b) $\rho_1 = 0$ $\rho_2 \rightarrow \infty$



Vediamo come si studiano le regioni dielettriche visto che in esse uno dei due strumenti diventa inutile.

I mezzi a conducibilità nulla [potrebbe essere argomento di una tesina] sono molto importanti nella pratica; tanto più il conduttore è migliore, tanto più, anche se immerso in campi variabili, nel filo non succede nulla (bisogna però

Tenere conto dello effetto pelle) -

(19)

Un conduttore perfetto è quello in cui non può avere sede un campo elettrico -

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

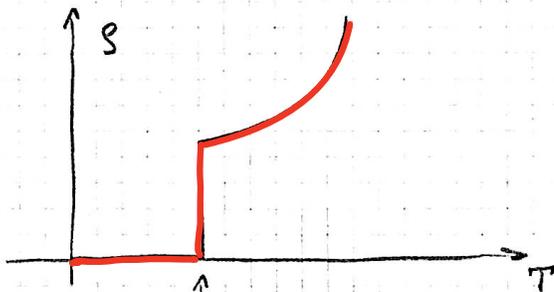
NB l'assenza di campo elettrico implica $B = \text{cost}$ - \nearrow

Introduciamo ora un tempo remoto in cui tutti i campi erano nulli ($B=0$ ovunque), allora rimane per sempre $B=0$ -

Può allora un conduttore ideale esser sede di un campo magnetico? Sì con qualche artificio: per esempio si può avere un filo in un campo magnetico, se raffreddandolo contemporaneamente si avesse $\rho=0$ allora si avrebbe un B iniziale.

Ciò potrebbe avvenire nei superconduttori, ma essi non si comportano in modo normale: ripiutano il campo magnetico -

Il fenomeno avviene con

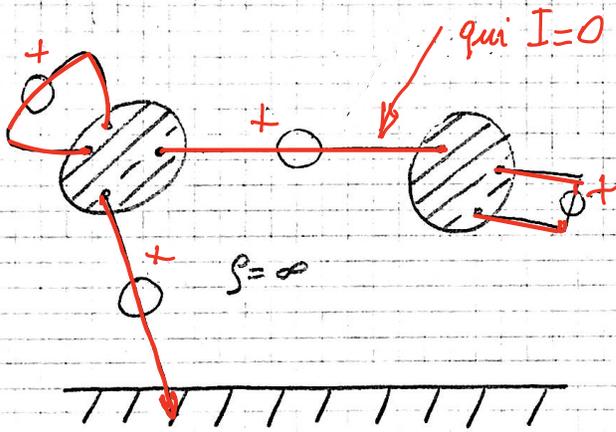


qui il campo magnetico viene espulso a spese di una corrente superficiale, corrente che permane - Se però B , la corrente se ne va -

Dielettrico perfetto

Vediamo dapprima il campo dielettrico stazionario -

Supponiamo di avere il seguente sistema:



i vari generatori non solo collegano i terminali dei conduttori a massa, ma possono collegare i terminali dei conduttori fra di loro.

In generale si può dire che si possono individuare zone dove ci sono correnti e zone dove non ce ne sono.

In queste la descrizione può essere fatta in termini di E .
 all'esterno possiamo conoscere la E_c perché si conserva.

27 novembre

(21)

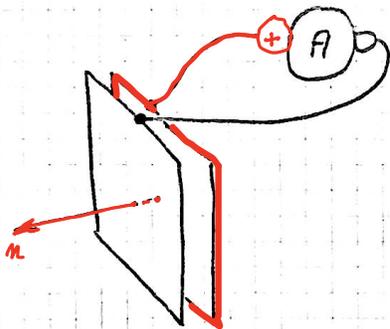
Il voltmetro fin qui usato non va fin bene (poiché la sua impedenza interna dovrebbe essere ∞). Allora lo si è costruito mediante una capacità in modo da non avere ~~capacità~~ cortocircuito (il che porterebbe allo stesso potenziale due P del dielettrico). L'ago si muove a causa della attrazione elettrostatica delle armature. Le P devono essere acuminate onde evitare depositi di carica. Facendo molte misure si osserva che esistono le stesse proprietà per la forza elettrica:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Introduciamo ora un nuovo strumento che misura l'impulso di corrente [o flusso dielettrico, o carica]:

* Da fuori il campo lo vedo neutro. Ho φ diretto come la normale



esso misura

$$\int_0^t i dt = q = \varphi$$

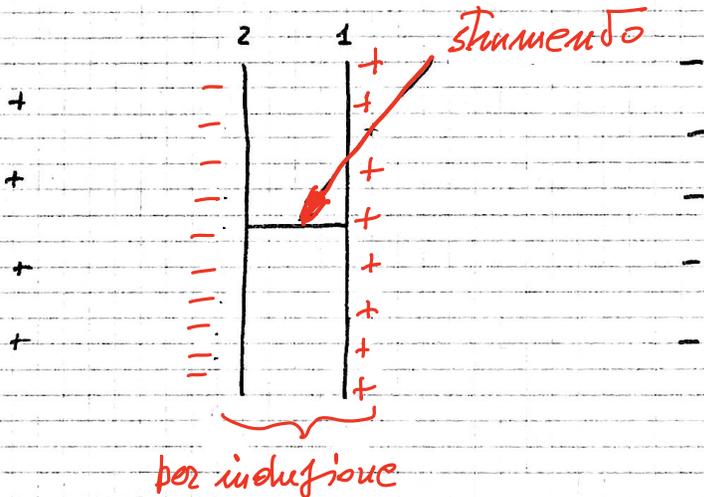
$t=0$ istante in cui lo strumento entra in azione.

Per $t \rightarrow \infty$ l'integrale converge

$$Q = \varphi = \int_0^{\infty} i dt$$

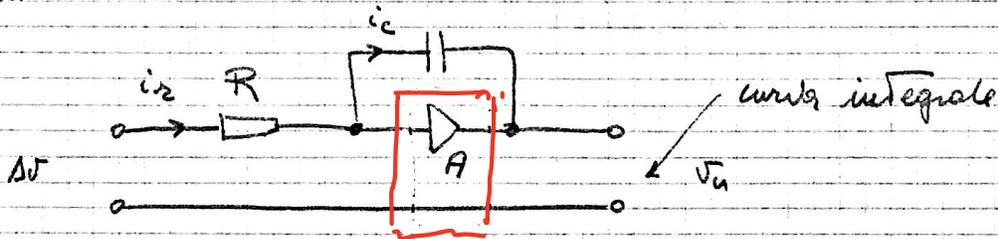
Si può procedere così: posto la sonda lontano (fuori della in ⁽²²⁾ influenza del campo) e poi la muovo fino al V_0 voluto.

L'ampiezza max della lancetta ci darà il flusso dielettrico. Per capire che lo strumento segna una corrente facciamo di esso il seguente schema



gli elettroni per poter essere migrati da 1 a 2 devono essere passati attraverso il collegamento (cioè attraverso lo strumento).

L'integrazione della i è facile, ad esempio con metodo elettronico

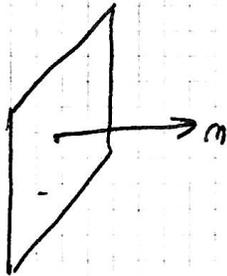


A è un amplificatore a guadagno infinito. Poiché all'uscita la tensione è nulla, in esso non passa corrente $\rightarrow i_2 = i_c$.

Facendo l'equazione del circuito si vede subito che V_u è l'integrale della funzione di ingresso.

Esistono anche integrazioni meccaniche (metodi balistici); in essi la deflessione max è $\propto \int i dt$ - (23)

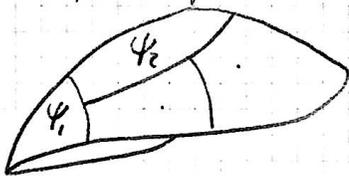
Un modo più semplice di operare è questo; voglio sapere che flusso dielettrico c'è qui



- prendo la sonda (da distante) e la porto lì con la normale nella direzione giusta.

- oppure ruoto di 180° la sonda (qui si ha un risultato doppio) - lo strumento girato

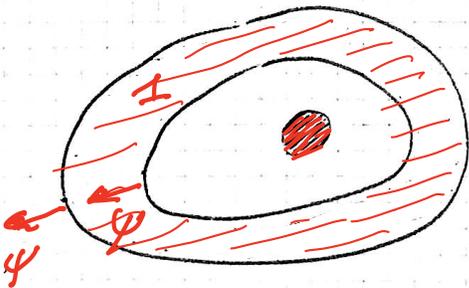
Alla fine si scopre che anche qui vale la sovrapposibilità - cioè dopo la prova mi dà la direzione +



ψ_{tot}

$$\psi_{tot} = \sum \psi_i$$

NB A parità di contorno il risultato non cambia se la regione di spazio compresa tra le due superfici non contiene corpi conduttori grandi o piccoli (anche la presenza di elettroni è sentita) - Supponiamo che all'interno ci sia un corpo conduttore - Consideriamo due superfici che lo chiudono



Poiché \pm è uno spazio chiuso senza conduttori, il suo flusso = 0

quindi se ne deduce l'uguaglianza dei flussi "usciti" (se considerati separatamente appartenenti alle due superfici). Data la arbitrarietà delle superfici, ne posso considerare una coincidente con la superficie del corpo interno. Il flusso dielettrico che uscirà attraverso essa lo dico carica di quel conduttore.

Passiamo ora a grandezze specifiche - (Densità)

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Psi}{A} = D$$

induzione dielettrica

esso si comporta come un vettore \vec{D} -

Poiché dove non ci sono conduttori non c'è flusso \Rightarrow

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

Ma se siamo in una regione di carica distribuita, \forall la superficie essa contiene cariche \rightarrow passando al limite rimarrà una carica δdV [δ densità di carica], allora

$$\text{div } \vec{D} = \delta \quad \text{questa scrittura include la precedente}$$

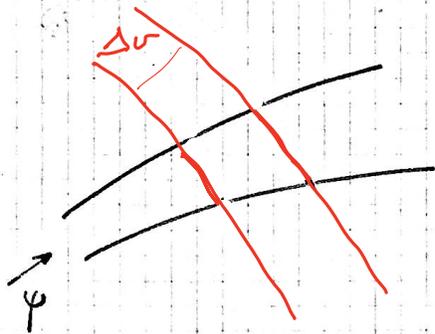
Cariche distribuite si trovano ad esempio:

in un tubo elettronico

nei semiconduttori

nella ionosfera

nei plasmi



Anche questo può essere considerato un ⁽²⁵⁾ bipolo. Se metalizziamo le facce esterne lo possiamo trattare come un condensatore.

$$\psi = C \cdot V = D \cdot \Delta A = C \cdot E \cdot \Delta L$$

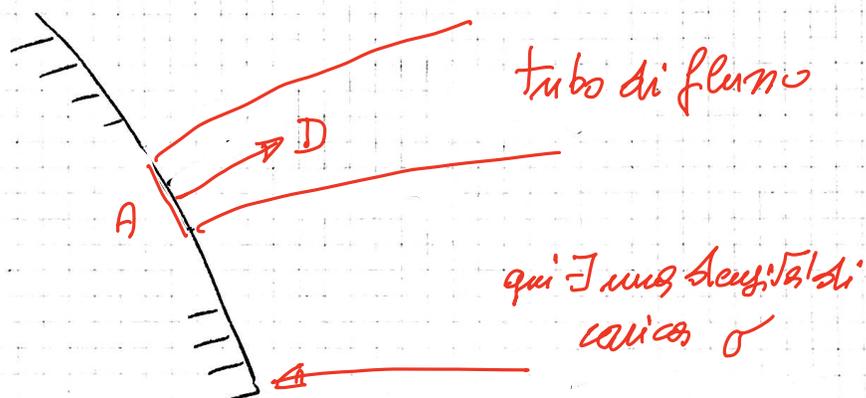
$$\frac{D}{E} = \epsilon$$

$$\frac{E}{E_0} = \epsilon_r$$

$$\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

Se il mezzo è lineare, privo di cariche vale $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$
e $\text{div } \bar{D} = 0$

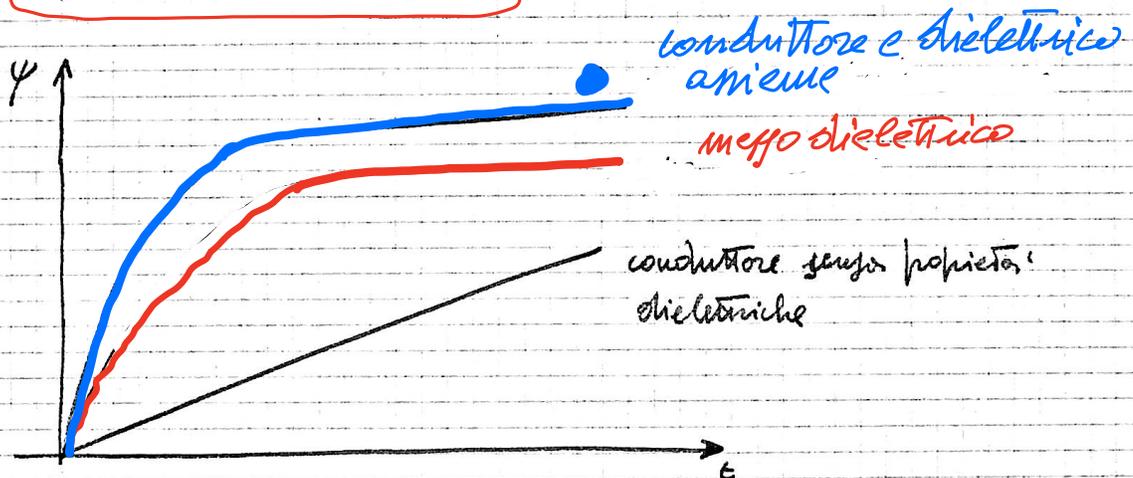
Sia dato un conduttore immerso in un campo privo di cariche. Se misuro un certo D vuol dire che sulla sua superficie sono presenti cariche. Per $A \rightarrow 0$ possiamo definire una densità di carica σ . Si può definire D nel dielettrico. Si ricava $\sigma = D_n$ se i misuriamo fuori di corrente.



Problema dei mezzi contemporaneamente conduttori e dielettrici - (26)

È chiaro che se pensiamo $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, anche nei non dielettrici, purché ci sia \vec{E} , è possibile definire \vec{D} .

Vediamo in un grafico come si distinguono i vari tipi di mezzo $\left[\text{pensiamo } \psi = \int i dt' \right]$



la ● ci dice che in questo caso nella sonda passa sempre corrente

9-12-68

(27)

L'integrazione del campo si conduce esaminando dall'interno tutte le zone resistive intersestate da campi di corrente (che per così dire prevalgono). Fatto riferimento al potenziale di un po si trova una distribuzione di potenziale \rightarrow distribuzione di cariche \rightarrow eventuale campo elettrostatico.

A questo po sono noti \vec{E} , \vec{J} , \vec{D} e il potenziale φ (a meno di una costante) nelle regioni resistive.

Per quanto riguarda le condizioni sulle superfici terminali delle regioni si potrà fare il solito discorso (eventuale mezzo circostante conduttore, $\rho = 0$, farà sì che le sup. di contorno sia equipotenziale, sempre nel caso che le superfici di separazione sia $\rho = 0$ e $\rho = \infty$). Il campo E sarà normale, non deducibile dalle notizie sulla zona resistiva. Resta da determinare il campo nella regione dielettrica. Qui non si può utilizzare il campo di corrente perché non c'è più.

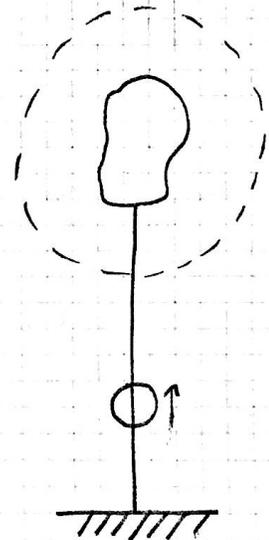
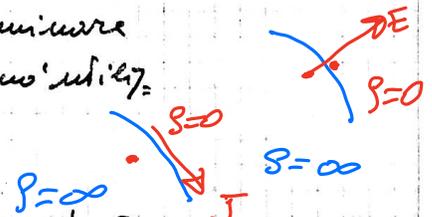
Introduciamo il concetto di Terra.

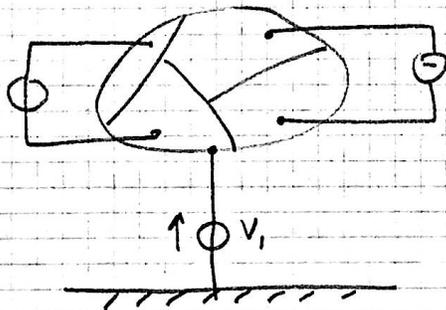
Il problema è risolvibile (così come l'abbiamo posto se conosciamo il valore del potenziale di riferimento).

Se noi colleghiamo a Terra i corpi (cioè collegamento fatto a meno di un generatore di tensione) il generatore serve solo a regolare il potenziale di un po.

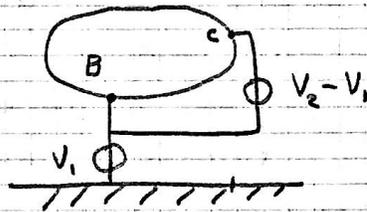
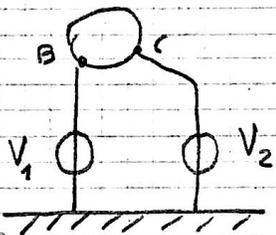
Sinfatti se chiudiamo il nostro corpo entro una superficie chiusa, esso taglia anche il filo del generatore, e poiché tutto lo spazio in cui passa la sup. è dielettrico \rightarrow anche nel filo non passa corrente.

La presenza del generatore fa sì che si può risolvere il problema dei riferimenti; toglie quest'ultima indeterminazione nel potenziale. Si tratta di determinare un campo armonico conoscendo l'andamento del potenziale sul contorno. Si conosce l'algoritmo numerico.





Moto il potenziale in B il potenziale negli altri P_i sarà determinato dalla distribuzione di corrente



On le due situazioni sono equivalenti in quanto i P_i B e C sono sempre definiti dallo stesso campo interno e dallo stesso potenziale esterno.

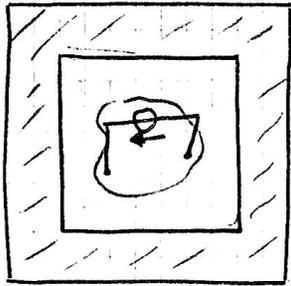
Quale è l'implicazione concreta che questi discorsi portano? Se ho un sistema resistivo in cui passano delle correnti, che ha un confine fisico, e in questo sistema metto i generatori di segnali, con un estremo messo a Terra, ho un comportamento che non dipende dalla forma, dalla natura, dalle dimensioni e proprietà del dielettrico che lo circonda.

È questo il significato della passi ordinaria di fare circuiti con un terminale a Terra (circuiti sbilanciati). Quando si fanno analisi con "circuiti sospesi" la costante del riferimento potenziale può variare al variare della distribuzione del campo elettrostatico intorno (es. avvicinando una mano). Se si deve a tutti i costi lavorare un circuito sospeso si usano schermi elettrici.

On Il circuito non risente delle variazioni numeriche del riferimento, ma risente molto delle variazioni (corrente di spostamento → alterazioni transitorie)

Schermi elettrici e gabbia di Faraday

(29)



Terra

Si ha inteso un corpo non inerte, uno schermo e un corpo conduttore esterno.

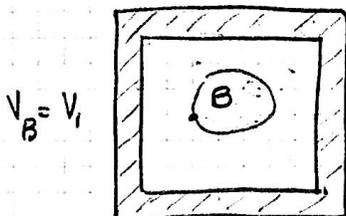
Lo schermo non abbia generatori in esso collegati. Lo schermo è conduttore, ma non essendo collegato con generatori non sede di correnti e quindi è equipotenziale.

Se ho determinato completamente il campo di corrente devo passare allo studio nella zona dielettrica dentro lo schermo.

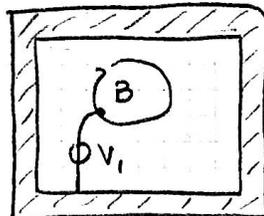
Il potenziale dello schermo rispetto a Terra non ha interesse, ma il potenziale sulla superficie interna dello schermo è costante; inoltre il campo è armonico e devo conoscere il potenziale del po B rispetto allo schermo. Non mi interessa il potenziale dello schermo rispetto a massa, perché riguarda la regione di campo esterna allo schermo che non ci interessa.

In regime stazionario cosa può produrre una variazione elettromagnetica o meccanica fuori dello schermo? Nulla.

Infatti la distribuzione del potenziale nel corpo è determinata solo dalle caratteristiche resistive del corpo e dall'andamento del campo dielettrico esterno. L'andamento del campo dielettrico dipende anche dal potenziale dello schermo, ma questo non varia.



(1)



(2)

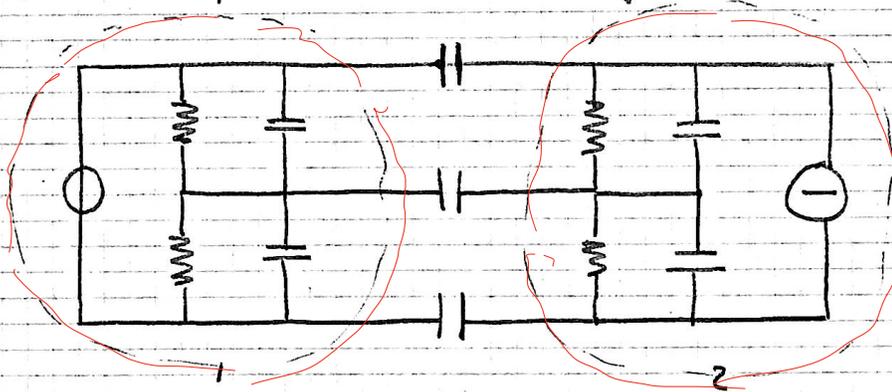
(30)

Le due situazioni risultano equivalenti se il corpo conduttore interno non viene alterato. Se esso per esempio viene spostato può cambiare la distribuzione di campo dielettrico, e per esempio può cambiare V_0 (nella situazione 2), non così nella situazione 1.

Come mai nei circuiti come noi li idealizziamo questo problema non si pone mai?

Es.

Esiste un corrispettivo concreto in regime



ragionando:

Nella regione 1,2 prevale il campo di corrente, si può fare il discorso resistivo, non si può fare il discorso dielettrico che è indecidibile per mancanza di un dato.

Cosa succede quando i corpi non sono collegati a massa, cioè quando sono sospesi?

Si può cominciare a determinare tutti i campi di corrente. Questo non ci abilita a trovare il campo dielettrico, perché manca il potenziale di un pto.

Si procede così:

Supponiamo di avere fisicamente questa situazione, cioè di disporre di questi generatori e a parte un transitorio iniziale il campo si stabilisce. Allora possiamo misurare il potenziale di un pto rispetto al riferimento globale.

Mostrando V_1 e V_2 il problema è risolto

Consideriamo tutto fino e soltanto variabile (incognite) le tensioni in questione dei due generatori.

Dato la linearità del sistema, supponendo di misurare V_1 e V_2 e di mettere generatori uguali; non cambia nulla.

Metto ora V_1 e V_2 diversi da V_1 e V_2 (pot. reali dei V_1 e V_2). Essi mi creano un campo diverso dal reale

$$\varphi_p = A V_1 + B V_2 + C$$

↳ è quello che ci vorrebbe se $V_1 = V_2 = 0$

C'è una configurazione lineare di generatori reali (analogamente adesso) - Comunque C è un dato del problema perché conosco i generatori

Devo trovare A, B, C

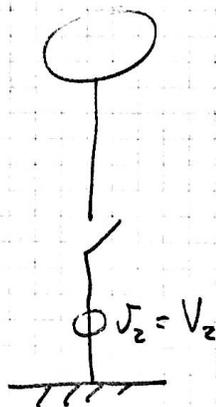
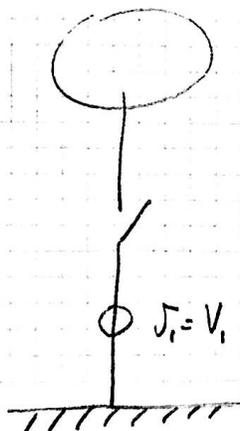
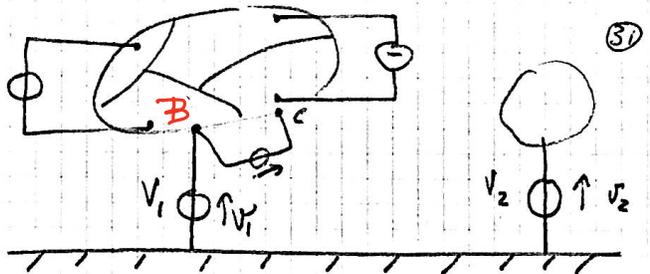
Per trovare C (corto circuito) $V_1 = V_2 = 0$

Per trovare A metto ad esempio

$$V_1 = 1 \quad V_2 = 0$$

e conosco φ_p , e così per B

Per cercare V_1 e V_2 effettivi: devo stabilire dei valori V_1 e V_2 diversi e tali che chiudendo i tasti non ci siano perturbazioni (i generatori non erogano corrente, non c'è transitorio, né flusso di carica)



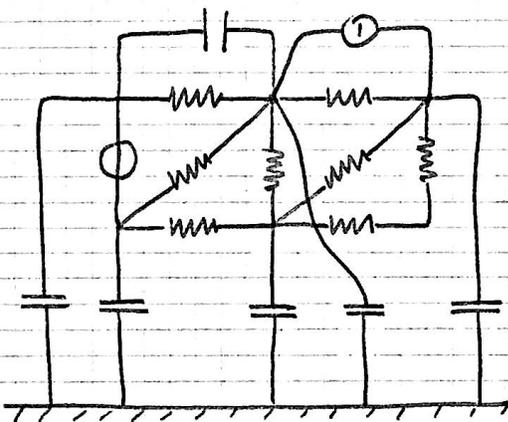
Nelle condizioni reali, senza generatori non può esserci flusso $\textcircled{32}$ di carica da massa al corpo, cioè in sostanza la condizione che identifica V_1 e V_2 è quella che dà $Q_1 = Q_2 = 0$

Il passaggio logico è:

$$\varphi(P) \rightarrow \vec{E}(P) \rightarrow \vec{D}(P) \begin{cases} \nearrow Q_1 \\ \searrow Q_2 \end{cases}$$

Q_1 e Q_2 sono ancora combinazioni lineari di J_1 e J_2 , si può per questa via qualifica trovare J_1 e J_2 - Questo discorso dice come si determina:

- 1) Campo dielettrico quando siano noti i potenziali di tutti i pt. esterni (e' questo il pt. di vista dello Straton)
- 2) quando sono noti i potenziali e le correnti verso Terra



NB importante

Se in un circuito consideriamo le capacità con la Terra, da ogni nodo deve partire un ---||--- con massa.

Ad essi applico $\sum Q = 0$ o in generale

$$\sum Q = Q_{iniziale}$$

Campo magnetico

Rispetto a quanto già studiato, gode di una proprietà che è conseguenza del campo di corrente.

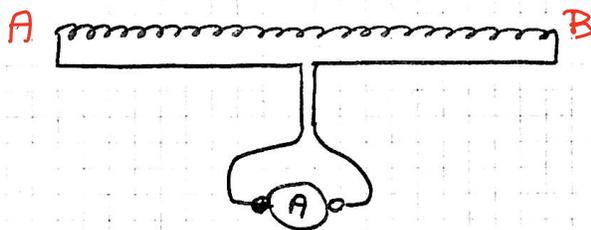
Un campo magnetico stazionario si manifesta dovunque ci siano correnti (stazionarie). Anche qui il problema

diventa quello della misura delle grandezze di campo magnetico. (33)

Si hanno due strumenti: uno per la linea e 1 per la superficie. Questi strumenti non possono essere nessuno di quelli che conosciamo. Ad esempio il ~~potenziale~~ volmetro perde significato perché solo la corrente in prossimità di una regione di spazio dà campo magnetico, cioè si può avere corrente senza che vi sia tensione ($\rho = 0$) \rightarrow il volmetro non va bene.

Si può avere un campo magnetico anche solo in prossimità del filo percorso da corrente e allora l'ampmetro non sente nulla. Mentre il campo dielettrico accetta il volmetro (che è del campo di corrente) il campo magnetico non accetta strumenti già noti.

Tensiometro magnetico



L'indicazione si legge: Tensione magnetica tra A e B lungo la linea l . Lo strumento ideale ha resistenza nulla. In pratica si può avere come strumento balistico.

11-12-68

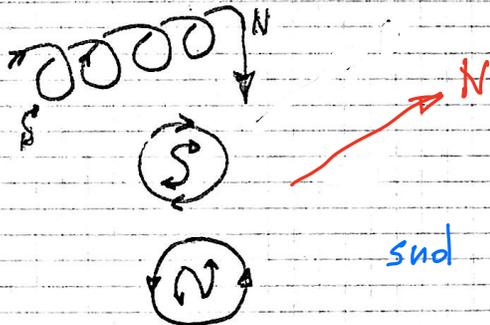
(34)

Il tensiometro magnetico ideale si comporta così:
lo si pone nel campo: sente una $\Delta\Phi$ e nasce una fem
che non può essere equilibrata da una caduta in R, perché
 $R=0$. C'è allora una corrente i che dà un flusso
opposto al campo e che poi gira sempre.

$$\text{Si ha intanto: } H = \frac{NI}{l} \rightarrow NI = Hl$$

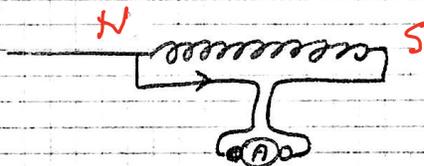
dove H è prodotto dalla corrente che passa in (A), opposta
al campo magnetico che vogliamo ~~essere~~ misurare.
Seguo la corrente con un senso delle frecce e vedo

cioè arrivo a una faccia S
e ho in fondo una faccia N



Ho allora che il campo prodotto
dalla corrente va da sud a nord
e quindi quello che c'è nella
regione va da nord a sud

↳ corrispondente a dare (A) ha il + (per corrente +)



L'indicazione dello strumento è allora:

M_{AB} , cioè la tensione magnetica tra
A e B (corrispondente a $V_A - V_B$).

C'è una dualità: con quanto detto nel campo dielettrico,
strumento fisso, vale la commutabilità.



$M_{AB, l_1} = M_{AB, l_2}$ se i due percorsi sono riconducibili l'uno
all'altro, con deformazione continua, senza incontrare
conduttori percorsi da corrente (ricorda campo elettrico e carica
dentro superficie chiusa)

In una regione senza conduttori, il campo magnetico e' irrotazionale - In esso ci comportiamo come gia' visto nel campo stazionario di corrente -

Si definisce allora (come E prima) la forza magnetica H. Si ottiene allora la legge integrale espresq (in termini di grandezze puntuali)

$$M_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

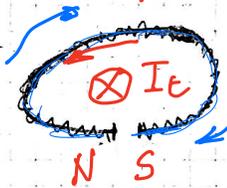
da cui consegue a livello puntuale (perche' non ci siano correnti)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{H} = 0 \end{cases}$$

risultato sperimentale

campo interno

campo esterno



con una sola spira del tensiometro

sonda

se e' distribuita non si puo' avere potenziale -

questo e' un percorso orientato da N a S. Ho allora

$$M_c = I_c$$

qui si sono gli avvolgimenti I_c concentrati che e' positiva se nel senso della freccia

In un po' date non c'e' conduttore (anche se nella regione vicina c'e') posso definire H: (facendo le solite misure)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c \quad \text{con la regola del cavatappi}$$

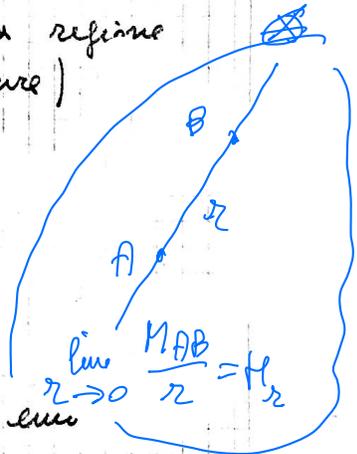
col solito ragionamento del rotore si ha:

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j}$$

che e' molto importante

Un potenziale si puo' definire solo se si limita a una regione priva di conduttori, e non lascia uscire nessuna parte della sonda dalla regione (si potrebbe infatti abbracciare corrente)

In ogni regione fino poi un riferimento dei potenziali,



Se voglio andare anche nell'altra zona il potenziale diventa polidromo.

(36)

$$\Phi_H(P) = \varphi_M(P) + \sum a_i I_i$$

dove $a_i = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$

I_i è la corrente in un filo (lo ^{1°} abbraccio ~~di~~ ^{più} volte)
osservo che il potenziale magnetico si può definire solo
(ha senso anche se è polidromo) in regioni dove non c'è M
(non nei conduttori) - altrimenti $\text{rot } H = \vec{j}$ e perciò non è irrotazionale.

Abbiamo ottenuto

(1) 1) \pm solenoidale (sperimentalmente)

(*) 2) $M_{\epsilon} = I_{\epsilon}$ (" ")

e questo è lecito; il risultato cui siamo pervenuti è certamente importante.

Sinfatti osservo che se definiamo una grandezza relativa alla superficie attraverso una misura fatta dalla sonda, (di una altra grandezza), questa è solenoidale per definizione.

Allora si poteva non definire prima sperimentalmente.

la corrente I , bensì definirla ora mediante la (*)

La (1) diventa allora una proprietà intrinseca della \pm definizione a meno della z .

Osservo che a differenza della solenoidicità, la irrotationalità è puramente una constatazione sperimentale.

NB si può definire M_{AB} dove $\sqrt{\epsilon}$ è γ (devo arrivare ad H) gli associo già una direzione e arrivo subito ad $H\epsilon$; poi constato che sono congruenti con un vettore.

Ho poi superfici equipotenziali.

Introduciamo un nuovo strumento del tipo relativo ad una superficie e di tipo integratore.

Fluometro magnetico

(37)

Si ha con un
voltmetro integratore.

La misura è

$$u = \int_0^t j(t) dt$$

se la $j(t)$ si ferma
rapidamente posso
supporre che sia

$$u = \int_0^{\infty} j dt$$

H dentro le spire va da Sud a Nord -

Fisso un senso di percorrenza della spira dal + al - del
voltmetro, contrariamente a quanto fatto con l'amperometro.
Allora dico che l'indicazione del voltmetro è il flusso
magnetico concatenato con quella spira, nella direzione
della normale - cioè metto il voltmetro, lo porto
all'infinito fuori del campo, all'infinito e associo
alla sua misura il flusso nel senso della freccia -

Dal flusso ϕ si definisce \vec{B} tale che

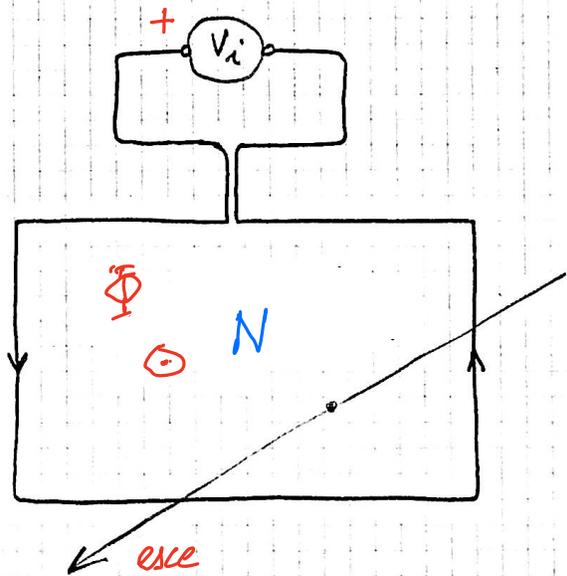
$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

dove A è una superficie qualsiasi che ha una linea per
contorno.

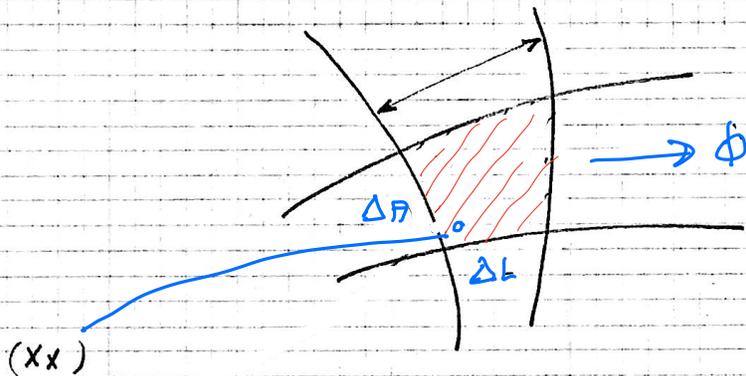
\vec{B} è solenoidale, per la sua definizione

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Possiamo ora fare una descrizione del campo in termini
di tubo di flusso



Introduciamo ora una connessione tra i due strumenti.
 Mi metto in una zona priva di conduttori. (38)
 Considero un tratto di tubo di flusso



è un corpo assimilabile ad un induttore,
 attraversato dal flusso Φ e soggetto a
 tensione magnetica M .

Per l'induttore ho

$$V = LI$$

$$\rightarrow n\Phi = LI$$

ma $L = n^2 \Lambda$ dove Λ è la permeanza $\Lambda = \frac{\Phi}{I}$

$$\rightarrow n\Phi = n^2 \Lambda I$$

$$\rightarrow \Phi = n \Lambda I$$

ma $nI = M$ infatti si ha $\int H \cdot dl = NI$

Supponendo (lungo discorso) che l'avvolgimento
 che mi dà NI lungo tubo di flusso su cui c'è
 caduta totale di tensione magnetica $= NI$ sia
 sia distribuita in modo da avere in ogni pezzo
 una forza magnetomotrice proprio uguale alla
 caduta di tensione magnetica in quel tratto M
 ho $M = NI$

In questo ordine di idee va intesa l'uguaglianza $\mathcal{M} = NI$

$$\Rightarrow \phi = \mathcal{L} \mathcal{M}$$

(37)

Si poteva evitare il lungo discorso dicendo che la fig. (xx) è un elemento di circuito magnetico caratterizzato da ϕ e \mathcal{M} che obbediscono alla relazione lineare

$$\phi = \mathcal{L} \mathcal{M}$$

Ho poi:

$$\mathcal{B} \cdot d\mathcal{A} = -\mathcal{L} \cdot d\mathcal{L} \cdot \mathcal{H}$$

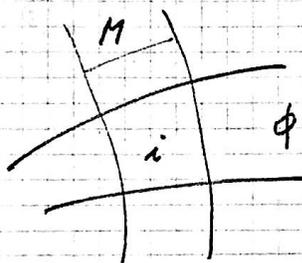
\mathcal{L} dipende solo dai fattori geometrici:

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H}} = \text{cost}$$

$$\text{cioè } \bar{\mathcal{B}} = \mu \bar{\mathcal{H}}$$

12-12-68

(40)



$$\phi_i = \mathcal{L}_i M_i \quad (*)$$

$$\rightarrow \bar{B} = \mu \bar{H}$$

la sola costante tra ϵ , ρ , μ che è gravemente non scalare è μ - \bar{H} e \bar{B} non sono sempre paralleli.

I corpi sono preziosamente anisotropi, soprattutto nei monocristalli. Esistono applicazioni in cui è utilizzata, per esempio in microonde.

Capovolgendo la (*) abbiamo

$$M_i = \mathcal{R}_i \phi_i$$

Eliminiamo i nel flusso, consideriamo un tubo di flusso che risulta chiuso su se stesso, e applichiamo la relazione a tutti i tronchi in cui possiamo dividerlo.

È praticamente un induttore.

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{U} I \quad \text{flusso tot. concatenato}$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{U}^2}{L}$$

Nel nostro caso nel tronco i esimo si ha

$$W = \frac{1}{2} \phi M_i \rightarrow M_i \phi = \mathcal{R}_i \phi^2$$

moltiplicando per ϕ

Vediamo come a quel tronco è pervenuta questa energia supponiamo di essere in un campo magnetico lineare prodotto da un solenoide. Facciamo variare i ; i tubi di flusso sono gli stessi, l'energia non può provenire che attraverso le pareti - Si usa distinguere se attraverso le basi o la superficie laterale

$$M_i = M_{i0} + M_{i1}, \quad \text{ed } \mathcal{L} \text{ in analogia con la tensione e la fem}$$

Supponiamo di essere in grado di misurare l'energia elettromagnetica che perviene attraverso le basi e quella che perviene

attraverso le superfici laterali.

(41)

$$W_{i\sigma} \quad e \quad W_{i\ell}$$

$$\frac{W_{i\sigma}}{\phi} = M_{i\sigma}$$

$$M_{i\ell} = \frac{W_{i\ell}}{\phi} \quad a \quad parte \quad \frac{1}{2}$$

Sommiamo la relazione su tutti gli i del tubo. Si ha solo l'energia entrata dalle pareti laterali

$$P_e \phi^2 = \sum_i M_i \phi = \phi \sum_i M_i = \underbrace{\phi \sum_i M_{i\sigma}}_{=0} + \phi \sum_i M_{i\ell}$$

la energia pervenuta attraverso le basi e' solo scambiata tra i tronchi dello stesso tubo. $M_{i\sigma}$ e' irrotazionale.

$H = H_\sigma + H_\ell$ - H_σ e' irrotazionale: $dH = H \cdot dl$ ci permette di passare da M a H con linee infinitesime.

Guardiamo le cose a livello di forza elettrica anziche' di tensione - Supponendo solo che H_σ sia irrotazionale la decomposizione e' possibile in infiniti modi -

Fissato un potenziale e' inventato un unico vettore

$$H_1 = \text{grad } V \quad , \quad H_1 \text{ irrotazionale}$$

$$\bar{H} = \bar{H}'_\sigma + \bar{H}'_\ell \quad \text{dove} \quad \bar{H}'_\sigma = \bar{H}_\sigma + \bar{H}'$$

Se non poniamo una condizione su H'_ℓ , e' indeterminato

$$H'_\ell = \bar{H} - \bar{H}'_\sigma$$

L'unica decomposizione avente senso fisico e' quella tale che H_σ associato all'inclusione nel filo esprime la densita' di energia arrivata a quel filo nella linea di forza.

H_ℓ e' il fattore che moltiplicato per θ da' la energia arrivata in altro modo.

Superficie di separazione del mezzo



Poniamo che non ci sia corrente superficiale.

Il flusso totale di B sul cilindretto e'

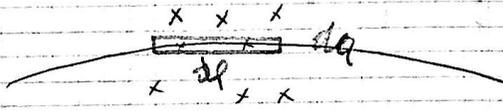
tale che: $B_{m1} = B_{m2}$ cioè

$$B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2$$

questa vale sempre

Consideriamo la circolazione - vettori sono complanari solo se non c'è corrente si ha $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$, anche se c'è corrente diffusa risulta 0, perché se la circolazione è infinitesima a causa delle dimensioni se la spira è parallela alla direzione della corrente - Se è perpendicolare si ha:

$$\int d\vec{l} \cdot d\vec{a} = (H_{1t} - H_{2t}) dl$$



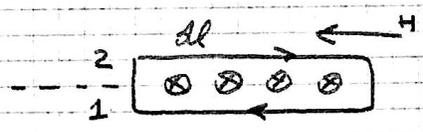
La differenza è infinitesima

$H_{1t} \approx H_{2t}$ è infinitesima perché due punti vicini, però da è di ordine ancora superiore - $H_{1t} = H_{2t}$

La corrente superficiale invece:

$$\sigma dl = (H_{1t} - H_{2t}) dl$$

$$\Rightarrow H_{1t} = H_{2t} + \sigma$$



Si ha $(H_{1t} - H_{2t}) = \sigma$
 otteniamo $H_{1t} = \sigma + H_{2t}$, cioè

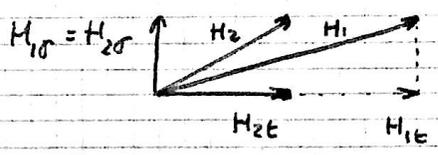
come avevamo scritto prima.

La componente tangenziale nella direzione ortogonale alla corrente è alterata di σ al passaggio dal mezzo 1 al 2

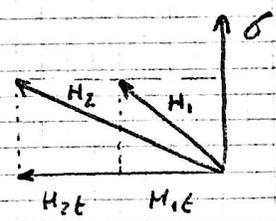
La componente tangenziale parallela alla corrente rimane costante al passare dal mezzo 1 al mezzo 2

$$H_{1n} = H_{2n}$$

1° caso



2° caso

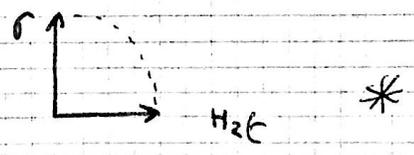


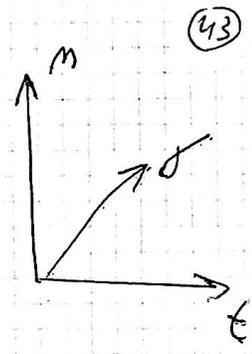
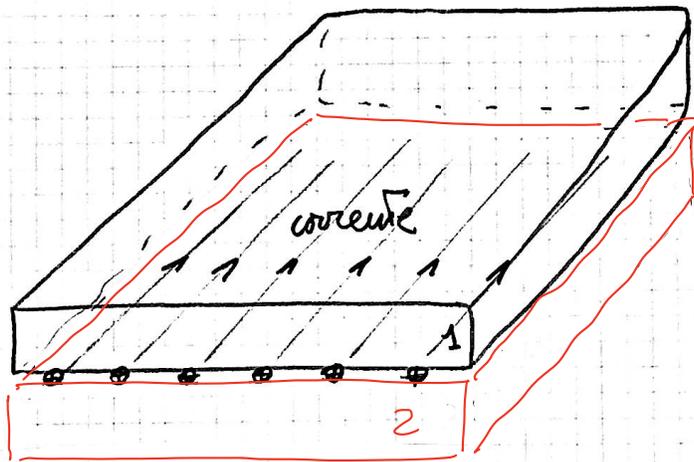
È interessante particolarmente se il mezzo è a conduttività infinita e contatto con dielettrico per es. guida d'onda.

Nel conduttore non c'è campo, ma corrente superficiale, c'è $H_t = 0$

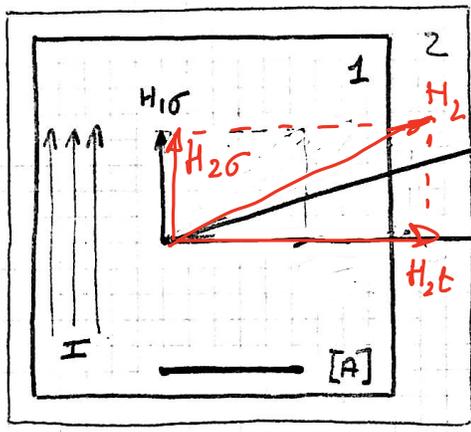
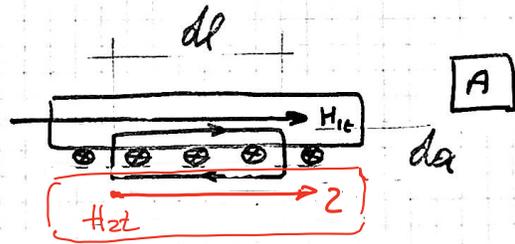
- 1) con $\sigma = 0$
- 2) " $\sigma = \infty$

da cui $H_{2n} = 0$



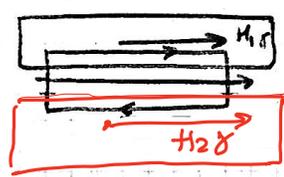


(43)



$$(H_{1t} - H_{2t}) dl = \sigma dl$$

$$H_{1t} = H_{2t} + \sigma$$



$$H_{1r} dl - H_{2r} dl = 0 \quad H_{1r} = H_{2r}$$

* infatti $H_{1m} = 0 \rightarrow B_{1m} = 0 \Rightarrow B_{2m} = 0 \rightarrow H_{2m} = 0$

In un mezzo a conducibilità infinita non può esistere campo magnetico, quindi $H_1 = 0$ (44)

si ha anche $H_{1n} = 0$

In generale $\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$

Si ha sulla superficie del caso precedente un campo in direzione perpendicolare alla corrente nel piano tangente, con direzione alternata con rotazione omnia di 90° . Con H_1 abbia un intero componente tangente di H_1 .

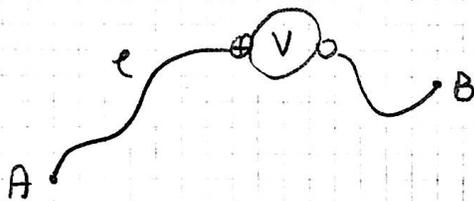
In pratica a regime variabile se $\sigma = 0$ il campo elettrico limitato a piccola zona interna.

A regime stazionario si ha corrente 0 e meno che sia superficie conduttrice. Messa qui il problema di determinare quanto tenuta nei semiconduttori.

Campi variabili

Il campo varia per perturbazioni elettromagnetiche nei generatori cioè non per il movimento di sorgenti o strumenti.

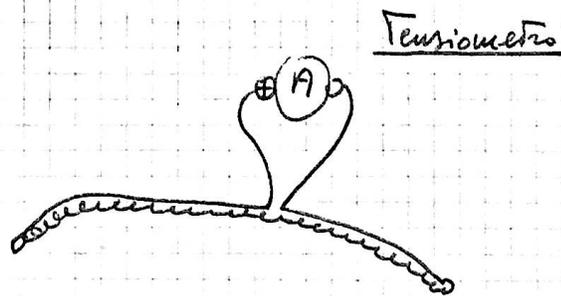
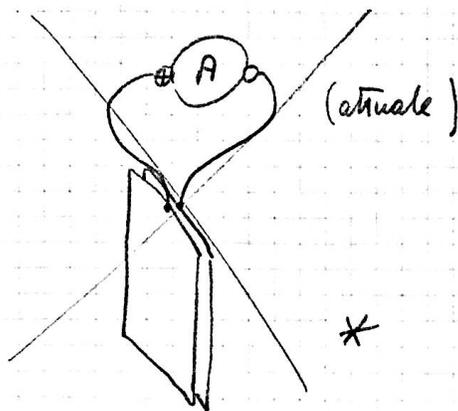
Continua ad avere interesse l'uso degli strumenti finora usati? Non c'è nessuna ragione per cui non si debbano usare.



per es. posso sempre dire che quella misurata è la tensione tra A e B

però qui se misuro l' [A, B] l'indicazione varia.

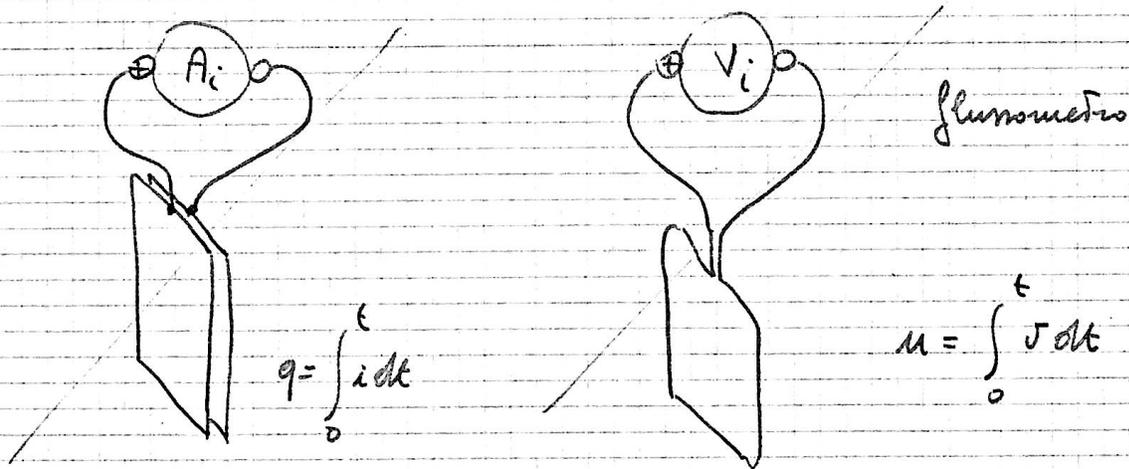
Rivediamo dunque i nostri strumenti.



Col senso di \vec{v}_i si scopre che \times è inutile se la randa del tensionometro è lungo il contorno della randa piana. (45)

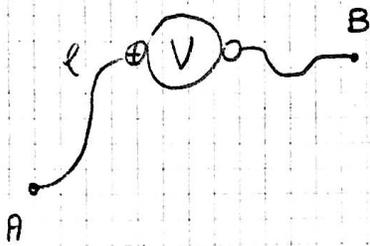
⇒ Il tensionometro coi terminali squadrati misura la Tensione magnetica
 " " " terminali uniti " " corrente
 (o Tensione magnetica totale)

Riconsideriamo gli strumenti già visti ma integratori



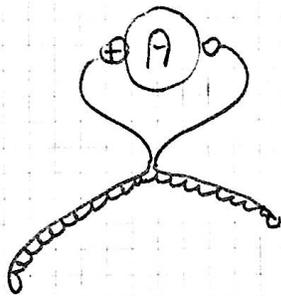
poiché ora il campo è variabile la corrente cambierà...
 → anche i flussi dielettrici e le Tensioni cambiano.

Riordinando le idee: ~~forse~~ il campo varia da sé e gli strumenti si possono lasciare fermi - Se aggiungo che per $t=0$ tutto è zero l'informazione è identica a quella che avrò mettendo un amperometro [dalla i tra 0 e t mi posso calcolare l'integrale...] ⇒ sono inutili gli strumenti come integratori, è buono usarli come strumenti attuali [Con A si cade nel caso precedente] Il voltmetro è come il precedente ma con gli estremi coincidenti ⇒ sopprimendo gli inutili rimane



$\left\{ \begin{array}{l} \text{aperto} \quad \text{Tensione} \quad (46) \\ \text{chiuso} \quad \text{derivata del flusso} \end{array} \right.$

ricordo che a meno del segno $\mathcal{V} = \frac{d\Phi}{dt}$

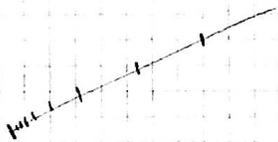


aperto Tensione magnetica

chiuso corrente totale abbracciata Γ e quindi misura la derivata del flusso dielettrico

quindi misura $i = \frac{d\mathcal{K}}{dt} + i_c$ di conduzione

3 settori del campo si possono definire, bisogna agire in una direzione e dividere per la distanza r



trovare un insieme di \vec{E}_r

\Rightarrow sono anche valide ad esempio $\mathcal{V} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

ma allora $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{V} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

che è una equazione di Maxwell in forma integrale

scrivendo meglio

(47)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad \otimes$$

per \vec{H} regolari \downarrow

$$\text{Rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

NB la \otimes è una definizione: è la stessa misura fatta con strumenti identici espressa in diverso modo

analogamente

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

per \vec{H} regolari \downarrow

$$\text{Rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

NB tutto ciò è fuori indipendente dalla linearità del mezzo.

vediamo ora per le divergenze

(col Tensiometro)

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} \right) = 0$$

ovunque

infatti: div rot E = 0

(48)

o anche

$$\int_{S(\text{chiusa})} \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} \right) \cdot d\bar{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{S(\text{chiusa})} \bar{B} \cdot d\bar{A} = 0$$

Sul piano matematico non sono proprietà indipendenti
(anche per noi sono infatti dovute al carattere lineare dei sistemi)

Caso lineare

5 settori di campo

{ 2 differenziali
3 algebrici

$$\begin{cases} \bar{B} = \mu \bar{H} \\ \bar{D} = \epsilon \bar{E} \\ \bar{J} = \frac{1}{\rho} \bar{E} \end{cases} + 2 \text{ di Maxwell}$$

Le incognite sono D, E, J, B, H

27-1-69

Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \wedge \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{cases}$$

sempre

(49)

Se il mezzo è lineare

$$\begin{cases} \bar{B} = \mu \bar{H} \\ \bar{D} = \epsilon \bar{E} \\ \bar{J} = \gamma \bar{E} \end{cases}$$

queste sono 5 equazioni nelle 5 incognite D, E, B, J, H .

Sussistono altre equazioni

$$\bar{J} \triangleq \nabla \cdot \bar{D}$$

vale per definizione

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = 0$$

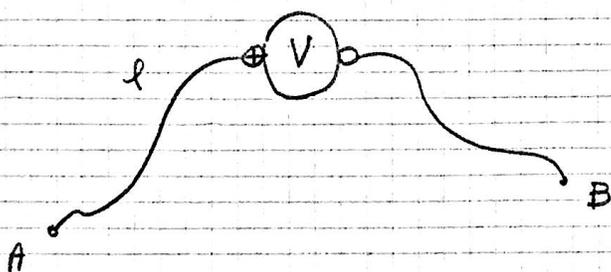
} sono una conseguenza formale
di quelle di Maxwell o
pensando in altro modo sono

dotate alla costituzione intrinseca dei vettori che le compongono.

Osserviamo ancora che noi dobbiamo pensare il regime variabile come quello che ammette come caso particolare quello stazionario.

Inoltre non ci interessiamo della parte costante, quindi se ci sono delle derivate nulle pensiamo che anche la funzione sia nulla.

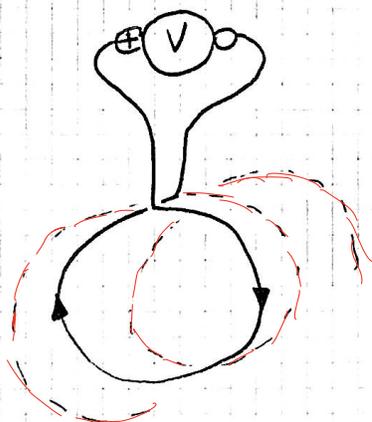
Spieghiamo la presenza del segno - in



$$V_{AB}(l) = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

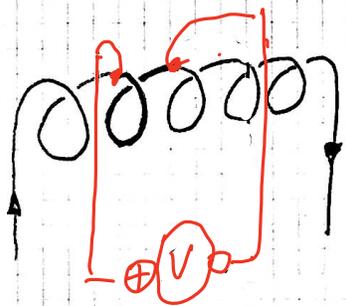
Supponiamo ora di avere un solenoide e di misurare col
 voltmetro su una spira

(50)

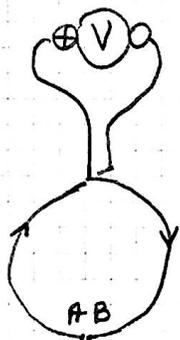


questo indica

$$V = \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$



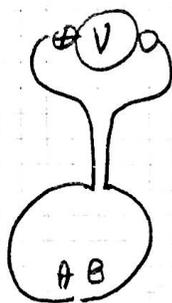
penso ora ad un voltmetro che mi dia la tensione fra A e B



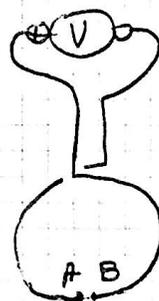
questa tensione è

$$V = - \int_A^B \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

perché il voltmetro non è usato con le
 convenzioni originarie che direbbero essere que-
 sta la inserzione per leggere direttamente i segni sul quadrante



mentre ora misuriamo con



Noi sappiamo che $\nabla \cdot \vec{J}_e = 0$ dovuta al modo usato di misura - (51)

$$\vec{J}_e = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Δ

NB non sono separatamente ~~sinusoidali~~ solenoidali -

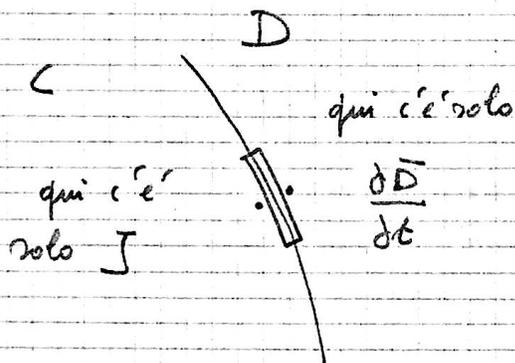
quindi misurando in un mezzo con μ e ϵ arbitrari
 è un errore dire che $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Perché in pratica si usano o buoni dielettrici o buoni conduttori
 si presentano queste due soluzioni:

conduttori $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ è trascurabile rispetto a \vec{J} [ma non sempre]

buoni dielettrici \vec{J} è trascurabile rispetto a $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Vediamo cosa succede alla superficie di separazione



perché la componente normale di \vec{J} si conserva
 si avrà $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n = J_n$

inoltre sulla superficie si avrà una densità di carica
 pari a D

NB supponiamo che l'inversione degli operatori lineari è
sempre possibile

(52)

in altri dunque

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \vec{D}) = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\gamma \nabla \cdot \vec{E} + \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \vec{D}) = 0$$

$$\frac{\gamma}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} + \frac{d}{dt} \rho = 0$$

$$\frac{\gamma}{\epsilon} \rho + \frac{d}{dt} \rho = 0$$

che ha per soluzione

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon} t}$$

*

poiché l'equazione è alle ~~derivate~~ derivate parziali
 ρ_0 è un $\rho_0(x, y, z)$

infine tutto il discorso vale solo se il mezzo è lineare dielettrico compattato
o in altre parole se è lineare dielettrico compatto

La * ci dice che se anche all'origine dei tempi sul materiale
le ci fosse stata una carica, essa sarebbe decaduta con costante
di tempo $\tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$ che dipende dal materiale ed è del

tutto indipendente dagli eventi elettromagnetici cui è soggetto -

buoni conduttori $\tau \cong 10^{-15}$

buon dielettrico τ tempo indeterminato

È spontaneo porsi una domanda: se conosco τ , ad es 10^{-15} ,
posso dire che ρ è prevalente nell'equazione Δ ?

No perché la derivata potrebbe essere molto ripida e il
discorso sarebbe infirmato -

(53)

Nel caso sinusoidale eseguendo la derivazione abbiamo un ω che moltiplica, quindi \neq un $\pi/20$ / per $\omega > \pi$
i due termini risultano comparabili \Rightarrow al di sopra
di un certo valore il materiale non si comporta
più da buon conduttore -

NB ϵ dipende da ω - Questo fatto si procura un
sacco di guai perché allora $\frac{d}{dt}$ non si può scambiare con ∇
 \rightarrow perde significato l'equazione di decadimento.

Per altre considerazioni possiamo però pensare di usare ϵ che
compete a quella frequenza -

Nell'equazione di decadimento si ha un caso particolare
per $\gamma=0$ - la condizione di carica iniziale non si può
unire con mezzi elettromagnetici, o che è lo stesso con
mezzi elettromagnetici non si producono cariche -

Veniamo ora ad alcune raccomandazioni per la soluzione delle 5
equazioni -

si introducono i potenziali elettromagnetici: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} \text{ vettore} \\ \varphi \text{ scalare} \end{array} \right.$

così che si lavora con sole 4 cose scalari invece di 6

si sviluppano note come grandezze impresse $\left\{ \begin{array}{l} \vec{S}(P) \\ S(P) \end{array} \right.$

impresse nel senso che sono i termini noti delle equazioni
differenziali.

Come già detto lavoriamo con conduttori e isolanti perfetti, tuttavia non conosciamo la forma della \vec{J} -

Cio' che normalmente e' noto sono le tensioni, ma trovare il campo e' generalmente difficile - In pratica si risolve caso per caso -

Si ipotizza una certa forma di \vec{J} e ρ , si trova \vec{A} e φ ... ma il problema per dare soluzioni sensate deve verificare anche l'equazione di continuita' -

$\rho(\rho)$ e' realmente impresa nei casi in cui ci sono effettive cariche spaziali (diodo a vuoto); nei casi veri - altrimenti e' legata a \vec{J} con l'equazione di continuita'.

Dopo aver espresso la via da seguire lasciamo ai calcoli -

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ sempre pero' pensare a $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ (1)

in quanto $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) \equiv 0 \quad \forall \vec{A}$

con la 2^a di Maxwell $\nabla \wedge \vec{E} + \nabla \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow$

$\nabla \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (2)

e' chiaro che conoscere \vec{A} e φ equivale a conoscere \vec{E} e \vec{B}

Osserviamo pero' che \vec{A} non e' definito dalla (1), cioe' dato \vec{B} non si ha univocamente \vec{A} , infatti supponiamo che \exists un \vec{A}' , allora

$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$
 $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}'$

da cui $\nabla \wedge (\bar{A} - \bar{A}') = 0$

(55)

ovvero

$$\bar{A} - \bar{A}' = -\nabla\psi$$

$$\bar{A} = \bar{A}' - \nabla\psi \quad \odot$$

cioè conosco \bar{A} a meno di una quantità con rotazione nulla (o: a meno di un gradiente)

Vediamo cosa succede per φ (con analogo procedimento):

$$\begin{cases} \bar{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \\ \bar{E} = -\nabla\varphi' - \frac{\partial \bar{A}'}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \nabla\varphi - \nabla\varphi' + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{A}'}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\left(\varphi - \varphi' - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0$$

$$\varphi = \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \odot$$

quindi se ho \bar{A}' e φ' tali che sostituiti mi danno E e B , anche \bar{A} e φ che soddisfanno le \odot (dove ψ è una arbitraria funzione del \mathbb{R}^3) mi danno E e B .

1 grado di libertà sono 4: 3 coordinate e il tempo

Per eliminare queste indeterminazioni bisogna fissare altre condizioni - Per esempio nel caso stazionario si pone \bar{A} solenoidale - Nel campo variabile si sceglie diversamente -

È spesso fatta la scelta $\varphi = 0$ (mediante $\varphi / 0 = \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$)
ma non sempre è la migliore. (56)

Volendo quindi si potrebbe sempre eliminare il potenziale scalare -

Vediamo la scelta che si fa usualmente: è quella di Lorentz ed è diretta ad avere due equazioni con una sola incognita formalmente identiche:

dalla 1^a di Maxwell e usando le algebriche

$$\frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{B} = \vec{J} + \epsilon \frac{dE}{dt}$$

sostituisco E, B con le (1) e (2)

$$\nabla \cdot \nabla \vec{A} - \mu \epsilon \frac{d}{dt} \left(-\nabla \varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} \right) = \mu \vec{J}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \mu \epsilon \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} + \mu \epsilon \nabla \frac{d\varphi}{dt} = \mu \vec{J}$$

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{oppure} \quad \nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

per eliminare l'indeterminazione ho ancora una condizione di Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

condizione di Lorentz

da cui si vede che il caso stazionario è un caso particolare

allora le equazioni diventano

(57)

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (6)$$

poiché la (5) equivale a tre scalari il problema si riconduce a saper risolvere

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = h(P, t)$$

al proposito del percorso logico visto prima in pratica procedo così:

Risolvo le equazioni differenziali trovando \bar{A} e φ .

Se verifico la condizione di Lorentz vuol dire che ho scelto una distribuzione di \bar{J} e ρ giusta, altrimenti no [Verifica di coerenza]

Si è scoperto che se \bar{J} e ρ / de soddisfare la equazione di continuità \rightarrow Lorentz è sempre valida.

Infatti

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\nabla \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

moltiplicando il 1° membro

$$\gamma \nabla \cdot \bar{E} = \gamma \nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = -\gamma \nabla^2 \varphi - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{A} =$$

$$= -\gamma \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{A} - \gamma \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \boxed{\frac{\rho}{\epsilon} \gamma}$$

sviluppiando il 2° membro

$$= -\frac{\partial}{\partial t} S$$

* infatti da
 si ha
 $\gamma \nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = 0$

$$\nabla \cdot \left(\vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

(58)

$$\frac{\gamma}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\gamma}{\epsilon} S + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

i \square sono uguali $\times \rightarrow$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

otengo la derivata della condizione di Lorentz -

28-1-69

\rightarrow cioè $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

Da quanto visto per un mezzo lineare vale

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} & * \\ \nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

dove $\begin{cases} \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$

parte irrotazionale \uparrow \uparrow parte rotazionale
 \vec{E}_1 \vec{E}_2

delle ∞ decomposizioni di questo tipo abbiamo scelta quella tale che \vec{E}_1 e' quella determinata dalle sole cariche

\vec{E}_2 solo dalle correnti

Tutto cio' per le convenzioni di Lorentz

Riordiniamo che eravamo partiti da

(59)

$$\begin{cases} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu \epsilon \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

Vediamo alcuni cas in cui non usiamo Lorentz

Dielettrico senza cariche (all'origine dei tempi)

$$\vec{J} = 0 \quad \rho = 0$$

qui usiamo la condizione $\varphi = 0$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

dalla



$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0}$$

□

Combinazione qui è soddisfatta la condizione di Lorentz, ma è un puro caso. È sbagliato sostituire $\rho = 0$ $\vec{J} = 0$ nelle *, o per spiegare meglio, mettendo $\rho = 0$ $\vec{J} = 0$ in * non si riesce a ricavare $\varphi = 0$.

Conduttore senza cariche

Però non vogliamo \vec{J} come grandezza impressa (anche perché non è nota). $\rho = 0$ di solito non è una restrizione grave se la costante di rilassamento è molto breve rispetto al movimento dei campi.

Riprendiamo le ○ ponendo $\rho = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} + \mu \epsilon \frac{d^2 \bar{A}}{dt^2} + \mu \epsilon \frac{d\varphi}{dt} + \mu \sigma \nabla \varphi + \mu \sigma \frac{d\bar{A}}{dt} = 0 \\ \nabla^2 \varphi + \frac{d}{dt} \nabla \cdot \bar{A} = 0 \end{array} \right. \quad (50)$$

in luogo $\varphi = 0$

o tempo

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{d^2 \bar{A}}{dt^2} - \mu \sigma \frac{d\bar{A}}{dt} = 0 \end{array}} \quad \blacksquare$$

Confrontando le \blacksquare ricavo che la presenza di dissipazione provoca la presenza di una derivata prima rispetto al tempo -
Per nostra fortuna, essendo l'ultima, sono forme "d'ipichio" -
Se i campi sono sinusoidali con $\omega = \omega \cos t$ usando il metodo simbolico con le \blacksquare si ha:

$$\nabla^2 \underline{f} + \underbrace{\omega^2 K}_{\text{reale}} \underline{f} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \underline{f} + \underbrace{(\omega^2 K - j\omega P)}_{\text{immaginario}} \underline{f} = 0$$

e quindi formalmente identiche - Con Fourier si può trattare il mezzo con perdite pensandolo come sovrapposizione di tante sinusoidi -

Esistono altri potenziali importanti: di Hertz e Fitzgerald
essi si usano in questi casi:

Dielettrici senza cariche ^{non lineare} (con essi si esprimono mediante una polarizzazione dielettrica che però è diversa dalla solita |
normalmente si usa la scomposizione

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

dovute alla polarizzazione del mezzo

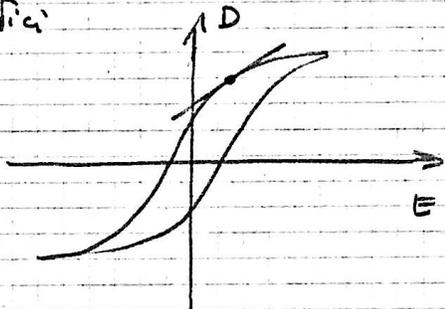
Questa è una decomposizione che è spesso fonte di errori. (61)
 Intanto se io ho un campo e immagino di levare il materiale, \vec{P} va a zero, ma non rimane $\epsilon_0 \vec{E}$, bensì $\epsilon_0 \vec{E}' \neq$ dal precedente.

Mai useremo

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P}_0'$$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_0 \text{ nullo nel materiale} \\ \neq 0 \text{ nel vuoto} \\ \text{(dove c'è zero } \epsilon') \end{array} \right.$

vale ad esempio per mezzi non globalmente lineari (ad es. isteretici)



analogamente per il caso magnetico $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{M}_0$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P}_0$$



$$\frac{\rho}{\epsilon} = \rho_1 + \rho_2$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_0}{\partial t}$$

Poiché le * viste all'inizio di ~~una~~ lezione valgono per $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ può usarle se considero ai secondi membri le dovute quantità.

Riservo per comodità le *

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} & * \\ \nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad \text{or} \quad \nabla \cdot \bar{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (62)$$

Poiché il mezzo che stiamo considerando è

senza cariche \rightarrow perché la ρ_a dello 0 = 0 (zero)

poiché la ρ a secondo membro delle * è data da $\epsilon \nabla \cdot \bar{E}$ ne segue

$$\rho = \rho_1 = -\rho_2 = \boxed{-\nabla \cdot \bar{P}_0 = \rho}$$

per l'altra equazione basta considerare che

$$\bar{J}_t = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\bar{J}_t = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

poiché è in diel. $\bar{J} = 0$

da cui \bar{J} a secondo membro delle * vale

$$\boxed{\bar{J} = \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial t}}$$

Eseguendo ora le sostituzioni e ricordando il

potenziale di Hertz

sufficiente di poter scrivere \bar{A} con

$$\bar{A} = \mu \epsilon \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial t} \Rightarrow \varphi = -\nabla \cdot \bar{\pi}$$

infatti per l'identità di Lorentz

$$\cancel{\mu\epsilon} \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial t} + \cancel{\mu\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

che è la derivata 63

della relazione vista -

sostituendo nella 1^a equazione si ricava

$$\cancel{\mu\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \bar{\pi} - \cancel{\mu\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\cancel{\mu\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\pi}) = -\cancel{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_0$$

$$\boxed{\nabla^2 \bar{\pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial t^2} = -\frac{\bar{P}_0}{\epsilon}}$$

sostituendo nella 2^a equazione

$$\cancel{\nabla} \cdot (\nabla^2 \bar{\pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial t^2}) = -\cancel{\nabla} \cdot \frac{\bar{P}_0}{\epsilon}$$

$$\boxed{\nabla^2 \bar{\pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial t^2} = -\frac{\bar{P}_0}{\epsilon}}$$

che è la stessa equazione.

Trovato \bar{A} ho

$$\begin{cases} \bar{B} = \nabla \wedge \bar{A} = \nabla \wedge \mu\epsilon \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial t} \\ \bar{E} = \nabla(\nabla \cdot \bar{\pi}) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial t^2} \end{cases}$$

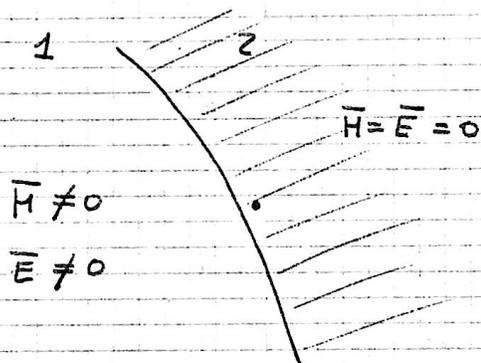
L'altro potenziale conduce a

$$\nabla^2 \bar{F} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} = -\frac{M_0}{\mu}$$

Vediamo di studiare ora il fenomeno della polarizzazione ⁽⁶⁴⁾

Caso con mezzo dielettrico, lineare, omogeneo, senza cariche
(ω e' definibile solo con ϵ, μ)

Immaginiamo una superficie S che divide lo spazio in una parte dove c'e' il campo e una in cui non c'e':
e' sostenibile ω ?



S (ideale, cioè il mezzo e' lo zero)

Le condizioni ai limiti valgono qui a maggior ragione.

- B_n si conserva, poiché il mezzo e' omogeneo anche

$$H_n \text{ si conserva} \rightarrow \boxed{H_n = 0}$$

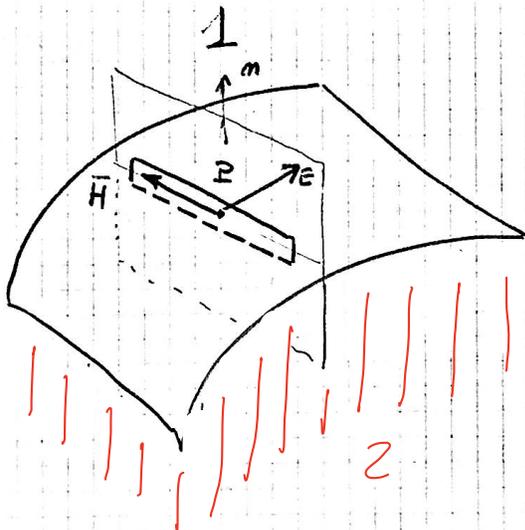
\vec{H} giace dunque nel piano tangente

- D_n si conserva $\rightarrow E_n$ si conserva $\boxed{E_n = 0}$

\vec{E} giace nel piano tangente

Anticipiamo il fatto che questa situazione e' sostenibile solo se il fronte S si muove di modo trasversale.

Vediamo alcune circuitazioni



(65)

Nel mezzo 2 non ci sono
vettori - circoliamo \vec{E}

$$\vec{E}_H \cdot \Delta P = - \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

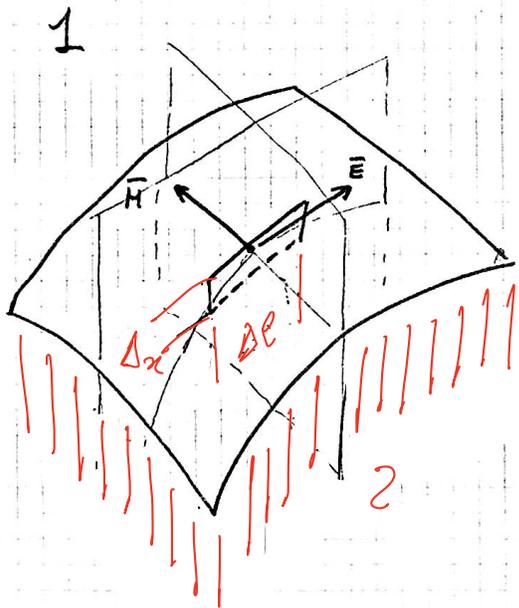
$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{E}_H = 0}$$

$\frac{d\varphi}{dt} = 0$ in quanto il flusso abbracciato e' identicamente
nullo istante per istante (se \vec{H} si muove noi col piano
 \perp che lo contiene ci muoviamo) - Quindi si deduce
che \vec{H} ed \vec{E} sono nel piano tangente e sono \perp fra loro

Supponiamo per esempio $\vec{E}, \vec{H}, \vec{n}$ forme destrorsa.

Facciamo ora un'altra circolazione di \vec{E} regola del
cavalieri



$$\vec{E} \cdot \Delta P = + \mu \frac{d}{dt} (\vec{H} \cdot \Delta \vec{l} \cdot \Delta x)$$

$$\vec{E} = \mu \left(\Delta x \frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{H} \frac{d\Delta x}{dt} \right)$$

infinitesimo

se Δx non varia $\vec{E} = 0$
caso banale -

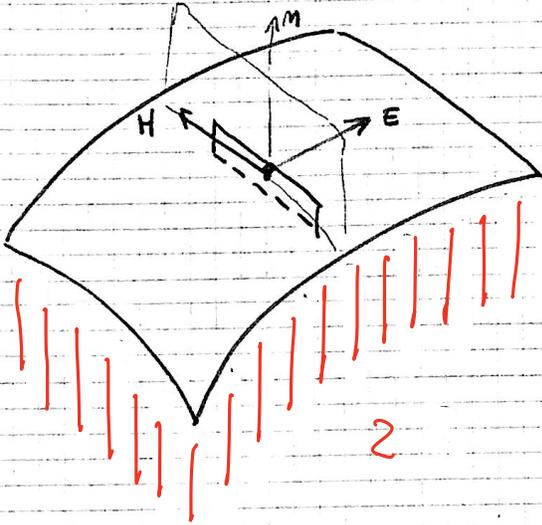
* si e' usata la
di Maxwell

Per avere $\vec{E} \neq 0$ si usa Δx variabile

quindi

$$E = \mu H v$$

facciamo ora una circolazione di \vec{H}



$$H \cdot \Delta l = \epsilon \frac{d}{dt} (E \cdot \Delta l \cdot \Delta x)$$

$$H = \epsilon E v$$

$$H = \epsilon \mu H v^2 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

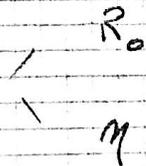
inoltre $\left| \frac{E}{H} \right| = \mu v = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

E, H, v destrorsa

E, H proporzionali

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

resistenza caratteristica del mezzo



E se il campo è variabile?

(67)

Supponiamo che presenza un campo, perturbo in \perp -
Il discorso teste' fatto si può applicare alla perturbazione -
Quindi la perturbazione del campo procede con velocità v

\vec{H} ed \vec{E} sono \perp e \in piano tangente

NB \vec{H} ed \vec{E} che si riferiscono alla perturbazione - Se sostituiamo anche il campo stazionario ciò non è più vero -