

Giuseppe Biorci

CAMPI ELETTROMAGNETICI

1

campo stazionario di correnti, campo elettrico stazionario, campo magnetico stazionario, regime variabile, potenziali elettromagnetici, propagazione delle discontinuità, classi di soluzioni delle equazioni del campo nel caso 1-dimensionale, vettore di Pointing, campo sinusoidale nel tempo, onde piane sinusoidali nel tempo, riflessione e rifrazione - condizioni al contorno, riflessione e rifrazione nel caso sinusoidale - calcolo del campo totale

Anno Accademico 1966-67

BIORCI

CAMPI ELETTROMAGNETICI

ANNO ACCADEMICO

MCMLXVI-

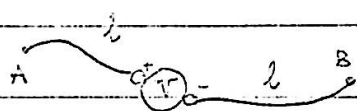
MCMLXXV

Postuliamo l'esistenza di strumenti macroscopici, piccoli a piacere, con porte infinitamente flessibili ed estensibili, isolate ovunque eccetto che in punti, che misurino certe grandezze elettriche il cui insieme viene detto campo elettromagnetico. (*)

Supponiamo che i mezzi materiali di cui ci occupiamo siano omogenei a tratti con superfici di separazione di tipo matematico. Supponiamo ancora che il campo e l'osservatore siano nello stesso sistema di riferimento in che si sia posto relativo degli uni rispetto agli altri. I mezzi si considerati si considerano isotropi e lineari (tali cioè che lo stato di sollecitazione non ne influenzi le proprietà).

Campo stazionario di correnti

Consideriamo una regione di spazio sede di una distribuzione di tensioni e correnti indipendente dal tempo. Lo stato elettrico del sistema è determinato se si conosce la corrente in ogni punto e la tensione tra due punti in tutti i modi possibili. Disponiamo allora il voltmetro tra



due punti A e B lungo la linea l ; l'indicazione che leg-

giamo la scriviamo $(V_{AB})_l$ intendendo che A è il punto col-

legato al terminale positivo, e la tensione è stata misu-

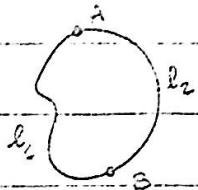
rata disponendo le porte lungo la linea spaziale l . Si bene (in realtà ciò è una proprietà del voltmetro)

$$(V_{AB})_l = - (V_{BA})_l \quad (1)$$

È verificato sperimentalmente il seguente principio di sommabilità:

$$(V_{AB})_{l_1} + (V_{BC})_{l_2} = (V_{AC})_{l_1 l_2} \quad (2)$$

Applicando la (2) ad una linea chiusa:



$$(V_{AB})_{l_1} + (V_{BA})_{l_2} = (V_{AA})_{l_1 l_2} \quad (3)$$

Nel caso di correnti stazionarie si trova sempre:

$$(V_{AA})_{l_1 l_2} = 0 \quad (3')$$

e quindi, infine, tenendo conto della (1):

$$(V_{AB})_{l_1} = (V_{AB})_{l_2} \quad (4)$$

A parole: la tensione tra due punti è indipendente dal modo in cui viene misurata, ma dipende solo dai due punti stessi. Prendiamo ora un punto B di riferimento e variano la posizione di A; l'insieme dei valori indicati dallo strumento fornisce una funzione del posto $\varphi(P)$ che viene detto potenziale. Risultato:

$$V_{HA} = V_{HB} + V_{BA} = V_{HB} - V_{NB} = \varphi(H) - \varphi(N) \quad (1)$$

L'aggiunta dell'indicazione della linea è stata alibita per ciò che si è detto. La descrizione del campo mediante una funzione del punto suggerisce la rappresentazione del campo mediante superfici equipotenziali, definite come tutti i punti che hanno il medesimo potenziale di un punto assegnato, o l'insieme di tale punto assegnato. Ovviamente le superfici equipotenziali non si intersecano, poiché nei punti di intersezione si avrebbero due valori diversi del potenziale. Quando un campo è caratterizzabile mediante una funzione del punto, indipendente da come si giunge ivi, si dice che il campo è irrotazionale o conservativo.

Consideriamo ora un punto A ed una retta che esce da A. Disponiamo un volmetro su tale retta, il cui polo estremo del volmetro essendo in B. Per caratterizzare la tensione in A, non c'è altro modo che considerare la successione di valori segnati dal puntino al tendere di B ad A; inevitabilmente è più:

$$\lim_{B \rightarrow A} V_{AB} = 0 \quad (2)$$

In la (2) si fallisce pertanto lo scopo; per ottenere un valore finito è necessario dividere V_{AB} per una quantità che tenda a zero come V_{AB} , cioè l :

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{V_{AB}}{l_{AB}} = E_A^2 \neq 0 \quad (3)$$

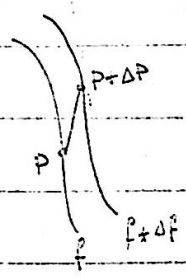
La (3) ovviamente dipende dalla direzione r , e si constata sperimentalmente che al variare di r , il limite (3) prende una direzione in cui è massimo, e lungo le altre direzioni è pari al valore massimo moltiplicato per il coseno dell'angolo formato dalla direzione attuale e dalla direzione di massimo; questo significa che E_A è compatibile con una definizione vettoriale, e lo si chiama forza elettrica. Da queste considerazioni segue:

$$\vec{E} \cdot \vec{u} = \lim_{B \rightarrow A} \frac{V_{AB}}{l_{AB}} = \lim_{B \rightarrow A} \frac{\varphi(A) - \varphi(B)}{l_{AB}} = - \frac{d\varphi}{dl} = - \frac{\nabla \varphi \cdot \vec{u}}{d\vec{l}} \quad (4)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{u} = - \nabla \varphi \cdot \frac{d\vec{l}}{dl} = - \nabla \varphi \cdot \vec{u} \quad (5)$$

$$\vec{E} = - \nabla \varphi \quad (6)$$

Consideriamo ora una superficie equipotenziale f , ed un'altra superficie $f + \Delta f$; sia P un punto qualsiasi di f , e $P + \Delta P$ un punto qualsiasi di $f + \Delta f$. Facciamo gradienti di φ calcolati in P quel vettore situato in P , perpendicolare ad f , rivolto verso i potenziali crescenti, e di modulo:



$$|\nabla f| = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{|\Delta P|} \quad (1)$$

Si definisce cioè ∇f così: $d\varphi = \nabla f \cdot d\vec{l}$ (2)

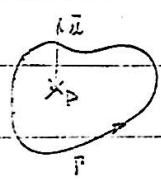
Dalla definizione di $\vec{E}$ ($\varphi(A) - \varphi(B) > 0$ e quindi $\varphi(A) > \varphi(B)$) è:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \quad (2)$$

Si ha allora: $V_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B) = \int_B^A d\varphi = \int_B^A \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (3')

$$T_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3)$$

Il rotore di un certo vettore $\vec{A}$ viene definito come segue. Consideriamo la circolazione di $\vec{A}$ attorno ad un punto P , e noi facciamo tendere a zero l'estremo superiore delle distanze dei punti della linea dal punto P .



~~l'estremo superiore delle distanze dei punti della linea dal punto P, e noi facciamo tendere a zero l'estremo superiore delle distanze dei punti della linea dal punto P.~~
 Includendo la linea Γ in una superficie S che contiene anche P ; come si è fatto la (3) di pag. 2, notando ora che la circolazione tende a zero come l^2 (cioè come una superficie), otteniamo un valore finito solo dividendo la circolazione per S :

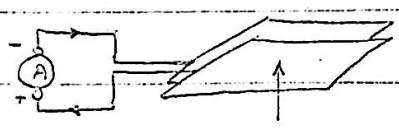
$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{S} = (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} \neq 0 \quad (4)$$

il limite dipendendo ovviamente da S , e cioè dalla normale $\vec{n}$ in P ad S . Facendo variare S si trova che la (4) è compatibile con un vettore, che chiamiamo rotore $\vec{A}$ e si indica $\nabla \wedge \vec{A}$ (4')

Dalla seconda delle (3) e dalla (4) segue:

$$\nabla \wedge \vec{E} = 0 \quad (5)$$

Un amperometro è un misuratore strumento ideale, le cui indicazioni le diciamo misure di corrente.



(4) - è, ovviamente:

$$(\nabla \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{S} \quad (4)$$

La (5) si può ricavare semplicemente dal teorema di Stokes:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \wedge \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \forall S \Rightarrow \nabla \wedge \vec{E} = 0 \quad (5')$$

Se l'autoinduzione propria + le correnti fanno nel punto indicato dalla freccia. Si constata che, sopprimendo fino il contorno delle lamine, ma deformando le lamine stesse, il segnale non cambia. Si dice allora che il campo è polinoidale. Se S è una qualunque superficie che si appoggia al contorno Γ di cui sopra, come s'è fatto in precedenza si scrive:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{I}{S} = J^1 \neq 0 \quad (1)$$

Ancora si trova che J è compatibile con una definizione vettoriale, e sarà pertanto:

$$\vec{J} \cdot \vec{u} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{I}{S} = \frac{dI}{dS} \Rightarrow I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{u} dS \quad (2)$$

~~Si definisce la densità di corrente J come la corrente che attraversa una superficie S per unità di area.~~ Definite $\vec{J}$ si definiscono le linee di flusso di $\vec{J}$ come quelle linee che hanno in ogni punto P tangente $\vec{J}$, ed i tubi di flusso di $\vec{J}$ come l'insieme delle linee di flusso che si appoggiano ad un contorno chiuso. Due tubi di flusso non si intersecano mai, riempiono lo spazio e sono chiusi, oppure vanno all'infinito da tutte e due le parti. Per un'area dS è, per la definizione strumentale:

$$dI = \vec{J} \cdot \vec{u} dS = \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\vec{u} dS = d\vec{S}) \quad (3)$$

e per una superficie chiusa S :

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4)$$

Si definisce la divergenza di un vettore attraverso il teorema della divergenza (teorema di Green):

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{u} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV \quad (5)$$

$$\text{cioè:} \quad \nabla \cdot \vec{J} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{J} \cdot \vec{u} dS}{V} \quad (5')$$

essendo V il volume racchiuso dalla superficie S . Grazie alla (4):

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6)$$

Sappiamo ora di dire che sia perf. equipotenziali sia tubi di flusso:

$$V = R I \quad (7)$$

$$E \Delta l = R J \Delta S \quad (8)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J} \quad (9)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (10)$$

Seppure è vero che si hanno le medesime proprietà differenziali fatte differenziamo per una scalare, cioè $\vec{E}$ ed $\vec{J}$ sono armonici:

Se un mezzo è lineare e tra due punti c'è un generatore che cambia la sua tensione il campo conserva la sua individualità (rimane lo stesso ma "spostato" di una costante); questo non è vero ad esempio se ci sono due generatori. Quando però si fa tendere un tratto di flusso limitato da due superfici equipotenziali, a zero, anche cambiando le configurazioni ^{del campo} V rimane vero che il tratto infinitesimo è retto dalle relazioni (6) di pag. precedente (basta che il mezzo sia lineare isotropo) che ha quindi valore del tutto generale.

La $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ non può essere valida in tutto lo spazio, in quanto le linee di forza di $\vec{J}$ (chiamate) potrebbero anche linee di forza di $\vec{E}$, il che è impossibile, perché in tal caso sarebbe $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$.

Ne segue la necessità delle presenza di un tratto attivo retto dalla solita equazione:

$$-V + E = RI \quad (2)$$

facendo tendere il tratto a zero dopo aver fatto il rapporto tra la (2) e la lunghezza delle linee di flusso:

$$\boxed{\vec{E}_r + \vec{E}_e = \frac{1}{\sigma} \vec{J}} \quad (2)$$

Dato che V è la grandezza misurabile, allora è:

$$\nabla \wedge \vec{E}_r = 0 \quad (3)$$

per cui $\nabla \wedge \vec{E}_e = 0$ perché non è $\vec{E}_e$ la grandezza originale misurata. ⁽¹⁾

Dalla (3):

$$\nabla \wedge \vec{E} = \nabla \wedge \vec{E}_r = \nabla \wedge \left(\frac{1}{\sigma} \vec{J} \right) \quad (4)$$

inducendo col solito procedimento la (4) all'infinito otteniamo:

$$\vec{E}_r \cdot \vec{J} + \vec{E}_e \cdot \vec{J} = \frac{1}{\sigma} J^2 \quad (5)$$

$\vec{E}_r \cdot \vec{J}$ è la potenza che raggiunge il bipolo attraverso i morsetti; $\vec{E}_e \cdot \vec{J}$ è quella che abbandona il bipolo sotto forma di calore; $\vec{E} \cdot \vec{J}$ è quella che raggiunge il bipolo per vie diverse da quelle dei morsetti. Diciamo che $\frac{1}{\sigma} J^2$ è la potenza dissipata in un tratto infinitesimo; $\vec{E}_r \cdot \vec{J}$ è la potenza che (per unità di volume) arriva al punto P lungo le linee di forza; $\vec{E}_e \cdot \vec{J}$ è quella che arriva al punto per vie diverse (chimica, meccanica etc.).

Consideriamo una regione finita del campo: le relazioni che abbiamo sono insufficienti ~~per determinare~~ a determinare il campo? Consideriamo un tratto di mezzo isotropo omogeneo lineare (σ di conduttività); in esso:

(1) - Risultato, su tali tratti attivi:

$$\nabla \wedge \vec{E}_r = 0 \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \nabla \wedge \vec{J} = \frac{1}{\sigma} \nabla \wedge \vec{E}_e \quad \nabla \cdot \vec{E}_r = -\nabla \cdot \vec{E}_e \quad (6)$$

da cui:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \vec{E}_e} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{E}_r = -\nabla (\nabla \cdot \vec{E}_e)} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{J} = -\frac{1}{\sigma} \nabla \wedge \vec{E}_e} \quad (7)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\text{ed } \vec{E}: \quad \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (2)$$

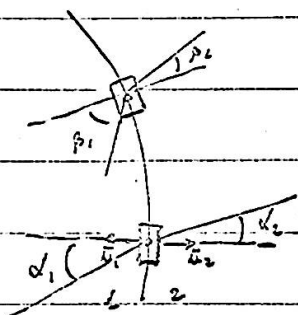
$$\text{cioè } \vec{E} \text{ è armonico:} \quad \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\text{ed } \vec{E} \text{ anche:} \quad \nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = -\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (4)$$

Di solito si cerca la soluzione della (4) poiché φ è uno scalare ed inoltre poiché le condizioni al contorno sono più semplici e più immediate.

Vediamo come succede alla superficie di separazione tra il mezzo σ_1 ed un altro σ_2 .

Cilindretto infinitesimo e solenoidaltà delle correnti:



$$\vec{J}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \vec{J}_2 \cdot d\vec{A}_2 = 0 \quad (5)$$

$$\vec{J}_1 \cdot \vec{u}_1 - \vec{J}_2 \cdot \vec{u}_2 = 0 \quad (6)$$

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (7)$$

$$\text{o anche:} \quad J_1 \cos \alpha_1 = J_2 \cos \alpha_2 \quad (8)$$

$\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ sono comparabili con le normali, poiché si orienta il rettangolino in senso normale ad $\vec{E}_1$, dal fatto che la circolazione è nulla segue anche che

Adesso orientiamo la spira in senso normale alle frontiere di prima e operando nel modo solito:

$$\vec{E}_1 \wedge \vec{u}_1 - \vec{E}_2 \wedge \vec{u}_2 = 0 \quad (9)$$

$$\text{e quindi} \quad E_{t1} = E_{t2} \quad (10)$$

$$\vec{E}_1 \sin \beta_1 = \vec{E}_2 \sin \beta_2 \quad (11)$$

Le due mezzi sono $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, risulta:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} \quad (12)$$

Se σ_1 e σ_2 sono non nulli e finiti, le linee di forza si avvicinano alla normale nel passaggio a mezzo di conducibilità più bassa; Se $\alpha_1 = 0$, è anche $\alpha_2 = 0$. Se è

σ_1 finito, e $\sigma_2 \rightarrow 0$, allora le linee di forza in media si avvicinano alla normale, ovvero $\alpha_1 \rightarrow \pi/2$: cioè le correnti possono passare nel secondo mezzo e quindi è tangente

alla mp. di separazione. In un limite ($\sigma = 0$ o $\sigma \rightarrow \infty$) si possono trattare casi che non esistono campi infiniti, e utilizzando la (8) e la (11).

Analogamente, nel caso di correnti si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} [\vec{J} + \vec{J}_i] \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J} \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \nabla \wedge \vec{J} = -\nabla \wedge \vec{J}_i$$

$$\nabla^2 \varphi = -\sigma^{-1} \nabla \cdot \vec{J}_i$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \sigma^{-1} \nabla (\nabla \cdot \vec{J}_i)$$

$$\nabla^2 \vec{J} = \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{J}_i$$

Campi dielettrici stazionari.

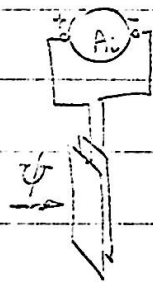
E' sempre, a rigore $\sigma \neq 0$; tuttavia in molti materiali $\sigma \approx 0$; di questi materiali ci occuperemo. Il camp. dielettrico stazionario si manifesta anche nel caso che in un conduttore circoli una corrente stazionaria, e questo in modo ovvio; in il momento per non ci occuperemo di questo caso. Per la descrizione qualitativa del camp. uno strumento che occorre è il

volmetro, che bisogna abbia resistenza interna infinita, non occorre che abbia i conduttori isolati, e deve avere le punte isolaizzanti (non deve essere simile la localizzazione di cariche sulle punte). Esplorando il camp. ci occupiamo le stesse considerazioni del camp. elettrostatico stazionario:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0 \quad V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

L'altro strumento che ci occorre è l'amperometro integratore, cioè l'indicazione dello amperometro non è una corrente ma l'integrale di una corrente: integrali dell'istante in cui sono stabiliti i campi ovvero dell'istante in cui l'amperometro si trovava in un punto dove i campi erano nulli. L'indicazione dell'amperometro è:

$$q = \int_0^t i \, dt \quad (i = i(z))$$



La carica totale si definisce:

$$Q = \int_0^{+\infty} i \, dt$$

L'integrale rispetto a tempo finito i è più significativa solo se in un intervallo finito di tempo.

Se le punte si avvicinano l'amperometro l'indice si ferma sulle indicazioni Q , che possiamo come grandezza caratteristica del camp. in quel punto, che diciamo flusso dielettrico (diletto come se fosse una corrente):

$$\psi = Q = \int_0^{+\infty} i \, dt$$

E' chiaro allora che ψ si può dire tutto ciò che si era detto su I ; si arriva alla definizione di un vettore $\vec{D}$ (detto induzione dielettrica) e ancora più forte che

deformando le lamine a contorno fino, $\bar{p}$ due superfici riducibili (tali cioè che non contengano conduttori) è:

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \quad (1)$$

Nel caso le due superfici non siano riducibili allora l'indicazione dell'ampereometro integratore non è la stessa che $\bar{p}$ superfici finite; la differenza tra le due indicazioni dipende solo dal conduttore ed è interpretabile come flusso totale uscente dalle superficie chiuse; e allora in tal caso il flusso, $\bar{p}$ la definizione strumentale, è:

$$\int_A \bar{D} \cdot d\bar{A} = Q \quad (2)$$

e non si lascia rappresentare, in generale, con un'equazione puntuale. Tuttavia in certi casi possiamo pensare che il conduttore contenuto entro la superficie chiusa non sia massiccio, ma una distribuzione continua di carica di densità ρ ; e allora si trova:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (3)$$

ovvero $\rho = Q / \Delta V$ (quando V il volume in cui è distribuita uniformemente Q).

Tra le superfici equipotenziali, si possono certamente le superfici dei conduttori (se non ci sono cariche).

Finora si possono ^{definire} i tubi di flusso di $\bar{D}$, che non passano a finire che sulle superfici dei conduttori⁽¹⁾. Si prende un tratto di flusso limitato da due superfici equipotenziali; presso in molti casi si trova:

$$-\psi = cV \quad (4)$$

e ancora:

$$D \cdot \Delta A = C E \cdot \Delta l \quad (5)$$

e quindi infine:

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (6)$$

Se $\rho = 0$, e vale la (6), $\bar{E}$ e $\bar{D}$ sono armonici.

Se si considera un sistema in cui $\sigma \neq 0$ ed $\epsilon \neq 0$ allora $\bar{E}$ è nullo all'interno e le cariche sono sulle superficie, e questo fa definizione di caso statico (se $\bar{E} \neq 0$, $\sigma \neq 0$, le cariche si muovono).

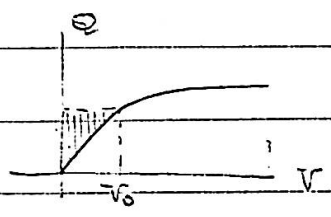
Energia associata al campo elettrostatico: $\bar{p}$ un tubo di flusso limitato, intersecato dal flusso $\bar{D}$ - cV , $\bar{p}$ unità di volume l'energia immagazzinata è:

(1) - o all'infinito, nel caso ci siano cariche all'infinito; anche questo segue dalla definizione strumentale di $\bar{D}$, e quindi di $\bar{D}$.

$$W = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ovvero: $W = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$

Ricordare che ϵ non è costante (fig. 1), ed il condensatore è caricato a V_0 , l'energia immagazzinata nel tronco di flusso è l'area



hallipate:

$$W = \int_0^t v dt = \int_0^t v \frac{dq}{dt} dt = \int_0^t v dq$$

Ci si può domandare se ciò che conosciamo del campo ci basta. Vediamo cosa sappiamo:

$$\nabla \wedge \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

dunque: $\nabla \wedge \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon$

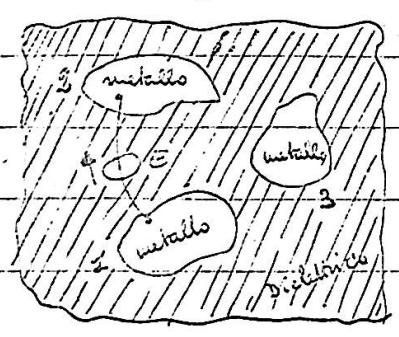
e infine: $\nabla^2 \vec{E} = \rho / \epsilon$

e anche: $\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon$

Per integrare le quali si danno in generale le distribuzioni delle cariche. Per una sfera di carica Q :

$$4\pi r^2 \epsilon E = Q$$

si può ritenere Q infinitesimo e farlo uguale a ρdV se è distribuito in un volume, e σdA se è distribuito su una ^{superficie da} ~~superficie~~ (se il mezzo è omogeneo). Però in pratica non viene mai dato Q , ma delle tensioni ~~date~~ da generatori posti tra due punti,



come nella figura accanto; sappiamo solo che le cariche sono disposte alle superfici (che sono equipotenziali) ma non le conosciamo.

Sappiamo dapprima che non ci sia il corpo 3; nota la forma, ci manca il potenziale di uno dei due corpi; disponiamo allora tra il corpo 1 e l'infinito un generatore ϕ_1 ; tra tutti i possibili valori di ϕ_1 ce n'è uno che vale proprio esattamente il potenziale di 1 ~~nel caso effettivo~~, nel

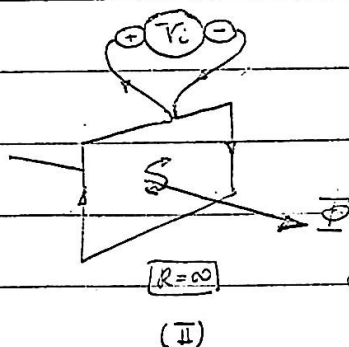
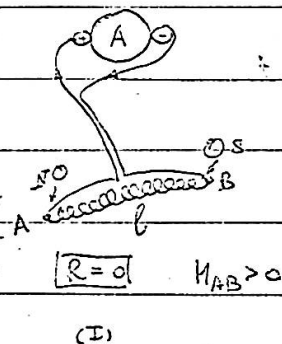
quel caso il campo non si perturba, mentre se ϕ_1 non è lo stesso il campo si perturba. Nel primo caso la carica totale su 1 è uguale ed opposta alle cariche totali su

uguali alle cadute di tensione sulle resistenze

~~Nei conduttori~~ Nei conduttori ϵ si misura tramite misure nel tempo di rilassamento (indirette) che si può misurare fino al nano secondo (10^{-9} s), non oltre. Al di sotto si scinde dalla $\vec{D}$, e quindi non ha interesse la ϵ . Si parla in tal caso di conduttori perfetti: $1/\sigma = 0$ (ovvero $\sigma = \infty$); non possono essere percorsi da corrente se non lo sono inizialmente, ad eccitazione delle superficie. Se il corp è inizialmente a riposo e vi è un campo $\vec{B} = 0$ finché altrimenti si sarebbe creato da $d\vec{B}/dt$, ma il conduttore perfetto $\vec{E}$ è quindi nullo e $\vec{B}$ all'interno. Le correnti superficiali sono tali che $\vec{B}$ all'interno è sempre la stessa: non riesce mai ad a variare la distribuzione. I superconduttori funzionano così, eccetto che per il fatto che $\vec{B}$ è sempre nullo all'interno, al contrario di quel che succedeva per un conduttore perfetto.

CAMPO MAGNETICO STAZIONARIO.

Se dove c'è un campo stazionario di corrente c'è un campo magnetico stazionario, consideriamo solo lo stesso stesso ai conduttori. Possiamo far l'estensione di due strumenti: il tensiometro magnetico (I) ed il Flussmeter (II).



L'ampèmetro è ordinario, il volmetro è un volmetro integratore. Per il (I) basta disporre nel campo tra due punti A e B lungo una linea l ; l'indicazione dell'ampèmetro viene assumta come tensione magnetica; il verso di percorrenza di l è quello che fa passare A dal + al - meno. Identificazione del polo e poi:



Dato che $R=0$, il ~~Flussmeter~~ ^{tensiometro} viene introdotto nel campo e vi è la corrente continua

a circolare. In genere allora al posto dell'amperometro si potrebbe usare un galvanometro balistico. Per il pluometro è necessario in qualche modo muovere la spirale. Noi la introduciamo nel campo da un punto a potenziale nullo. Fino a un verso di percorrenza che precede del + al - dentro lo strumento; identifico polsi sopra una faccia metallica una spirale con la polita ruota; dico che il fluo va dal metal al metal nel volmetro pigro. Definiamo:

$$B_{av} = \bar{B} \cdot \bar{u} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{B}}{S}$$

Per la struttura dello strumento è provato che $\bar{B}$ è solenoidale. E quindi:

$$\text{div } \bar{B} = 0$$

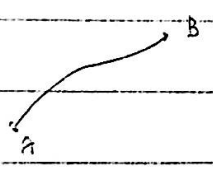
sempre, incondizionatamente, per definizione operativa. Se consideriamo due linee l_1 ed l_2 tra due punti A e B , le teniamo per identiche nei due casi sono identiche solo se l_1 ed l_2 sono riducibili (si possono deformare con continuità fino a farle coincidere senza incontrare conduttori percorsi da corrente). Se ciò non avviene le due indicazioni differiscono per le correnti comprese entro le linee chiuse l_1 ed l_2 . Se si dispone il ~~tenometro~~ lungo una linea chiusa allora esso misura le correnti comprese entro le linee. Segnato il verso di percorrenza del ~~tenometro~~, il verso delle correnti positive è dato dalle regole del cavatappi. (Le correnti sono solenoidali a posteriori perché è univale relativamente ad una spirale e non ad una superficie). Riuscita, per una spirale chiusa:

$$M_t = I_t$$

Si definisce $\bar{H}$ da M_{AB} come si definisce $\bar{E}$ da $\oint \bar{T}_{AB}$ per un caso lungo linee ben le ~~linee~~ lungo le quali tende B ad A . (Il paragrafo a correnti distribuite con continuità è ovvio). Se A è un punto dove non c'è densità di corrente, allora $\nabla \wedge \bar{H} = 0$, in caso contrario:

$$\nabla \wedge \bar{H} = \bar{S}$$

per la definizione di rotore.



La definizione del campo si può fare con i tubi di flusso di $\vec{B}$. La definizione del campo col potenziale non si può fare in generale, ma solo nel caso in cui si sia in presenza di $\vec{B} = 0$, ed è un potenziale vettore: definito a meno di una combinazione lineare arbitraria delle costanti che permeano il campo. Possiamo definire un potenziale magnetico in modo univoco per linee che giacciono interamente fuori da una superficie chiusa che contenga tutti i conduttori. In tal caso allora si descrive il campo mediante superfici equipotenziali; per un tubo di flusso:

$$M = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (\oint = \text{reluttanza})$$

per un tronchetto: $H \Delta l = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$

e infine: $\vec{B} = \mu \vec{H}$

μ è in generale un operatore; noi lo raffineremo uno scalare. Considerazioni energetiche:

per il tubo-tronco di flusso:

$$E = \frac{1}{2} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} M^2 \Delta = \frac{1}{2} \oint \vec{B}^2 \cdot d\vec{l}$$

facendo tendere il tronco a zero si trova la densità di energia:

$$W = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Scriviamo: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = M = M_V + M_E =$ ~~lavoro~~ (lavoro magnetico che, moltiplicato per il flusso, fornisce l'energia magnetica che ha raggiunto il tronco attraverso le basi) + (quella che c'è arrivata attraverso le superfici laterali). Sappiamo che il campo non varia, e si di carica in modo che il tronco sia invariante; l'energia che è arrivata al tronco attraverso le basi è istantanea finché il tubo di flusso è in totale chiuso; quella che c'è arrivata attraverso le surf. laterali non è istantanea ($M_E = \int \vec{B} \cdot d\vec{l}$):

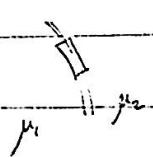
$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ET} = \oint_E \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ M_{VT} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{esteso ad un circuito completo}).$$

Cioè $\vec{H}$ può sempre essere pensato come somma di un settore irrotazionale e di uno rotazionale.

Transizione da un mezzo di permeabilità μ_1 ad un mezzo di permeabilità μ_2 per la

ci può essere un corrente superficiale. Se la corrente superficiale è nulla (ma può esserci per T di volume) usando il solito cilindretto, poiché $\text{div } \vec{B} = 0$:

$$B_{\mu_1} = B_{\mu_2} \quad (1)$$

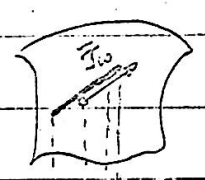


che può essere valida in generale, finché $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ sempre.

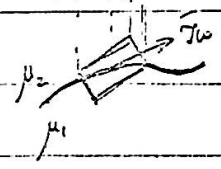
Prendendo il circuito chiuso solito (la corrente diffusa è infinitesimo di secondo ordine rispetto alle dimensioni) se la corrente superficiale è nulla,

$$H_1 \text{ ed } H_2 \text{ sono complanari e: } H_{t_1} = H_{t_2} \quad (2)$$

se c'è una corrente superficiale, essa è infinitesima del primo ordine, e bisogna tenerne conto. Da prima disponiamo le spire parallelamente alle $\vec{T}_w$: la circolazione di $\vec{H}$ è



nulla poiché la $\vec{T}_w$ non è concatenata, quindi la componente di $\vec{H}$ parallela alle densità di corrente si cancella. Ruotando di



90° la spira (rispetto ad $\vec{T}_w$), la circolazione di $\vec{H}$ è non nulla:

$$H'_{t_1} \Delta l - H'_{t_2} \Delta l = T_w \Delta l$$

quindi, nel passaggio da μ_1 a μ_2 , le componenti tangenziali di $\vec{H}$ in direzione di $\vec{T}_w$ sono continue, quelle in direzione perpendicolare a $\vec{T}_w$ subiscono un salto pari a T_w :

$$H'_{t_1} - H'_{t_2} = T_w$$

Regime variabile

Supponiamo variabile la geometria del sistema e finiti i sistemi: le variazioni ^{del campo} ~~costanti~~ ^{nel tempo} dovute alle variazioni delle grandezze imposte.

Fino ad ora abbiamo usato volmetro e amperometro, e gli strumenti ^{strumenti, ma} che misurano le grandezze integrate. Disposti per un campo variabile le indicazioni variano nel tempo, ~~per gli strumenti integratori~~ per gli strumenti integratori l'informazione è la stessa come per quelli non integratori, poiché sapere l'andamento ^{nel tempo} di I o di $\int_0^t I dt$ è lo stesso. E allora possiamo sostituirli con gli strumenti ordinari; pertanto lo amperometro nel campo dielettrico mi segna una $d\vec{D}/dt$, cioè la $d\vec{D}/dt$ è

una costante, delle costanti dielettriche. (L'è l'osservazione col fluxometro e con l'amperometro di questi risultati). D'altra parte anche l'amperometro si può eliminare, ed assumere solo il tensiometro magnetico aperto o chiuso. Per il volmetro integratore è lo stesso discorso: gli si può sostituire il volmetro ordinario che segue pure $d\Phi/dt$, che è una tensione quindi. Notare che il volmetro integratore si ottiene dal volmetro chiudendo le spade, e allora per volmetro con le spade aperte segue la tensione, con le spade chiuse ~~segue pure~~ $\int d\Phi/dt$. Poi, per le convenzioni di segno, in tal caso segue $-d\Phi/dt$. Nelle figure sotto Φ è positivo; dalle equazioni del campo Φ è sempre stato crescente e quindi anche $d\Phi/dt$ è positivo. Poi il volmetro segue:

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

e quindi se la spira è chiusa:

quindi la tensione tra A e B (per il senso di percorrenza) è:

$$V_{AB} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

che altro non è se non il flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie della spira, che va preso nel senso del carabaffi, cioè le frecce positive del flusso è delle parti opposte di quella reale; cioè lo strumento segue $-d\Phi/dt$. Cioè:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

Se S non dipende dal tempo.

Un amperometro funziona mi segue:

$$M_e = i_e = i_c + i_D \quad (4)$$

che è la seconda equazione di Maxwell in forma integrale. Che possiamo scrivere:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

ovvero (se S non dipende dal tempo):

$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

da cui segue:

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

Analogamente il volutuo conduce alle equazioni già note (prime equazioni di Maxwell):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

da cui segue:

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Ricordare che le $\vec{E}$ che compare nella (4) è la $\vec{E}_v$ che compare nella relazione già trovata:

$$\vec{E}_v + \vec{E}_c = \frac{1}{\sigma} \vec{J} \quad (5)$$

Dalle equazioni di Maxwell segue; poiché $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{V}) = 0 \quad \forall \vec{V}$

$$\nabla \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7)$$

E risulta anche:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{per definizione}) \quad (8)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (9)$$

$$\vec{B} = \epsilon \vec{H} \quad (10)$$

Le (2), (4), (6), (8) ~~sono~~ valgono sempre. Tale sistema è completo: 5 ^{equazioni scalari} vettoriali ^{o scalari} ~~indipendenti~~ ^{indipendenti}: (2), (4), (6), (8) e (10). Equazioni di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (11)$$

e per un mezzo lineare ($\vec{D} = \epsilon \vec{E}$): (*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \epsilon \rho = 0 \quad (11')$$

Considerazioni sui campi stazionari

Le prime si considerano casi in cui sempre $\vec{J}$ e $\partial \vec{D} / \partial t$ sono separatamente solenoidali nella stessa regione di spazio (da condensatore che si ricarica su se stesso) nei punti regolari. Si ammette anche che nei conduttori ci sia solo corrente di conduzione, nei dielettrici solo corrente di spostamento, nel proprio mezzo (non alle superficie di separazione); porta all'approssimazione si fa nel campo delle telecomunicazioni. Per poter integrare le equazioni di Maxwell si ricorre a degli artifici, quali quello di introduzione di potenziali nel modo che diremo.

(*) Dalla (11') si deduce che, qualunque cosa facciamo i campi esterni a un corpo conduttore non si può conservare in esso carica, ammesso che ce ne fosse per $t=0$. Nei dielettrici perfetti la carica non si muove, quindi non la si produce agendo sulle sorgenti.

Premessa. È un caso frequente (telecomunicazioni, microonde) studiare la propagazione in mezzi dielettrici. Si può convenire di considerare come funzioni assegnate $\vec{J}(\vec{r}, t)$ e $\rho(\vec{r}, t)$, sebbene ciò sia arbitrario.

I potenziali elettromagnetici -

Dato che $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ sempre, possiamo scrivere, $\forall \vec{A}$:

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \quad (1)$$

infatti: $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \nabla \wedge \vec{A} = 0 \quad \forall \vec{A}$

ostituendo allora la (1) nella $\nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ otteniamo:

$$\nabla \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2)$$

e quindi possiamo sempre scrivere: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$ (3)

Con l'introduzione di $\vec{A}$ e di ϕ , ci sono due equazioni di Maxwell che sono soddisfatte identicamente; $\vec{A}$ e ϕ saranno pertanto determinati dalle rimanenti due equazioni:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho \quad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

Sopponiamo il mezzo lineare omogeneo ed isotropo; dalle (5) segue:

$$\begin{cases} \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{A} + \mu \epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{J} \\ \nabla \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (6)$$

avere:

$$\begin{cases} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \mu \epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (7)$$

$\vec{A}$ è più definito a meno di un gradiente; infatti:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \\ \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}' \end{cases} \Rightarrow \nabla \wedge (\vec{A} - \vec{A}') = 0 \Rightarrow \vec{A} = \vec{A}' - \nabla \psi \quad (8)$$

Si trova facilmente che $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (9)$$

mentre ϕ' è definito dalla:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi' \quad (10)$$

Per eliminare l'arbitrarietà di $\vec{A}$ facciamo:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

Le (6) e (9) si riducono allora alle:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (12)$$

Le (10) e (11) si dice invarianza di "gauge".

Li siamo ridotti a 4 equazioni alle derivate parziali in 4 incognite: $\bar{A}$ e φ . Dalla (13) di pag. 18

sapete che Ψ non è più una funzione arbitraria, ma deve soddisfare l'equazione:

$$\nabla^2 \Psi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

(Sulle conseguenze delle (14) vedete lo Stralton a pag. 57)

Nel caso di un dielettrico ideale con $\rho = 0$ ovunque è: [Basta che sia $\rho = 0$]

$$\nabla^2 \bar{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \Psi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Derivando l'ultima delle (14) rispetto al tempo:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = 0 \quad (3)$$

dato allora che φ e $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ soddisfanno la medesima equazione differenziale ed è:

$$\varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varphi' \quad (4)$$

con una opportuna scelta del potenziale vettore possiamo far sì che sia $\varphi = 0$ ovunque. (1)

Li siamo ridotti a tre equazioni in tre incognite:

$$\nabla^2 \bar{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Per un conduttore ideale (tempo di rilassamento molto piccolo $\Rightarrow \rho = 0$) è $\vec{J} = \sigma \vec{E}$; da cui trova:

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \\ \nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

che è più ristretta a variabili separate. In tal caso si trova anche:

$$\nabla^2 \Psi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

Si può fare lo stesso discorso che si è fatto per un dielettrico e dire che con una opportuna scelta del potenziale vettore si può fare $\varphi = 0$ ovunque; e quindi ci siamo ridotti a tre equazioni in tre incognite:

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

Tener presente che l'introduzione delle φ potenziali non fa altro che ridurre il numero

(1) Fra le infinite soluzioni possibili per φ , esiste anche $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, come si vede dalle (4) se φ e φ' sono soluzioni. Ma anche $-\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ è soluzione. Pertanto, si sceglie una φ' in modo che, tanto vale scegliere $\varphi' = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$; con che è $\varphi = 0$, ed il campo è determinato dal solo $\bar{A}$.

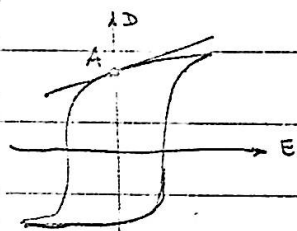
delle variabili e delle equazioni.

Introduciamo i seguenti valori:

$$\bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0 \bar{E}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} - \bar{H} \quad (1)$$

in caso nullo nel vuoto ($\bar{D} = \bar{D}(\bar{E})$ dove $\bar{D}$ può essere un funzionale e non solo una funzione); in tal caso $\bar{D}$ dipende anche dallo stato di $\bar{E}$, ovvero da $\bar{E}$ e dai punti di $\bar{E}$ in cui la derivata di $\bar{E}$ rispetto al tempo ha cambiato segno, a fatto che $\bar{E}$ non sia troppo rapidamente variabile; questo significa che per conoscere $\bar{D}$ basta assegnare lo stato iniziale rispettivamente $E_0 = D_0 = 0$ o $E_0 = D_0 = \text{saturation}$ ed i valori di $\bar{E}$ in cui la derivata di $\bar{E}$ rispetto al tempo ha cambiato segno. Si verifica che, tracciato il ciclo di isteresi massimo, nessun punto di stato del materiale ne cade al di fuori. Se il ciclo di isteresi massimo è rettilineo, allora si può supporre che la caratteristica cada sul ciclo e allora $\bar{D} = \bar{D}(\bar{E})$ solo funzione, non più funzionale; successivamente la caratteristica viene linearizzata a tratti. Per i materiali duri, cicli di isteresi molto panciuti, si riprende tale caratteristica in altri scelti, lineari e non concavali. Dato che tali materiali duri si usano in un certo punto A,



allora in quel punto si linearizza la caratteristica. (Stesso discorso se si può contemplare più il caso che ci sia una polarizzazione $\bar{P}$ ed $\bar{H}$).

$$\text{caso: } \bar{D} = \epsilon \bar{E} + \bar{P}_0$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} + \bar{H}_0$$

~~Espressioni~~

~~Espressioni~~

~~Espressioni~~

Limitiamoci a considerare: $\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \bar{P}_0$ ($\bar{P}_0$ si dice polarizzazione imponente). Risulta:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \epsilon \nabla \cdot \bar{E} + \nabla \cdot \bar{P}_0 = \rho = \rho_1 + \rho_0$$

Poniamo allora attribuire una ρ a $\nabla \cdot \bar{E}$ ed una a $\nabla \cdot \bar{P}_0$; con introdotto $\bar{P}_0$ nel die introduce una ρ_0 indipendente da $\bar{E}$. Le costanti di spostamento:

$$\bar{J}_d = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial t} = \bar{J}_f \quad (\text{nel mezzo dielettrico})$$

ed è:

$$\bar{J}_c = \bar{J} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Avremo visto che nel caso le correnti di conduzione sia da considerarsi una grandezza

in/ine:

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} \quad \nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \left(\nabla \cdot \bar{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \right) \quad (1)$$

Tornando alle polarizzazioni si può ammettere che $\partial \bar{P}_0 / \partial t$ sia una costante in/ine nota; formalmente:

$$\bar{J} = \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial t} \quad \rho = -\nabla \cdot \bar{P}_0$$

e quindi, ripetendo formalmente le considerazioni svolte per dedurre le (1), considerando un mezzo privo di cariche reali ma in cui $\bar{P}_0 \neq 0$ otteniamo:

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial t} \quad \nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \bar{P}_0 \quad \left(\nabla \cdot \bar{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0 \right) \quad (2)$$

Definiamo $\bar{\Pi}$, vettore di Herz o di polarizzazione, come segue:

$$\bar{A} = \mu \epsilon \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \phi = -\nabla \cdot \bar{\Pi}$$

che verificano l'equazione di Lorentz: $\nabla \cdot \bar{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. Sostituendo nelle (2):

$$\nabla^2 \bar{\Pi} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} = \frac{\bar{P}_0}{\epsilon} \quad (3)$$

tutte le equazioni ridotti a tre equazioni nelle componenti di $\bar{\Pi}$, poiché entrambe le (2) danno luogo alla (3). Ecco $\bar{\Pi}$ in forma:

$$\bar{B} = \nabla \wedge \bar{A} = \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \bar{\Pi} \quad \bar{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\nabla(\nabla \cdot \bar{\Pi}) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2}$$

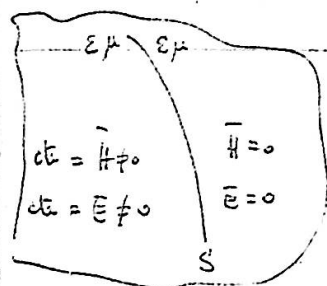
Il vettore di Fitzgerald è una cosa analoga a $\bar{H}_0$. Si trova:

$$\nabla^2 \bar{F} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} = -\frac{\bar{H}_0}{\mu}$$

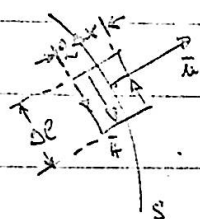
Sottrae che tutte le equazioni dei campi scritte fino ad ora sono sotto forma di equazione delle onde non omogenee. Il problema centrale è d'integrare queste equazioni. Propagazione delle discontinuità

Il campo invade tutto lo spazio. Ovvero è impossibile pensare ad una limitazione del campo. Consideriamo infatti un mezzo dielettrico omogeneo: vediamo se è possibile che esso confini con una regione in cui il campo è nullo. Sia S la superficie di separazione tra i due mezzi. Dato che $\nabla \cdot \bar{B} = 0$, allora $\bar{B}$ è tangente ad S in ogni punto di S , e così $\bar{H}$.

Se non esistono cariche anche $\bar{D}$, e quindi $\bar{E}$ sono tangenti ad



S in ogni punto di S, poiché $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. In definitiva $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ giacciono nel piano tangente ad S in ogni punto. Consideriamo^(*) allora la solita circolazione di $\vec{H}$: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$ attraverso



la superficie. Se I_f è nulla allora $\vec{H}$ è nullo ovunque; se $I_f \neq 0$ c'è solo la possibilità che sia corrente dielettrica, e allora occorre che;
~~possiamo dimostrare che se la corrente dielettrica è nulla, allora il campo magnetico è nullo.~~
~~Se la corrente dielettrica è nulla, allora il campo magnetico è nullo.~~

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f = \frac{\partial (\vec{D} \cdot \Delta \vec{x})}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \Delta l \frac{\partial x}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \Delta l v \quad (1)$$

(v = velocità con cui si muove la parete).

$$\vec{H} = \epsilon \vec{E} v$$

Se la spira è perpendicolare ad $\vec{H}$ la circolazione di $\vec{H}$ è nulla, cioè non c'è corrente dielettrica perpendicolare ad $\vec{H}$; cioè $\vec{D}$ deve essere perpendicolare ad $\vec{H}$.

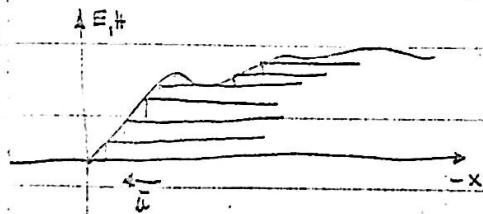
In definitiva se la superficie di separazione delle due si muove con velocità v allora può essere che $\vec{H} \neq 0$ da una parte e $\vec{H} = 0$ dall'altra. Se $v = 0$ tutto può essere. Lo stesso ragionamento vale per $\vec{E}$ e $\vec{D}$ in teoria:

$$\vec{E} = \mu \vec{H} v$$

$$\vec{H} = \epsilon \mu \vec{E} v^2$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

cioè la velocità della superficie deve essere pari alla velocità della luce nel mezzo a sinistra. Cioè il campo, creato in un certo punto, si propaga con la velocità v in tutto lo spazio. Lo stesso ragionamento si può ripetere per una perturbazione del campo, non solo per una variazione a gradino del campo come abbiamo fatto noi. (Vedi figura).



Infatti ogni perturbazione può riguardarsi come la somma di tanti gradini infinitesimi.

Nella (1) notare che, visto che $\vec{D}$ è costante nella regione considerata, l'unica possibilità affinché sia

$I_f \neq 0$ è che sia x variabile nel tempo. Cioè che la parete si muova. Notare che da questa semplice dimostrazione scaturisce che un campo statico che si muove equivale ad una corrente.

Classi di soluzioni delle equazioni del campo nel caso unidimensionale.

Sonò sempre: $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

Equazioni di Maxwell:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \nabla \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Separando $\vec{H}$ ed $\vec{E}$:

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{H} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \sigma \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

in definitiva:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

Se il mezzo è conduttore $\sigma \neq 0$, e $\rho \approx 0$ (questo può quasi sempre essere ammesso in pratica):

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1')$$

e analogamente, per i vortici del tutto generale:

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Le (1') e (2) sono equazioni indipendenti ed hanno lo stesso contenuto delle equazioni di Maxwell; ogni possibile soluzione di tali equazioni è un possibile campo.

Cominciamo col considerare che $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ dipendano da una sola coordinata e dal tempo:

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi, t) \quad \vec{H} = \vec{H}(\xi, t)$$

Questo significa che in ogni istante in tutti i punti del piano perpendicolare a ξ trova lo stesso campo. Quindi posto $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ lungo una direzione parallela a ξ , sono noti in tutto lo spazio. Prendiamo ora una degli assi coordinati di un sistema cartesiano ortogonale coincidente con ξ , sia z ad esempio.

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t) \quad \vec{H} = \vec{H}(z, t)$$

ovvero:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$$

Le equazioni (1') e (2) diventano allora in questo caso:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Per lo scopo, notare, è necessario usare ancora le equazioni di Maxwell, poiché $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ non possono essere indipendenti. Infatti:

$$[\nabla \wedge \vec{E}]_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Cioè H_z può essere solo una costante nel tempo. Assumiamo $H_z = 0$ poiché ci occupiamo di campi variabili, e ricordiamo che un'onda piana non tale se ad essa siamo in campo stazionario. Quindi $\vec{H}$ può variare solo in un piano perpendicolare a z . Analogamente:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma E_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

che è risolto da:
$$E_z(z, t) = E_{0z}(z) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}) \quad (3)$$

~~osservando~~ Le componenti di $\vec{E}$ nelle direzioni x e y sono alternate nel tempo con costanti di tempo pari al tempo di rilassamento del materiale; se esso è piccolo non è possibile ottenere una $\vec{E}$ parallela a z ; se è molto ~~grande~~ anche $\vec{E}$ giace nel piano perpendicolare a z , tenendo presente però che ad esso si può sommare un campo statico.

~~Si può allora risolvere ora l'equazione del tipo:~~

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \{ p = p(z, t) \} \quad (4)$$

Sempre di più il problema se non sia possibile trovare una soluzione del tipo:

$$p = p_1(z) p_2(t) \quad (5)$$

sostituendo:

$$p_2 \frac{d^2 p_1}{dz^2} - \mu \epsilon p_1 \frac{d^2 p_2}{dt^2} - \mu \sigma p_1 \frac{dp_2}{dt} = 0 \quad (6)$$

dividendo per $p_1 p_2$ (che non sono nulli):

(1) - Dal fatto che $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ segue che $\partial E_z / \partial z = 0$; pertanto:

$$\frac{dE_{0z}(z)}{dz} = 0 \Rightarrow E_{0z}(z) = \text{cte} = E_{0z}(0) \quad (7)$$

Da cui segue che se l'onda ha una componente E_z nell'origine delle coordinate, allora ce l'ha sempre e vale la (3); se invece l'onda non ce l'ha nell'origine, non ce l'avrà mai.

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dz^2} = \frac{\mu E}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\mu G}{f_2} \frac{df_2}{dt} \quad (1)$$

il primo membro dipende solo da z , il secondo solo da t , perché valga la (1) deve essere:

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dz^2} = c_1 = -k^2 \quad \frac{\mu E}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\mu G}{f_2} \frac{df_2}{dt} = c_1 = -k^2 \quad (2)$$

È totale delle soluzioni per ottenere demands a $-k^2$ tutti i valori possibili. La soluzione generale della prima delle (2) (moti armonici):

$$f_1(z) = A e^{jkz} + B e^{-jkz} \quad (3)$$

Per ora ci limitiamo delle seconda delle (2) solo un integrale particolare del tipo:

$$f_2(t) = C e^{-\lambda t} \quad (4)$$

$$\ddot{f}_2 = -\lambda^2 f_2 \quad \ddot{f}_2 = \lambda^2 f_2 \quad (5)$$

da cui, sostituendo:

$$\lambda^2 - \frac{G}{E} \lambda + \frac{k^2}{\mu E} = 0 \quad (6)$$

Perché k , λ deve valere:

$$\lambda = \frac{\frac{G}{E} \pm \sqrt{\frac{G^2}{E^2} - \frac{4k^2}{\mu E}}}{2} \quad (7)$$

In definitiva la forma delle soluzioni che ci interessano è:

$$f = F_1 e^{jkz - \lambda t} + F_2 e^{-jkz - \lambda t} \quad (8)$$

che vale per tutte e quattro le componenti di $\vec{E}$ ed $\vec{H}$. Vediamo i vincoli finiti, imposti dalle equazioni di Maxwell. Dalla prima ($H_z = E_z = 0$):

$$\nabla \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{j} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \vec{i} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \vec{j} = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \vec{k}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (9)$$

assumendo:

$$\begin{cases} E_y = E_{1y} e^{-jt + jkz} + E_{2y} e^{-jt - jkz} \\ H_x = H_{1x} e^{-jt + jkz} + H_{2x} e^{-jt - jkz} \end{cases} \quad (1)$$

dalle relazioni:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (2)$$

ostituendo la (1) nella (2) si trova che deve essere:

$$jk E_{1y} = -\mu j H_{1x} \quad -jk E_{2y} = -\mu j H_{2x} \quad (3)$$

ovvero:

$$\frac{E_{1y}}{H_{1x}} = -\frac{\mu}{jk} = -T \quad ; \quad \frac{E_{2y}}{H_{2x}} = \frac{\mu}{jk} = T \quad (4)$$

Da equazioni di Maxwell:

$$\nabla \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5)$$

operando nello stesso modo si giunge alle due relazioni ($H_z = E_z = 0$):

$$-\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (6)$$

ostituendo la (1) nella seconda delle (6) si ottiene le relazioni:

$$\frac{E_{1y}}{H_{1x}} = \frac{jk}{\sigma - j\omega\epsilon} \quad \frac{E_{2y}}{H_{2x}} = \frac{-jk}{\sigma - j\omega\epsilon} \quad (7)$$

tenendo conto delle

$$j^2 = -1 \quad \frac{\sigma}{\epsilon} = \gamma \quad \frac{k^2}{\mu\epsilon} = 0 \quad (8)$$

ancora è:

$$\frac{E_{1y}}{H_{1x}} = -T \quad \frac{E_{2y}}{H_{2x}} = T \quad (9)$$

Inte:

$$\begin{cases} E_x = E_{1x} e^{jkz - jt} + E_{2x} e^{-jkz - jt} \\ H_y = H_{1y} e^{jkz - jt} + H_{2y} e^{-jkz - jt} \end{cases} \quad (10)$$

2 sostituendo nella prima delle (6) ovvero nella seconda delle (9) di eq. precedente, operando come per E_y, H_x si ottiene:

$$\frac{E_{1x}}{H_{1y}} = T \quad \frac{E_{2x}}{H_{2y}} = -T \quad (11)$$

Bisognerebbe a posto posto più bene che le soluzioni $f_1 f_2$ sia reale; il che non è possibile come si verifica subito. Le soluzioni $f_1 f_2$ è complessa, le sue parti reale e le sue parti immaginarie sono quindi soluzioni delle equazioni differenziali data. Una conseguenza delle relazioni trovate è anche che $\bar{E}_z$ ed $\bar{H}_z$ sono ortogonali, qualora si trattasse di numeri reali:

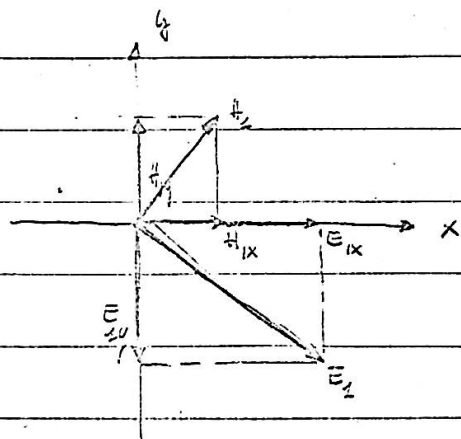
$$\frac{E_{2y}}{H_{2x}} = T_0$$

$$\frac{E_{1y}}{H_{1x}} = -T$$

da cui:

$$\frac{H_{1x}}{H_{1y}} = -\frac{E_{1y}}{E_{1x}}$$

Usi i due vettori $\bar{H}_1$ ed $\bar{E}_1$ sono ortogonali: $\bar{E}_1 \cdot \bar{H}_1 = 0$ e formano una terna destrorsa.



Troveremo che anche H_2 e E_2 sono ortogonali, e che

$\bar{E}_2 \cdot \bar{H}_2 = -2$ formano una terna destrorsa.

Questo vale per tutte le componenti di $\bar{E}$ ed $\bar{H}$ sono reali. Notare però che $\bar{E}$ ed $\bar{H}$ non sono propriamente vettori in generale. (Infatti se due vettori sono ortogonali, ed altri due lo sono anche essi, non è detto che la prima ordinata delle coppie di vettori sia una coppia ortogonale).

Supponiamo che il mezzo sia dielettrico ($\sigma=0$):

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0$$

nel caso piano:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0$$

sotto che: $\mu \epsilon = 1/v^2$ possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}$$

però quando che E_z ed H_z possono essere solo se sono costanti; noi li poniamo nulli. Le soluzioni è noto che è:

$$\bar{E} = \bar{E}_1(x, a) + \bar{E}_2(x, b)$$

considerando $\bar{E}_d$ ed $\bar{E}_i$ due funzioni arbitrarie delle variabili:

$$a = z - vt$$

$$b = z + vt$$

risultate:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \bar{E}_d}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_i}{\partial b^2} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{E}_d}{\partial a^2} v^2 + \frac{\partial^2 \bar{E}_i}{\partial b^2} v^2 \right)$$

Cioè la soluzione appena trovata è soluzione delle equazioni delle onde in una dimensione. Essa è interpretabile come due onde: una che si propaga nel verso positivo e una nel verso negativo. Lo stesso dicasi per $\bar{H}$. Impariamo le equazioni di Maxwell:

$$(\nabla \wedge \bar{E})_x = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}_x =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix}_x = + \frac{\partial E_y}{\partial z} = +\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_{dy}}{\partial a} + \frac{\partial E_{iy}}{\partial b} = -\mu v \frac{\partial H_{dx}}{\partial a} + \mu v \frac{\partial H_{ix}}{\partial b}$$

risultate: $\mu v = \mu \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = R_0$ = resistenza caratteristica del mezzo lineare

E in modo analogo se ne possono ricavare altre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{dy}}{\partial a} + \frac{\partial E_{iy}}{\partial b} &= R_0 \left(-\frac{\partial H_{dx}}{\partial a} + \frac{\partial H_{ix}}{\partial b} \right) & \frac{\partial H_{dy}}{\partial a} + \frac{\partial H_{iy}}{\partial b} &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial E_{dx}}{\partial a} - \frac{\partial E_{ix}}{\partial b} \right) \\ \frac{\partial E_{dx}}{\partial a} + \frac{\partial E_{ix}}{\partial b} &= R_0 \left(\frac{\partial H_{dy}}{\partial a} - \frac{\partial H_{iy}}{\partial b} \right) & \frac{\partial H_{dx}}{\partial a} + \frac{\partial H_{ix}}{\partial b} &= \frac{1}{R_0} \left(-\frac{\partial E_{dy}}{\partial a} + \frac{\partial E_{iy}}{\partial b} \right) \end{aligned} \quad (*)$$

Notare: se partiamo dall'ipotesi che $H_z = E_z = 0$ [una pila che muove $\bar{H} = \bar{H}(z,t)$ ed $\bar{E} = \bar{E}(z,t)$ come si è fatto fino ad ora], si trova:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

e ancora:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2} = 0$$

cioè valgono le stesse equazioni; in questo caso però bisogna ammettere che la soluzione dipende da x e da y :

$$\vec{E} = E_d(x, y, a) + E_i(x, y, b) \quad \begin{pmatrix} a = z - vt \\ b = z + vt \end{pmatrix}$$

e lo stesso per $\vec{H}$. ~~Si dice~~ Si dice onda piana post'ultima, e onda piana uniforme nel caso (particolare) che $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ dipendano solo da z e da t .

Riprendiamo in considerazione le (*) di pg. precedente:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H_{dx}}{\partial a} + \frac{\partial H_{ix}}{\partial b} &= \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial E_{dy}}{\partial a} + \frac{\partial E_{iy}}{\partial b} \right) \\ \frac{\partial H_{dx}}{\partial a} + \frac{\partial H_{ix}}{\partial b} &= \frac{1}{\rho_0} \left(-\frac{\partial E_{dy}}{\partial a} + \frac{\partial E_{iy}}{\partial b} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_{ix}}{\partial b} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial E_{iy}}{\partial b} \\ \frac{\partial H_{dx}}{\partial a} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial E_{dy}}{\partial b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{E_{iy}}{H_{ix}} = \rho_0 \\ \frac{E_{dx}}{H_{dx}} = -\rho_0 \end{cases} \quad \text{(a meno di un fattore costante che significherebbe che le funzioni sono a tale moltiplo non nullo)}$$

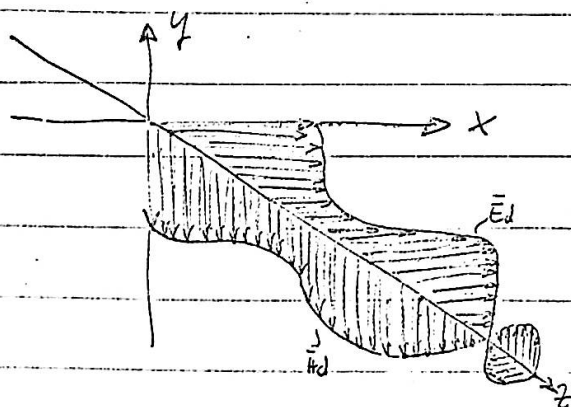
e analogamente:

$$\frac{E_{ix}}{H_{iy}} = -\rho_0$$

$$\frac{E_{dx}}{H_{dy}} = \rho_0$$

e allora si trova ancora che $\vec{E}_i$ ed $\vec{H}_i$ sono perpendicolari, come $\vec{E}_d$ ed $\vec{H}_d$. Poiché i primi formano una terna destrorsa con z , mentre i secondi la formano con $-z$ cioè la terna $\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{z}$ è destrorsa; $\vec{E}_d, \vec{H}_d, \vec{z}$ è anche essa destrorsa.

Del piano xy , al variare del tempo, tutti i vettori variano nel tempo ma i mutui rapporti tra di essi restano costanti. Lungo una retta z , ad esempio, per l'onda diretta:



traslate con velocità v (polarizzata rettilineamente) lungo l'asse z ; lo stesso dicasi per l'onda inversa.

Questo vale sia per l'onda incidente sia per l'onda riflessa diretta. $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ rimangono sempre perpendicolari e le loro traiettorie in x, y sono piane ma l'una deducibile dall'altra.

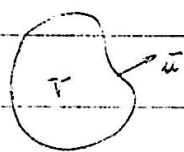
Vettore di Poynting: La potenza entrante per via elettrica è $\vec{E} \cdot \vec{I}$ più quella che arriva per via magnetica: riferita ad un punto (potenza assorbita per unità di volume):

$$P_a = \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

In un volume finito la totale potenza assorbita è:

$$P_a = \int_V \left\{ \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV$$

~~Calcoliamo la potenza assorbita in un volume:~~



$$P_a = \int_V \left\{ \vec{E} \cdot (\nabla \wedge \vec{H}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV = \int_V \left\{ \vec{E} \cdot (\nabla \wedge \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \wedge \vec{E}) \right\} dV =$$

$$= - \int_V \nabla \cdot [\vec{E} \wedge \vec{H}] dV = - \oint_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS$$

Quindi la potenza uscente da una superficie chiusa è: $\oint_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS$ ($\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$). Questo non significa che da un elemento di dV sia effettivamente una potenza $\vec{S}$ per unità di area. In genere però questo fatto lo si dimentica, anche perché non interessa molte applicazioni.

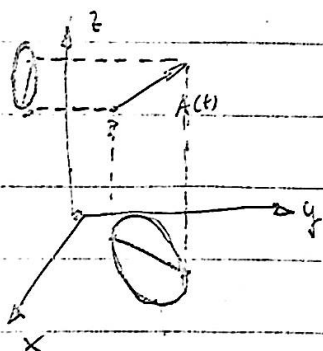
Campo sinusoidale nel tempo

In ogni punto ammettiamo che le componenti dei campi siano funzioni sinusoidali del tempo:

$$\vec{A}(t) = A_x(t) \vec{i} + A_y(t) \vec{j} + A_z(t) \vec{k}$$

$$A_x(t) = A_{xH} \cos(\omega t + \phi_x)$$

Consideriamo un punto P: le traiettorie dell'estremo di $\vec{A}$ è piana ed ellittica;



rispetto ad ogni piano (ad esempio x, y) la proiezione di tale traiettoria è ellittica; quindi l'estremo gira

sui tre cilindri ortogonali a base ellittica; e questo

significa che la traiettoria stessa è piana ed è una

ellissi. Proprietà da non confondersi con la planarità in ellittica.

Potremo adoperare il metodo simbolico (in pezzi lineari).

$$A_n(t) = \operatorname{Re} [\ddot{A}_{nH} e^{j\omega t}]$$

$$\bar{A}(t) = \operatorname{Re} [\dot{A}_{xH} \bar{i} + \dot{A}_{yH} \bar{j} + \dot{A}_{zH} \bar{k}] e^{j\omega t}$$

Consideriamo per l'altro:

$$\dot{\bar{A}} = \dot{\bar{A}}_H e^{j\omega t}$$

avendo $\dot{\bar{A}}_H$ funzione solo del punto $e^{j\omega t}$ si moltiplica sempre, anche il punto sparisce, ricordando che $\bar{i}$ sinusoidale prima;

Dalle soluzioni si prenderà poi la parte reale

Per la linearità di tutte le nostre considerazioni gli operatori differenziali si applicano identicamente ai vettori complessi. Risultati:

$$\frac{\partial \dot{\bar{A}}}{\partial t} = j\omega \dot{\bar{A}}_H e^{j\omega t} = j\omega \dot{\bar{A}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \dot{\bar{A}}_H}{\partial t} = j\omega \dot{\bar{A}}_H \quad (\text{falsa ma simbolica})$$

$$\frac{\partial \dot{\bar{A}}}{\partial t} = \frac{\partial \dot{\bar{A}}_H}{\partial t} e^{j\omega t}$$

Equazioni di Maxwell:

$$\nabla \wedge \bar{H} = \bar{J} + j\omega \bar{D}$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H}$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}$$

$$\nabla \wedge \bar{E} = -j\omega \bar{B}$$

si può quindi:

metto di derivare:

$$\begin{cases} \nabla \wedge \bar{H} = (\sigma + j\omega \epsilon) \bar{E} \\ \nabla \wedge \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \wedge \bar{H} = j\omega \epsilon \bar{E} \\ \nabla \wedge \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} \end{cases}$$

Si può per un conduttore: (1)

$$(1) \begin{cases} \nabla \wedge \bar{H} = j\omega \epsilon_0 \bar{E} \\ \nabla \wedge \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} \end{cases}$$

$$j\omega \epsilon_0 = \sigma + j\omega \epsilon$$

$$\epsilon_c = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)$$

ϵ_0 può mettere bene in evidenza che un corpo è buono ~~conduttore~~ dielettrico

dal fatto che sia $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$; si vede che tutto dipende anche dalla frequenza.

Si può anche:

$$\epsilon_c = \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon'') \quad [\epsilon' = \epsilon_r ; \epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}]$$

Equazione delle onde:

$$(\nabla^2 \bar{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0)$$

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \mu \epsilon \bar{E} - j\omega \mu \sigma \bar{E} = 0$$

o cioè:

$$\nabla^2 \bar{E} = k^2 \bar{E}$$

avendo:

$$k^2 = j\omega \mu \sigma - \omega^2 \mu \epsilon$$

La viceversa costante di propagazione del mezzo è viene scritta:

(2) - Dalle (1) si può calcolare il campo come se $\sigma = 0$; quindi nelle formule compilate finali sostituire ϵ con ϵ_0 .

$$h = \alpha + j\beta \quad \left(\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}; \alpha = \dots \right)$$

(Per trovare β si sceglie due volte il segno + prendendo in prestito l'alternativa del + o - , o osservando che β deve essere reale, o con altre osservazioni).

osservando che:

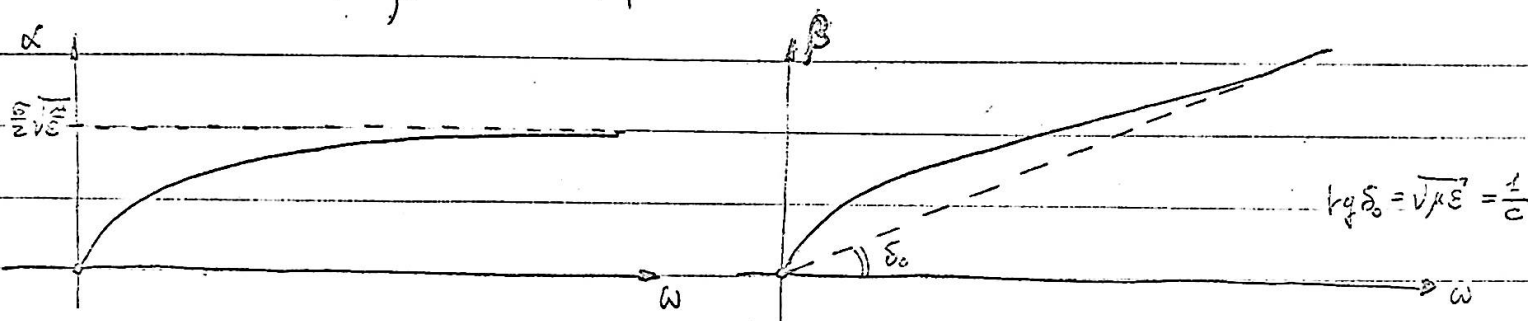
$$|\epsilon_c| = \epsilon \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{1 + \frac{|\epsilon_c|}{\epsilon}} \quad \alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{|\epsilon_c|}{\epsilon} - 1}$$

nel caso di mezzo dielettrico perfetto:

$$\sigma = 0 \quad |\epsilon_c| = \epsilon \quad \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c} \quad \alpha = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} = -\beta^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

Modo di variare di α e β con la frequenza⁽¹⁾:



Per ω che tende all'infinito il mezzo diventa un dielettrico perfetto poiché $|\epsilon_c| = \epsilon$.

Onde piane sinusoidali nel tempo

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} = h^2 \vec{E}$$

il cui integrale generale è (per esercizi dipendenze da x ed y):

$$\vec{E}_x(z) = \vec{E}_x = E'_{xd}(0) e^{-hz} + E'_{xi}(0) e^{hz} \quad (E'_{xd}(0) \text{ ed } E'_{xi}(0) \text{ cte. complesse})$$

e allora:

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \operatorname{Re} \left[E'_{xd}(0) e^{j\varphi_{xd}} e^{j\omega t} e^{-hz} \right] + \operatorname{Re} \left[E'_{xi}(0) e^{j\varphi_{xi}} e^{j\omega t} e^{hz} \right] = \\ &= E_{xd}(0) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{xd}) + E_{xi}(0) e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{xi}) \end{aligned}$$

essendo $E_{xd}(0)$ ed $E_{xi}(0)$ costanti reali. La soluzione è rappresentata da due onde attenuanti nel senso di propagazione, l'una in un senso e l'altra nell'altro; questa decomposizione non ha un significato fisico, come vedremo presto, ma è semplice.

(1) - Il fatto che a frequenze molto alte α non dipende più da ω , significa che tutte le armoniche di una forma d'onda, a banda limitata sufficientemente alta, si attenuano tutte nello stesso modo, e quindi la forma d'onda non si deforma, ma si attenua soltanto; (risultato che alle alte frequenze β è funzione lineare di ω). Questo è il caso di una onda modulata con portante ad alta frequenza.

mente, una rappresentazione. La soluzione trovata ha una oggettivazione nel caso di una sorgente di onde piane, considerando le onde irradiate a regime (N.B.).

In un problema generale notare che ha significato solo la somma di $\bar{E}_d(x,t)$ e di $\bar{E}_i(x,t)$, a regime, non solo di $\bar{E}_d$ o solo $\bar{E}_i$. È importante rilevare che tutto va bene soltanto a regime, non nel transitorio, negli istanti immediatamente successivi, cioè, alla istituzione dei campi.

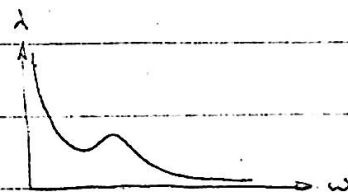
Consideriamo allora soltanto l'onda diretta, $E_{xd}(z)$ e allora l'ampiezza massima del campo in $z=0$ si dice attenuazione, perché determina l'attenuazione spaziale. Dato che il mezzo è dissipativo, l'onda si dice necessariamente attenuare nello spazio, e fa posto a decrescita esponenziale. Si dice ^{semi-}lunghezza d'onda la distanza tra due semi successivi dell'onda nello spazio:

$$\begin{cases} \omega t_0 - \beta z_1 + \varphi_{xd} = \frac{\pi}{2} \\ \omega t_0 - \beta z_2 + \varphi_{xd} = \frac{\pi}{2} + \pi \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\lambda}{2} = z_2 - z_1 = \frac{\pi}{\beta} \quad (2)$$

e quindi:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (3)$$



Si può anche definire come ^{minima} distanza tra due punti che oscillano in concordanza di fase:

$$\omega t - \beta z_1 + \varphi_{xd} = \omega t - \beta z_2 + 2k\pi \quad (4)$$

e ricorre agli stessi risultati.

Vediamo qual'è la legge del moto dei punti di zero, definiti dalla relazione:

$$\omega t - \beta z + \varphi_{xd} = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

derivando:

$$\omega dt = \beta dz \quad (6)$$

da cui:

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (7)$$

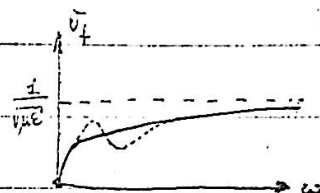
che è la velocità (di fase) con cui si muovono i punti di zero.

della f la frequenza:

$$v_p = \frac{2\pi f}{\beta} \quad (1)$$

da cui:

$$v_p = \lambda f \quad (2)$$



In un mezzo perfettamente dielettrico ($\alpha=0$):

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3)$$

v_p è indipendente da f nei limiti in cui μ ed ϵ non dipendono dalla frequenza, ed inoltre v_p coincide con la velocità di propagazione delle perturbazioni, che si era nota a suo tempo. Questo fatto importa che in un mezzo omogeneo indefinito dielettrico il regime si istituisce subito, poiché la velocità di fase è uguale a quella del fronte d'onda.

Risultato generale:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \right)}} \quad (4)$$

Si considerino le equazioni valgono per ogni componente di $\vec{E}$ e di $\vec{H}$. Rinnova (onde guidate): (*)

$$[\nabla \wedge \vec{E}]_y = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = + \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$$

$$E_x = E'_{xd}(z) e^{-h z}$$

$$H_y = H'_{yd}(z) e^{-h z}$$

da cui:

$$-h E'_{xd}(0) = -j\omega\mu H'_{yd}(0)$$

$$\frac{E'_{xd}(0)}{H'_{yd}(0)} = \frac{j\omega\mu}{h} = \eta_c \quad (**)$$

ovvero η_c l'impedenza caratteristica del mezzo. Rinnova:

$$\eta_c = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{-\omega^2\mu^2}{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon + j\frac{\sigma}{\omega}}} \quad (5)$$

quindi:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \quad (6)$$

Dato che η_c è una quantità complessa, è costante il rapporto dei moduli
 di E_x ed H_y , ma i due vettori sono in generale sfasati.

$$\frac{E'_{xd}(0)}{H'_{yd}(0)} = \frac{E_{xd}(0) e^{j\varphi_{xd}}}{E_{yd}(0) e^{j\varphi_{ydH}}} = |\eta_c| e^{j\varphi_c} \quad (1)$$

da cui:

$$\frac{E_{xd}(0)}{H_{yd}(0)} = |\eta_c| \quad \varphi_{xd} - \varphi_{ydH} = \varphi_c \quad (2)$$

Risultante:

$$\frac{E'_{yd}(0)}{H'_{xd}(0)} = -\eta_c \quad ; \quad \frac{E'_{xi}(0)}{H'_{yi}(0)} = -\eta_c \quad ; \quad \frac{E'_{yi}(0)}{H'_{xi}(0)} = \eta_c \quad (3)$$

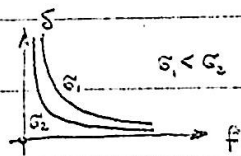
I segni si ricordano tenendo conto che si vuole dire E_x ed H_y , ed E_y , H_x
 debbono formare una terna destra con la direzione di propagazione $\vec{k}$, da cui
 segue che E_x ed H_y sono entrambi positivi e quindi il loro rapporto è positivo, e
 così di seguito, anche per quelle inverse.

Tediamo i due casi limite che poi intercorrono nella pratica. Consideriamo il
 caso di un buon conduttore ($\sigma/\omega\epsilon \gg 1$); valutando il valore di α :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (4)$$

e quindi, lo spessore di penetrazione δ vale:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (5)$$



dopo 3 o 4 volte δ l'onda è completamente sparita, in quanto δ compare come
 fattore di attenuazione per ogni componente di $\vec{E}$ ed $\vec{H}$. La espressione dello spessore di
 penetrazione si può ritenere valida per un'onda qualsiasi. La espressione di
 δ è utilissima quando si vuole calcolare lo spessore di uno schermo. Per $\sigma = \infty$
 (conduttore ottimo) $\delta = 0$, cioè il campo non penetra affatto in un conduttore
 perfetto. Troviamo β :

Es - δ si dice anche spessore di penetrazione delle correnti, in quanto le correnti si sono fu dove c'è il
 campo elettrico. Si mostra l'analogia della (5) con le analogie della teoria dell'effetto pelle.
 Ad esempio: $f = 1 \text{ MHz}$, $\mu \approx 10^{-6} \text{ H/m}$, $\sigma \approx 5 \cdot 10^7 \text{ (rame)}$ e:

$$\delta \approx 2 \text{ mm}$$

$$\delta \approx 1 \text{ cm}$$

$$\beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \alpha \quad (2)$$

e quindi:

$$h = \frac{1}{\delta} (1+j) \quad (3)$$

Infatti:

$$\eta_c = \frac{j\omega\mu}{\frac{1}{\delta}(1+j)} = \delta\omega\mu \frac{j+1}{2} = \frac{\delta\omega\mu}{2} (1+j) \quad (3)$$

Cioè

$$\varphi_c = \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

Quindi si può definire η_c come segue:

$$\eta_c = (1+j) R_s \quad (5)$$

essendo R_s la resistenza di un blocco di materiale di conduttività σ , con due dimensioni unitarie e la terza uguale a δ .

Calcoliamo il modulo di η_c :

$$|\eta_c| = \frac{\omega\mu\delta\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu^2\omega^2}{2\pi f\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi f\mu}{\sigma}} \quad (6)$$

Pertanto più esatto che si parla di un metallo, le campo elettrico e magnetico sfasati di 45° e con rapporto dei moduli determinato fra mezzo della (5). Il campo magnetico è in ritardo sul campo elettrico.

Facciamo ora il caso di un buon dielettrico ($\sigma/\omega\epsilon \ll 1$). Sviluppando in serie di potenze:
(posto $\kappa = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$):

$$\alpha \approx \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} = \frac{\kappa}{2} \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\kappa}{2} \lg \delta$$

Ricordando che:

$$\epsilon_c = \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon'') \Rightarrow \epsilon' = \epsilon_r \quad \epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

e posto:

$$\delta = \text{arctg} \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \text{arctg} \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad \lg \delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

che viene dato come indice di qualità (mis) di un dielettrico. L'attenuazione è:

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\epsilon'}{2\pi f\epsilon''} = \frac{\sqrt{2}}{\pi f} \frac{\epsilon'}{\epsilon''} = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon'}{\epsilon''}$$

quando v_f la velocità di fase nel dielettrico ($\sigma=0$) corrispondente a λ è la lunghezza d'onda nel dielettrico corrispondente. Nel buon dielettrico ϵ''/ϵ' è tanto piccolo che ϵ è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda λ :

$$\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \ll \frac{\lambda}{\pi}$$

per $\lambda = 3$ metri ($f = 100$ MHz) la relazione scritta coincide con $\sigma/\omega\epsilon' \ll 1$, al di sopra di questa più severa. Per β , sviluppando in serie:

$$\beta = k \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]$$

quindi la velocità di fase (essendo v la velocità di fase nel dielettrico corrispondente):

$$v_f = \frac{\omega v}{k \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]} \approx v \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]$$

quindi l'effetto della resistività è una diminuzione lieve della velocità di fase.

Si trova anche:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'}}}$$

quindi, mentre nel dielettrico perfetto η_c è reale, in caso diverso c'è un piccolo sfasamento temporale tra E_x ed H_y etc.

Se si ha un campo polarizzato arbitrariamente, con onde dirette, nel caso piano, rimane polarizzato arbitrariamente in tutti i piani purché il mezzo è lineare.

Dalle relazioni tra le varie componenti trovate con η_c segue che $\mathbf{H}$ è perpendicolare ad $\mathbf{E}$.

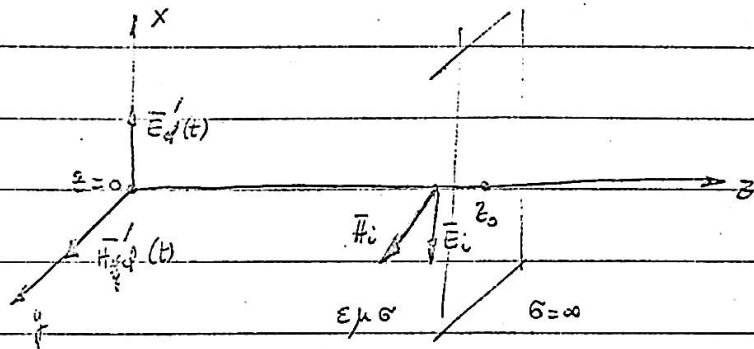
Se siamo in un caso generale $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ sono ortogonali, a

pato che il mezzo sia dielettrico (T reale); nel caso non dielettrico T non è

reale e quindi i vari sfasamenti fanno sì che $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ non sono ortogonali.

Riflessione e rifrazione. Calcolo delle condizioni al contorno.

Consideriamo una effettiva onda piana generica in un mezzo dielettrico; consideriamo il caso di onda piana ^{dielettrica} ~~in un mezzo~~. Supponiamo che tale onda incida su una $z = z_0$ superficie piana. Questo fatto fa sì che l'onda si conservi piana (Onda polarizzata rettilinea). Facciamo dapprima il caso di incidenza normale su un conduttore perfetto ($\sigma = \infty$).



Non appena l'onda è generata essa si propaga fino alla superficie di rifrazione come se niente fosse.

Non appena il fronte dell'onda urta la superficie di rifrazione, dato che il campo non può penetrare nel conduttore, $\vec{E}(z_0) = 0$, $\vec{H}(z_0) = 0$; quindi

di l'onda deve riflettersi. Nasce un'onda riflessa tale che, generata nel piano $z = z_0$, rende $\vec{E}(z_0) = 0$ ⁽¹⁾ ~~rendendo~~, e pertanto deve essere:

$$\vec{E}_r(z_0) = -\vec{E}_i(z_0)$$

$$\vec{H}_r(z_0) = \vec{H}_i(z_0)$$

(2)

trattandosi di un'onda piana, l'onda riflessa si propaga nella direzione delle z negative; dato che $\vec{E}_i, \vec{H}_i, -z$ debbono essere una triade destrorsa, $\vec{H}_i$ è ^{diretta come} ~~proporzionale~~ ^{proporzionale} $\vec{H}_d$:

$$(1) \quad \vec{E}(z_0) = \vec{E}_d(z_0) + \vec{E}_r(z_0) = 0$$

$$\vec{H}(z_0) = \vec{H}_d(z_0) + \vec{H}_r(z_0) = 2\vec{H}_d(z_0) \quad (2)$$

Dato che il mezzo a destra è totalmente riflettente, tutta la potenza deve essere riflessa; quindi dall'equivalenza dei due vettori di Poynting prima e dopo la riflessione da proprio luogo alle stesse considerazioni. ⁽³⁾ Quindi le condizioni al contorno per $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ sono le (1).

Si ottiene:

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{E}(z, t) = \vec{E}_d(t - \frac{z}{v}) - \vec{E}_d(t - \frac{2z_0 - z}{v}) \\ \vec{H}(z, t) = \vec{H}_d(t - \frac{z}{v}) + \vec{H}_d(t - \frac{2z_0 - z}{v}) \end{cases} \quad (3)$$

($\vec{H}_d, \vec{E}_d$ rappresentano il campo per $z = 0$ in funzione del tempo)

v è la velocità di fase poiché il mezzo è dielettrico.

(1) - Infatti $\vec{E}$ è continua, pertanto $\vec{E}(z_0^-) = \vec{E}(z_0^+) = 0$.

(2) - Ed inoltre spiega perché $\vec{H}_d = \vec{H}_i$; infatti:

$$\begin{cases} S_d = E_d H_d \\ S_i = E_i H_i \end{cases} \quad S_d = S_i \quad E_d H_d = E_i H_i \quad E_d = E_i \quad \Rightarrow \quad H_d = H_i$$

Nel momento in cui l'onda incide, nasce una corrente superficiale, le quali fa sì che $\vec{H}$ a destra della superficie sia nullo ed a sinistra sia diverso da zero, la corrente risulta dalle seguenti semplici considerazioni:

$$\vec{k} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_w \quad ; \quad \vec{H}_2 = 0 \quad ; \quad \vec{H}_1 = 2H_d(z_0) \vec{j} \quad ; \quad \vec{J}_w = -\vec{k} \wedge \vec{j} \cdot 2H_d(z_0) = \vec{j} k \cdot 2H_d(z_0) \quad (1)$$

e quindi:

$$\boxed{\vec{J}_w = 2H_d(z_0) \vec{i}} \quad (2)$$

$\vec{E}$ risulta pertanto diretta nel senso positivo dell'asse x (come riferimento).

Notare che tutte le considerazioni che precedono vanno bene se si ammette che la sorgente dell'onda sia in $z = -\infty$, e si conosca, ad esempio monomodo, l'andamento del campo in funzione del tempo per $z = 0$; allora in ogni punto z si ha una sola onda diretta ed una sola onda riflessa. Se invece la sorgente si trova effettivamente in $z = 0$, è necessario distinguere il caso in cui sia assegnata la corrente $\vec{J}(z=0)$ (onde generate mediante un generatore ideale di corrente), ovvero sia assegnata la tensione $V(z=0)$ (onde generate mediante un generatore ideale di tensione), ovvero non sia assegnato nulla (generatore reale di tensione o corrente). Supponiamo che la sorgente sia nel mezzo infinito in definito ($0 \leq z < -\infty$) di metallo perfetto. Allora, nel caso sia assegnata la corrente, essa è tutta superficiale, e pertanto deve essere:

$$\vec{k} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_0 \quad ; \quad \vec{H}_2 = 0 \quad , \quad \vec{H}_1 = \vec{H}(0^+, t) \quad ; \quad (3)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{H}(0^+, t) = \vec{J}_0 \quad (4)$$

(cioè $\vec{J}$ è diretto, come riferimento, nel senso ^{positivo} dell'asse x) ; ~~conoscendo~~ Dato $\vec{H}(0^+, t)$ è allora noto completamente $\vec{E}(0^+, t)$:

$$\vec{E}(0^+, t) = \frac{\eta_0}{c} \vec{J}_0 \vec{i} = -\frac{\vec{J}_0}{c} \eta_0 \vec{i} \quad (5)$$

Se il caso sia invece assegnata la tensione, è assegnata $\vec{E}(0^+, t)$ punto per punto ($\vec{J}(t) = \text{camp. inf.}$):

$$\vec{E}(0^+, t) + \vec{E}(t) = 0 \quad (6)$$

Se $\vec{E}(0^+, t)$ è noto anche $\vec{H}(0^+, t)$, come si è visto nelle considerazioni svolte sulle planizze = fine:

$$\vec{H}(0^+, t) = \vec{j} E(0^+, t) / \eta_0 = \vec{j} E(t) / \eta_0$$

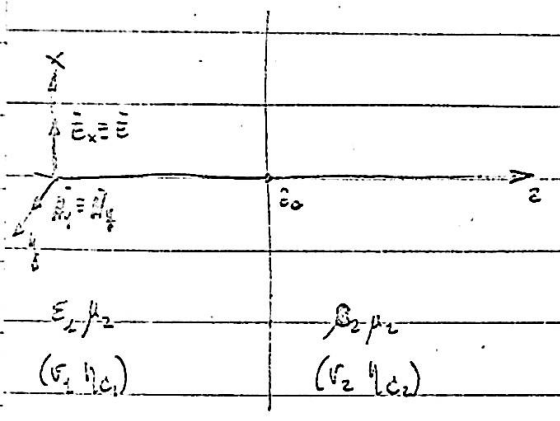
da cui si determina la corrente:

$$\vec{J}_w = -E(t) / \eta_0 \vec{i}$$

diretta pertanto, come riferimento, nel senso negativo dell'asse x .

Del caso in cui non sia assegnato nulla è necessario estendere il contorno al generatore reale, e
 vale il caso p caso. Fare qui il caso sinusoidale pag. 50

Studiamo ora il caso di incidenza normale da mezzo dielettrico a mezzo dielettrico.



Supponiamo onde soltanto dirette. Onde p =
 linearizzata rettilineamente. Risulta, prima
 della riflessione:

$$E_{x,d} / H_{y,d} = \eta_{c1}$$

Nel momento dell'impatto in parte viene
 riflessa, in parte viene rifratta. Supponiamo
 che le due onde restino piane.

($\vec{E}_t$ = campo trasmesso, $\vec{E}_r$ = campo riflesso); alla superficie ($z=0$) tanto $\vec{E}$ che $\vec{H}$ devono
 essere continui. Per $\vec{E}$ in $z=0$ esiste qualunque:

$$E_d + E_r = E_t$$

e per $\vec{H}$:

$$H_d + H_r = H_t$$

e due onde (η_{c1} reale = η_{c2} finché il mezzo è dielettrico):

$$\frac{E_d}{H_d} = \eta_{c1}$$

$$\frac{E_r}{H_r} = -\eta_{c2}$$

$$\frac{E_t}{H_t} = \eta_{c2}$$

da cui:

$$\begin{cases} E_d + E_r = E_t \\ \frac{E_d}{\eta_{c1}} - \frac{E_r}{\eta_{c1}} = \frac{E_t}{\eta_{c2}} \end{cases}$$

da cui:

$$E_t = E_d \frac{2\eta_{c2}}{\eta_{c1} + \eta_{c2}}$$

$$E_r = E_d \frac{\eta_{c2} - \eta_{c1}}{\eta_{c1} + \eta_{c2}}$$

Si dice coefficiente di trasmissione il valore $2\eta_{c2} / (\eta_{c1} + \eta_{c2})$; se riflessione non c'è
 se sono uguali le impedenze del mezzo $\eta_{c1} = \eta_{c2}$ E_t è sempre concorde con E_d , mentre
 se E_r è concorde con E_d se l'onda passa da un mezzo a impedenza più bassa ad uno
 ad impedenza più alta; viceversa in caso contrario. Il primo caso: metallo - dielettrico
 (dielettrico - metallo).

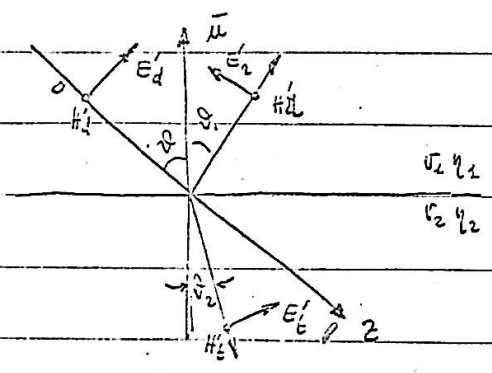
Se $\eta_{c2} \gg \eta_{c1}$ (metallo - dielettrico) $E_t \approx 2E_d$, $E_r \approx E_d$; se $\eta_{c1} \gg \eta_{c2}$ (dielettrico - metallo): $E_t \approx 0$, $E_r \approx -E_d$.

Per il campo magnetico:

$$H_t = H_d \frac{2\eta_{c1}}{\eta_{c1} + \eta_{c2}}$$

$$H_r = H_d \frac{\eta_{c2} - \eta_{c1}}{\eta_{c2} + \eta_{c1}}$$

Il coefficiente $2\eta_{c1} / \eta_{c1} + \eta_{c2}$ prende il nome di coefficiente di riflessione o di trasmissione del mezzo. Tutte le onde rimangono polarizzate rettilineamente. Se l'onda non fosse polarizzata linearmente si applicano le stesse considerazioni alle sue componenti. Consideriamo ora il caso di incidente oblique fra dielettrici. L'onda si propaga lungo l'asse z , sia $\vec{n}$ la normale alla superficie di separazione; consideriamo il piano formato da $\vec{z}$ e da $\vec{n}$. $\vec{E} = E_x \vec{i}$ lo decomponiamo in una vettore giacente



nel piano del foglio ed uno perpendicolare a tale foglio. Consideriamo il primo caso: H_d è perpendicolare al foglio ed E_d giace nel piano del foglio. Sull'onda che piano giace sia l'onda riflessa (di angolo θ_r) sia l'onda rifratta (di angolo θ_t), e che onde incidente, riflessa e rifratta giacciono in uno stesso piano che è il piano del foglio.

Nel punto di incidenza, dato che H_d rimane perpendicolare al foglio, e quindi anche E_d rimane nel foglio. Rinvia i:

$$H_d' + H_r' = H_t' \quad ; \quad E_d' \cos \theta - E_r' \cos \theta_r = E_t' \cos \theta_t \quad ; \quad E_d' \epsilon_1 \sin \theta + E_r' \epsilon_1 \sin \theta_r = E_t' \epsilon_2 \sin \theta_t$$

$$\frac{E_d'}{H_d'} = \eta_1 \quad \frac{E_r'}{H_r'} = \eta_1 \quad \frac{E_t'}{H_t'} = \eta_2$$

da cui si trova:

$$\left\{ \begin{aligned} E_d' + E_r' &= \frac{\eta_1}{\eta_2} E_t' \\ E_d' \cos \theta - E_r' \cos \theta_r &= E_t' \cos \theta_t \\ \epsilon_1 E_d' \sin \theta + E_r' \epsilon_1 \sin \theta_r &= E_t' \epsilon_2 \sin \theta_t \end{aligned} \right.$$

(*) Se $\eta_{c2} \gg \eta_{c1}$ (metallo-dielettrico) $\approx H_t' \approx 0$, $H_r' \approx -H_d'$; se $\eta_{c2} \ll \eta_{c1}$ (dielettrico-metallo) $\approx H_t' \approx 2H_d'$ e $H_r' \approx -H_d'$

posto $x = \epsilon'_2 / \epsilon'_1$ $y = \epsilon'_2 / \epsilon'_1$ si mette:

$$\begin{cases} \cos \vartheta + \cos \vartheta_1 = \frac{\eta_1}{\eta_2} y \cos \vartheta_1 = y \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta + \sin \vartheta_1 + \frac{\eta_1}{\eta_2} y \sin \vartheta_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} y \sin \vartheta_2 \end{cases} \quad (1)$$

se $\vartheta_1 = \vartheta$ allora si trova:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} \quad (2)$$

che è la legge delle rifrattioni, da cui segue l'esistenza di un angolo limite.
Però si trova che $\vartheta_2 = \vartheta$ allora si ricava subito:

$$y = \frac{\epsilon'_2}{\epsilon'_1} = \frac{2 \cos \vartheta}{\frac{\eta_1}{\eta_2} \cos \vartheta + \cos \vartheta_2} \quad x = \frac{\epsilon'_2}{\epsilon'_1} = \frac{\frac{\eta_1}{\eta_2} \cos \vartheta - \cos \vartheta_2}{\frac{\eta_1}{\eta_2} \cos \vartheta + \cos \vartheta_2} \quad (3)$$

si vede che può essere $\epsilon'_2 = 0$, e precisamente quando:

$$\begin{cases} \frac{\eta_1}{\eta_2} \cos \vartheta = \cos \vartheta_2 \\ (v_2 \sin \vartheta = v_1 \sin \vartheta_2) \end{cases} \quad (4)$$

limita quando e sommando:

$$\tan \vartheta'_B = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \epsilon_2}{\epsilon_1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \epsilon_2}} \quad (4')$$

$$\vartheta'_B = \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2}{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2}} \right\} = \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_1} \frac{\mu_2 \epsilon_1 - \mu_1 \epsilon_2}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}} \right\} \quad (5)$$

quindi, se sotto radice c'è una quantità positiva e il tutto viene minore di uno, allora si può verificare $\epsilon'_2 = 0$. Infatti, se $\mu_1 = \mu_2$:

$$\vartheta'_B = \arcsin \sqrt{\epsilon_2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (6)$$

ϑ_B si dice angolo di Brewster, per $\vartheta = \vartheta'_B$ l'onda riflessa non c'è. Perché: se si fa incidere l'onda piana polarizzata ellitticamente secondo l'angolo di Brewster sulla superficie di separazione tra due dielettrici, l'onda riflessa è polarizzata rettilineamente.

~~Chiamiamo ϑ_B l'angolo di Brewster.~~

(5) - Infatti se $v_1 < v_2$, allora può essere $\vartheta = \pi/2$ e $\vartheta'_B = \arcsin v_1/v_2 < \pi/2$; per $\vartheta'_B < \vartheta < \pi/2$ non si ha riflessione, ma solo rifrazione, che si dice totale.

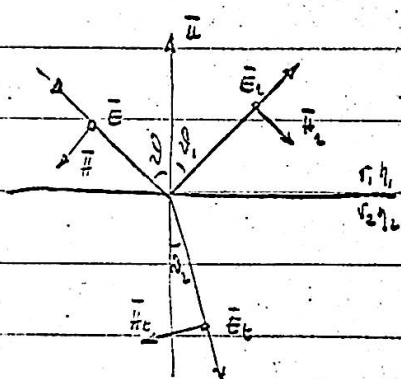
Noto E'_1 ed E'_2 sono note anche H'_1 ed H'_2 precisamente:

$$\frac{H'_1}{H'_2} = \frac{\eta_2 E'_1}{\eta_1 E'_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{2\eta_2 \cos \vartheta}{\eta_1 \cos \vartheta + \eta_2 \cos \vartheta_2} \quad ; \quad \frac{H'_1}{H'_2} = \frac{E'_1}{E'_2} = \frac{\eta_1 \cos \vartheta - \eta_2 \cos \vartheta_2}{\eta_1 \cos \vartheta + \eta_2 \cos \vartheta_2} \quad (1)$$

Si vede allora che se l'incidenza avviene secondo l'angolo di Brewster, è nullo anche H'_2 , oltre che E'_2 ; cioè esiste solo l'onda rifratta ma non l'onda riflessa. In tal caso è:

$$\left(\frac{E'_1}{E'_2}\right)_{\vartheta_B} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \epsilon_2}} \quad ; \quad \left(\frac{H'_1}{H'_2}\right)_{\vartheta_B} = \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 = \frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \epsilon_2} \quad (2)$$

Consideriamo ora le altre componenti del campo elettrico (perpendicolari al piano) e magnetico (parallele al piano). Risultano:



$$\begin{cases} E''_1 + E''_2 = E''_3 \\ H''_1 \cos \vartheta - H''_2 \cos \vartheta_1 = H''_3 \cos \vartheta_2 \\ \mu_1 H''_1 \sin \vartheta + \mu_1 H''_2 \sin \vartheta_1 = \mu_2 H''_3 \sin \vartheta_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{E''_1}{H''_1} = \eta_1 \quad \frac{E''_2}{H''_2} = \eta_2 \quad \frac{E''_3}{H''_3} = \eta_2$$

da cui:

$$\begin{cases} \frac{\eta_2}{\eta_1} H''_3 - H''_2 = H''_1 \\ \frac{\mu_2 \sin \vartheta_2}{\mu_1 \sin \vartheta} H''_3 - \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta} H''_2 = H''_1 \\ \frac{\mu_2 \cos \vartheta_2}{\mu_1 \cos \vartheta} H''_3 + \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta} H''_2 = H''_1 \end{cases} \quad (4)$$

dalle prime due:

$$\vartheta_2 = \vartheta$$

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta} = \frac{\mu_1 \eta_2}{\mu_2 \eta_1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (5)$$

Pertanto gli angoli ϑ_1 , ϑ_2 sono gli stessi che nel caso precedente, come deve essere. Dalle prime e dall'ultima delle (4), tenendo presente la (5), si trova l'analogo delle (3) di pg. 41:

$$\frac{H_1''}{H''} = \frac{2\eta_1 \cos \vartheta}{\eta_2 \cos \vartheta + \eta_1 \cos \vartheta_2} \quad ; \quad \frac{H_2''}{H''} = \frac{\eta_2 \cos \vartheta - \eta_1 \cos \vartheta_2}{\eta_2 \cos \vartheta + \eta_1 \cos \vartheta_2} \quad (1)$$

e quindi:

$$\frac{E_1''}{E''} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{H_1''}{H''} = \frac{2\eta_2 \cos \vartheta}{\eta_2 \cos \vartheta + \eta_1 \cos \vartheta_2} \quad ; \quad \frac{E_2''}{E''} = \frac{H_2''}{H''} = \frac{\eta_2 \cos \vartheta - \eta_1 \cos \vartheta_2}{\eta_2 \cos \vartheta + \eta_1 \cos \vartheta_2} \quad (2)$$

Si vede che esiste anche in questo caso un angolo di Brewster, che però non è più quello trovato precedentemente, fa cui $E_2'' = H_2'' = 0$; esso è dato dalla:

$$\begin{cases} \eta_2 \cos \vartheta = \eta_1 \cos \vartheta_2 \\ \eta_2 \sin \vartheta = \eta_1 \sin \vartheta_2 \end{cases} \quad (3)$$

operando come prima si trova:

$$\vartheta_B'' = \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_1} \frac{\mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1^2 - \mu_2^2}} \right\} \quad ; \quad \eta_B'' = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1} \frac{\mu_1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mu_2}{\mu_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \mu_2}} \quad (4)$$

e nel caso particolare in cui sia $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (due metalli: uno ferromagnetico e l'altro no, ad esempio):

$$\vartheta_B'' = \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}} \right\} \quad (5)$$

che esiste, come angolo. In caso di incidenza brewsteriana:

$$\left(\frac{H_1}{H} \right)_{\vartheta_B''} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}} \quad ; \quad \left(\frac{E_1}{E} \right)_{\vartheta_B''} = 1 \quad (6)$$

Si vede allora che nel caso di un'onda polarizzata ellitticamente si può far sparire l'una o l'altra componente, riducendo quindi l'onda ad una polarizzazione rettilinea, facendola riflettere secondo l'uno o l'altro degli angoli ϑ_B' e ϑ_B'' forniti rispettivamente dalla (5) di pg. 41 e dalla (4) di pg. 43.

Nel caso sia $\eta_1 \ll \eta_2$ (metallo-dielettrico), è anche $\eta_1 \ll \eta_2$, e pertanto $\vartheta_2 \approx \pi/2$ qualunque sia ϑ . Risulta allora:

$$\begin{array}{llll} E_1' \gg 2E' & E_2' \approx E' & H_1' \gg 2H' & H_2' \approx H' \\ E_1'' \approx 2E'' & E_2'' \approx E'' & H_1'' \approx 0 & H_2'' \approx H'' \end{array}$$

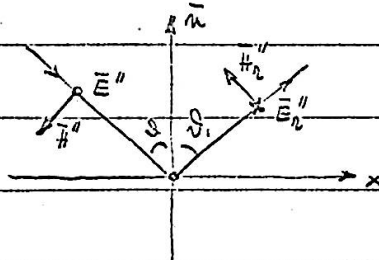
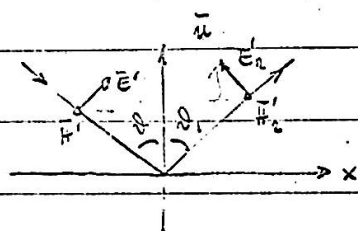
Si vede che l'onda riflessa è circa identica a quella incidente, mentre l'onda trasmessa è amplificata, ma perde la componente di $\vec{H}$ che giace nel piano del foglio.

Nel caso di $\eta_1 \gg \eta_2$ (dielettrico - metallo) è $v_1 \gg v_2$ e pertanto è $v_2 \approx 0$, qualunque sia v_1 .

L'onda riflessa è circa uguale all'onda incidente, e quella trasmessa è poca cosa.

Dato che i due mezzi a contatto sono dielettrici, si è supposto che inizialmente non vi fossero cariche superficiali alla superficie di separazione; pertanto non ci saranno mai cariche superficiali, in

Consideriamo infine il caso di riflessione su una superficie metallica perfetta ($\sigma = \infty$). In qualsiasi il metallo sono ovunque nulli, pertanto:



$$E_2 \cos \theta_2 = E' \cos \theta \quad (1)$$

$$E_2 \sin \theta_2 - \omega' = -E' \sin \theta \quad (2)$$

$$E' + E_2 = \eta T_w \quad (3)$$

$$E' - E_2 = 0 \quad (4)$$

$$E' \cos \theta + E_2 \cos \theta_2 = \eta T_w \quad (5)$$

$$E' \sin \theta - E_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (6)$$

Dalle (4) e (6) segue:

$$\theta_2 = \theta \quad (7)$$

E' pertanto, dalle rimanenti equazioni:

$$E_2 = E' \quad H_2' = H' \quad H_2'' = H'' \quad (8)$$

$$\omega' = 2E' \sin \theta \quad T_w' = \frac{2E'}{\eta} \quad T_w'' = \frac{2E' \cos \theta}{\eta} \quad (9)$$

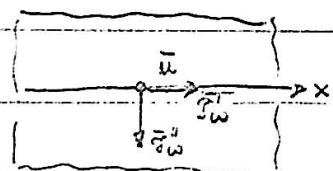
E' facile convincersi che T_w' è diretto come la componente di E' lungo l'asse x , mentre

T_w'' è diretto in modo che T_w' e T_w'' formino una

terna destra, cioè come H' . Supponendo di vedere in

lungo il piano di separazione, la situazione è quella a lato.

(*) Va bene per la fig. di destra, non per quella di sinistra, per la quale bisogna fare un ragionamento analogo a quello di pag. seg. lo fatto per le onde sinusoidali, qui in generale

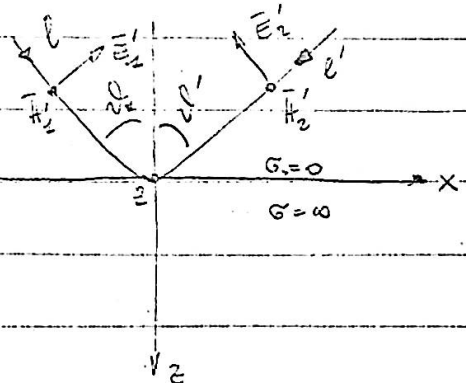


Riflessione e rifrazione nel caso pinnoriiale - Calcolo del campo totale -

Caso di una superficie perfettamente conduttrice. Distinguiamo al solito due casi: $\vec{E}$

giacente nel piano del foglio $\vec{z}$:

$$\vec{E} = \vec{E}'_1 e^{-j\beta l} + \vec{E}'_2 e^{j\beta l'} \quad (1)$$



giacendo:

$$\begin{cases} l = x \sin \theta + z \cos \theta \\ l' = -x \sin \theta' + z \cos \theta' \end{cases} \quad (2)$$

Come si verifica facilmente -

Sostituendo:

$$\begin{cases} E_x = [E'_1 \cos \theta] e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} - [E'_2 \cos \theta'] e^{j\beta(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \\ E_z = -[E'_1 \sin \theta] e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} + [E'_2 \sin \theta'] e^{j\beta(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \end{cases} \quad (3)$$

Dobbiamo imporre che il campo tangenziale sia nullo per $z=0$ e $\forall x$:

$$E_x = 0$$

$$\text{ovvero: } E'_1 \cos \theta e^{-j\beta x \sin \theta} - E'_2 \cos \theta' e^{-j\beta x \sin \theta'} = 0 \quad \forall x \quad (4)$$

che può essere solo se le dipendenze da x nei due termini $\vec{z}$ identica, cioè se $\vec{z}$:

$$\sin \theta = \sin \theta' \quad (5)$$

$$\text{cioè: } \theta = \theta' \quad (6)$$

$$\text{e quindi: } E'_1 = E'_2 \quad (7)$$

Quindi, alla luce di questi risultati, $\vec{z}$:

$$E_x = E'_1 \cos \theta e^{-j\beta x \sin \theta} \left[\frac{e^{-j\beta z \cos \theta} - e^{j\beta z \cos \theta}}{2j} \right] \quad (8)$$

$$= 2j E'_1 \cos \theta e^{-j\beta x \sin \theta} \sin(\beta z \cos \theta)$$

ora si deve moltiplicare per $e^{j\omega t}$ e prendere la parte reale, si vede che a causa delle j davanti $\vec{z}$ ne prende il seno anziché il coseno:

$$\vec{E}_x = 2E'_1 \cos \theta \sin(\beta z \cos \theta) \sin[\omega t - (\beta \sin \theta)x + \varphi_1] \quad (9)$$

Si vede che per $x = \text{cte}$ la dipendenza funzionale da z è limitata al termine $\sin(\beta z \cos \vartheta)$; cioè, muovendosi lungo una parallela a z si trova una variazione sinusoidale del campo lungo z ; quindi ci sono dei punti in cui l'oscillazione è permanentemente nulla in; cioè E_x ha il comportamento di un'onda stazionaria lungo l'asse z . I punti in cui E_x è nullo sono:

$$\beta z \cos \vartheta = n\pi \quad (1)$$

diciamo:

$$d = \frac{\pi}{\beta \cos \vartheta} \quad (2)$$

quindi gli zni sono:

$$z = nd \quad (3)$$

ovvero:

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = 2\pi f \sqrt{\mu \epsilon} \quad (4)$$

Consideriamo le lunghezze d'onda di E in quel pezzo infinito indefinito; risulta:

$$\lambda_f = cT = c \quad (5)$$

e pertanto d è:

$$d = \frac{\lambda}{2 \cos \vartheta} \quad (6)$$

In ciascuno dei piani che distano dal metallo per un multiplo intero di d , E_x è sempre nullo; quindi quel piano lo chiameremo tranquillamente piano nullo, che nulla cambia, perché le nuove condizioni al contorno sono automaticamente soddisfatte.

Sufficiente ora $z = ct$ - E_x dipende da x e da t nel seguente modo:

$$E_x(x, t) = A \sin[\omega t - (\beta \sin \vartheta)x] \quad (7)$$

che è una propagazione con velocità:

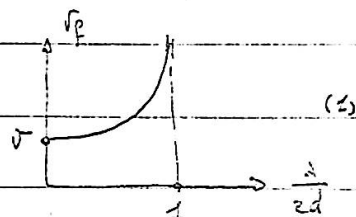
$$v_g = \frac{\omega}{\beta \sin \vartheta} = \frac{c}{\sin \vartheta} \quad (8)$$

che richiama velocità di fase (ancora) lungo l'asse x ; notare che viene fuori una

velocità maggiore di quella della luce v , ma non ha un vero significato fisico. In sostanza, c'è un'onda sinusoidale che cammina lungo x , ma variando lungo l'asse z , di dimensioni, in modo indipendente dal tempo. Su questo principio sono basate le guide d'onda. Notare che eccitando un'onda ed innestandola in una guida d'onda, variando la frequenza si trovano ad un certo punto che l'altezza della guida d'onda è pari ad un multiplo intero di d e c'è un modo di propagazione; aumentando ancora la frequenza si arriva ad un'altra di prima e così di seguito; cioè nella propagazione guidata c'è un'infinità di modi di oscillazione. C'è però da dire che normalmente la costruzione della guida avviene in modo che un modo fondamentale sia quello prevalente sugli altri.

limitati:

$$v_g = \frac{v}{\cos \theta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2}}$$



La frequenza f_c cui $\lambda = 2d$ viene detta frequenza di taglio o critica e vale:

$$\lambda f = v \quad (1)$$

$$f_c = \frac{v}{2d \sqrt{\mu \epsilon}} \quad (2)$$

È ovvio che sono possibili frequenze inferiori solo a f_c ; in caso contrario sarebbe $\lambda > 2d$ il che non ha senso. Per frequenze inferiori a f_c non è possibile una propagazione del tipo indicato prima. Per ciò f_c si dice frequenza di taglio inferiore. Si può definire una lunghezza d'onda in guida riferendosi alla propagazione lungo l'asse x :

$$\lambda_g f = v_g \quad (3)$$

si trova:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2}} \quad (5)$$

Si vede che $v_p = \infty$ si ha quando $v = 0$, cioè in tal caso non si ha propagazione lungo x.

Per E_z si trova, con le stesse condizioni al contorno:

$$E_z = -2E'_1 \sin v \cos(\beta z \cos v) e^{-j\beta x \sin v} \quad (2)$$

Se ne deve prendere la parte reale dopo averla moltiplicata per $e^{j\omega t}$:

$$E_z = -2E'_1 \sin v \cos(\beta z \cos v) \cos(\omega t - \beta \sin v x + \varphi'_1) \quad (2)$$

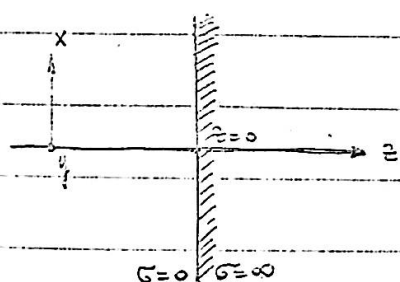
Per $x = \text{cte}$ c'è una distribuzione del tipo onda stazionaria: E_z è massima tutte le volte che:

$$\beta z \cos v = n\pi \quad (3)$$

Ciò dove E_x è nullo, e viceversa. Nella direzione secondo x la situazione è identica a prima.

Per esaminare ora l'andamento di $\vec{H}$, (diciamo solo che $\vec{H}$ è non nullo sulla superficie delle guide, e pertanto c'è una corrente superficiale); iniziamo il computando delle altre componenti di $\vec{E}$ e di $\vec{H}$. Notare che in ogni caso ci sono delle cariche superficiali, e pertanto, dato che sono variabili, c'è una corrente distribuita entro la guida⁽⁴⁾. Compteremo più avanti queste parti.

Facciamo ora il caso di incidenza normale. Risultati:



$$E_x = E_{x1} e^{-j\beta z} + E_{x2} e^{j\beta z} \quad (4)$$

per $z=0$ deve essere $E_x = 0$; da cui:

$$E_{x1} = -E_{x2} \quad (5)$$

e pertanto:

$$E_x = E_{x1} \left(\frac{e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}}{2j} \right) = -2j E_{x1} \sin \beta z \quad (6)$$

e quindi:

$$E_x = 2E_{x1} \sin \beta z \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (7)$$

che è chiaramente un'onda stazionaria, in quanto E_x è sinusoidale nel tempo in tutti i punti dello spazio ed in fase in ogni punto, quindi ci sono degli istanti in

(5) - Se in particolare $z = \frac{\pi}{2}$:

$$E_x = 0$$

$$E_z = -2E_1 \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1)$$

L'onda dunque prende la forma di una ordinaria onda fissa.

in lo spazio è completamente nullo di $\vec{E}$. $\vec{E}$ è sempre nullo nei punti distanti dall'origine fa:

$$d = \mu \frac{\pi}{\beta} = \mu \frac{1}{2} = \mu d \quad (1)$$

$$d = \frac{1}{2} \quad (2)$$

tali piani si dicono nodi dell'oscillazione. Non c'è più nulla che si propaga.

Traviamo H_y :

$$H_y = \frac{E_{x1}}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{E_{x2}}{\eta} e^{j\beta z} \quad (3)$$

$$= 2 \frac{E_{x1}}{\eta} \frac{e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}}{2} = 2 \frac{E_{x1}}{\eta} \cos \beta z$$

2 quindi:

$$H_y = 2 \frac{E_{x1}}{\eta} \cos \beta z \cos(\omega t + \phi_1) \quad (4)$$

quindi anche H_y è stazionario. Mentre in generale sono perpendicolari fra loro $\vec{E}_1$ ed $\vec{H}_2$, ma non $\vec{E}$ ed $\vec{H}$; in questo caso le componenti di $\vec{E}$ grazie secondo x ed z risulta y , quindi sono perpendicolari. Inoltre si sono spostati nel tempo di 90° ; cioè negli istanti in cui $\vec{E} = 0$ è $\vec{H}$ massimo; quindi lo spazio non è mai nullo completamente dal campo.

Flusso di energia: $\vec{S}$ è diretto come l'asse z ed ha come modulo:

$$S = E_x H_y = d \frac{E_{x1}^2}{\eta} \sin \beta z \cos \beta z \sin(\omega t + \phi_1) \cos(\omega t + \phi_1) \quad (5)$$

cioè:

$$S = d \frac{E_{x1}^2}{\eta} \frac{\sin 2\beta z}{2} \frac{\sin 2(\omega t + \phi_1)}{2} \quad (6)$$

sifine:

$$S = \frac{E_{x1}^2}{\eta} \sin 2\beta z \sin 2(\omega t + \phi_1) \quad (7)$$

ed è quindi $S = 0$ ($\forall t$) fa:

$$z = \mu \frac{1}{4} \quad (8)$$

Si può quindi dire che l'energia balla avanti e indietro in ogni intervallo ha $\frac{1}{4} \mu$ e $\frac{1}{4} \mu$ metri.

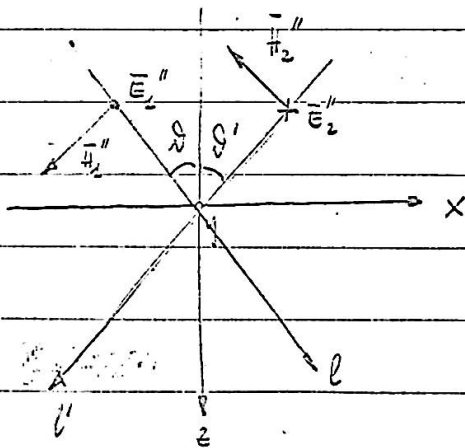
completiamo ora il caso di incidenza con angolo θ su un piano perfettamente conduttore. Il calcolo di H_y è immediato:

$$H_y = \frac{1}{\eta} [E_1' e^{-j\beta z} - E_2' e^{j\beta z}] = \frac{E_1'}{\eta} [e^{-j\beta x \sin \theta} e^{-j\beta z \cos \theta} + e^{-j\beta x \sin \theta} e^{j\beta z \cos \theta}] =$$

$$= \frac{E_1'}{\eta} e^{j\phi_1'} e^{j\omega t} e^{-j\beta x \sin \theta} 2 \cos(\beta z \cos \theta) = 2 \frac{E_1'}{\eta} \cos(\beta z \cos \theta) \cos(\omega t - \beta x \sin \theta + \phi_1')$$

Passare a pag. 53 in fondo

ci sono ancora da calcolare le restanti componenti del campo. Risulta:



$$E_y = E_1'' e^{-j\beta z} - E_2'' e^{j\beta z} =$$

$$= E_1'' e^{-j\beta x \sin \theta} e^{-j\beta z \cos \theta} - E_2'' e^{-j\beta x \sin \theta'} e^{j\beta z \cos \theta'}$$

$$\text{for } z=0 \quad E_y = 0 \quad \forall x:$$

$$0 = E_1'' e^{-j\beta x \sin \theta} - E_2'' e^{-j\beta x \sin \theta'}$$

$$\text{due a cui:} \quad \theta = \theta' \quad E_1'' = E_2''$$

perciò:

$$E_y = E_1'' e^{j\phi_1''} e^{-j\beta x \sin \theta} e^{j\omega t} \left[\frac{e^{-j\beta z \cos \theta} - e^{j\beta z \cos \theta}}{2j} \right] z_j$$

in definitiva:

$$E_y = 2 E_1'' \sin(\beta z \cos \theta) \sin(\omega t - \beta x \sin \theta + \phi_1'')$$

Analogamente:

$$H_x = -H_1'' \cos \theta - H_2'' \cos \theta = -\cos \theta \left[\frac{E_1''}{\eta} + \frac{E_2''}{\eta} \right] = -\frac{\cos \theta}{\eta} [E_1'' e^{-j\beta z} + E_2'' e^{j\beta z}] =$$

$$= -2 \frac{\cos \theta}{\eta} E_1'' e^{j(\omega t - \beta x \sin \theta + \phi_1'')} \cos(\beta z \cos \theta) =$$

$$= -2 \frac{\cos \theta}{\eta} E_1'' \cos(\beta z \cos \theta) \cos(\omega t - \beta x \sin \theta + \phi_1'')$$

$$H_z = H_1'' \sin \theta - H_2'' \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\eta} [E_1'' e^{-j\beta z} - E_2'' e^{j\beta z}] = 2 \frac{\sin \theta}{\eta} E_1'' \sin(\beta z \cos \theta) \sin(\omega t - \beta x \sin \theta + \phi_1'')$$

In definitiva il campo $\vec{E}$ è il seguente:

$$E_x = 2E'_1 \cos \vartheta \sin(\beta z \cos \vartheta) \sin(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi'_1) \quad (1)$$

$$E_y = 2E''_1 \sin(\beta z \cos \vartheta) \sin(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi''_1) \quad (2)$$

$$E_z = -2E'_1 \sin \vartheta \cos(\beta z \cos \vartheta) \cos(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi'_1) \quad (3)$$

$$H_x = -2 \frac{E''_1}{\eta} \cos \vartheta \cos(\beta z \cos \vartheta) \cos(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi''_1) \quad (4)$$

$$H_y = 2 \frac{E'_1}{\eta} \cos(\beta z \cos \vartheta) \cos(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi'_1) \quad (5)$$

$$H_z = 2 \frac{E'_1}{\eta} \sin \vartheta \sin(\beta z \cos \vartheta) \sin(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi'_1) \quad (6)$$

La corrente superficiale presente sulla lastra di metallo è la seguente:

$$\vec{J}_w = -\vec{k} \wedge [\vec{H}]_{z=0} = -\vec{k} \wedge \vec{i} \left[-2 \frac{E''_1}{\eta} \cos \vartheta \cos(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi''_1) \right] - \vec{k} \wedge \vec{j} \left[2 \frac{E'_1}{\eta} \cos(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi'_1) \right]$$

cioè:

$$\vec{J}_w = \frac{2}{\eta} \left\{ \cos(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi''_1) E''_1 \cos \vartheta \vec{j} + \cos(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi'_1) E'_1 \vec{i} \right\} \quad (7)$$

Le cariche di superficie presenti sono:

$$\omega = -\vec{k} \cdot \vec{E} [\vec{E}_z]_{z=0} = 2EE'_1 \sin \vartheta \cos(\omega t - \beta x \sin \vartheta + \varphi'_1) \quad (8)$$

Per $\vartheta = \pi/2$ solo E_z ed H_y sono diversi da zero, tutte le altre componenti del campo sono nulle; $\vec{J}_w$ è diretto in tal caso come l'asse x ; ω rimane inalterata.

Si definisce impedenza di un'onda il rapporto tra i valori complessi di $\vec{E}$ e di $\vec{H}$. Ad esempio, per un'onda che incide normalmente su un piano di metallo perfetto:

$$\frac{E_x}{H_y} = -j\eta \quad (9)$$

Notare che se non ci fosse il piano riflettente $E_x/H_y = \eta$. L'impedenza (9) ha un

poli nei punti in cui è:

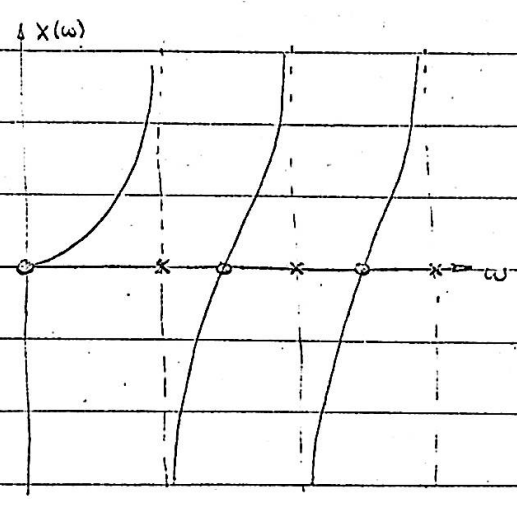
$$\frac{z}{x} = \frac{1}{\beta} \frac{2u+1}{2} \pi = (2u+1) \frac{\lambda}{4} \quad (1)$$

ed ha zeri nei punti in cui:

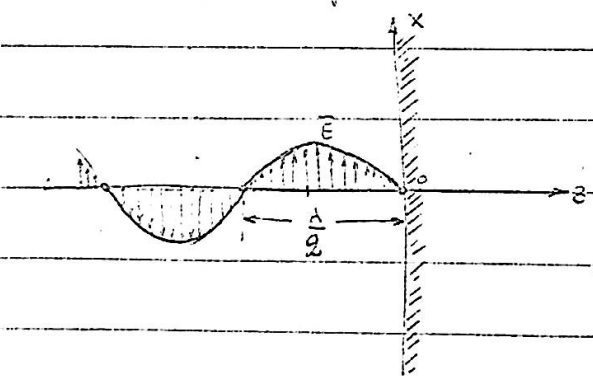
$$\frac{z}{\beta} = \frac{1}{\beta} u \pi = u \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Quindi i poli si hanno nei centri del campo elettrico e gli zeri nei nodi di $\vec{E}$

Posto $z = jX(\omega)$ vale il diagramma:



Quindi si ha la seguente distribuzione del campo (indicate polle). L'onda stazionaria si



manifesta solo in un mezzo dielettrico e in assenza di perdite, come è noto. Tuttavia nelle applicazioni si presentano casi intermedi. Consideriamo l'incidente su una superficie piana di separazione tra due mezzi $\epsilon_1 \mu_1$ ed $\epsilon_2 \mu_2$ dielettrici perfetti. L'onda trasmessa è quella che è, e prosegue inalterata. Il campo nella regione 1 è invece la somma di un'onda diretta e di un'onda stazionaria. Si definisce rapporto d'onda stazionaria:

$$SWR = \frac{\max(\vec{E})}{\min(\vec{E})} \quad (3)$$

1 2

Il campo a sinistra è:

$$E = E_1 e^{-j\beta_1 z} + E_2 e^{j\beta_1 z} \quad ; \quad H = H_1 e^{-j\beta_1 z} + H_2 e^{j\beta_1 z} \quad (1)$$

$$\frac{E_1}{H_1} = \eta_1 \quad \frac{E_2}{H_2} = -\eta_1 \quad (2)$$

Il campo a destra è ovviamente

$$E = E_t e^{-j\beta_2 z} \quad H = H_t e^{-j\beta_2 z} \quad E_t/H_t = \eta_2 \quad (3)$$

Continuità di $\vec{E}$ e di $\vec{H}$:

$$E_1 + E_2 = E_t \quad H_1 + H_2 = H_t \quad (4)$$

da cui:

$$E_2 = E_1 \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad E_t = E_1 \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (5)$$

Quindi sia l'onda riflessa che quella trasmessa sono in fase con quella incidente. Per il campo magnetico:

$$H_2 = H_1 \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad H_t = H_1 \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad (6)$$

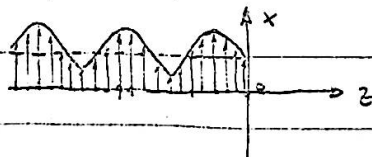
Risultato pertanto:

$$E = E_1 e^{j\varphi_1} e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t} + E_2 e^{j\varphi_1} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} e^{j\beta_1 z} e^{j\omega t} = E_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \left[-\eta_1 \frac{2j \sin \beta_1 z}{\eta_1 + \eta_2} + 2\eta_2 \frac{\cos \beta_1 z}{\eta_1 + \eta_2} \right] \quad (7)$$

Prendendone la parte reale:

$$E = \frac{2E_1}{\eta_1 + \eta_2} \left[\eta_2 \cos \beta_1 z \cos(\omega t + \varphi_1) + \eta_1 \sin \beta_1 z \sin(\omega t + \varphi_1) \right] \quad (8)$$

che fornisce la distribuzione di E nel semispazio di sinistra. Si vede che l'onda è stazionaria ma a valore medio non nullo, del tipo cioè:



(9)

Un andamento analogo si ha per il campo magnetico:

$$H = \frac{2E_1}{\eta_1 + \eta_2} \eta_1 \left[\eta_1 \cos \beta_1 z \cos(\omega t + \varphi_1) + \eta_2 \sin \beta_1 z \sin(\omega t + \varphi_1) \right] = \frac{E}{\eta_1} \quad (10)$$